

BEER | JOHNSTON | MAZUREK | EISENBERG

Mecânica Vetorial para Engenheiros

9ª Edição

ESTÁTICA

✓ Com unidades no
Sistema Internacional



**Mc
Graw
Hill**



Obra originalmente publicada sob o título
Vector Mechanics for Engineers: Statics, 9th Edition
ISBN 0073529230/9780073529233

Copyright © 2009, The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Capa: *Maurício Pamplona (arte sobre capa original)*

Foto da capa: © *John Peter Photography/Alamy*

Leitura final: *Grace Guimarães Mosquera*

Gerente editorial – CESA: *Arysinha Jacques Affonso*

Editora sênior: *Viviane R. Nepomuceno*

Editora: *Luciana Cruz*

Projeto e editoração: *Techbooks*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à AMGH Editora Ltda.
(AMGH EDITORA é uma parceria entre ARTMED Editora S.A. e MCGRAW-HILL EDUCATION).
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444 – www.grupoa.com.br

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

SUMÁRIO

1 Introdução 3

- 1.1 O que é mecânica? 4
- 1.2 Conceitos e princípios fundamentais 4
- 1.3 Sistemas de unidades 7
- 1.4 Conversão de um sistema de unidades para outro 12
- 1.5 Método de resolução de problemas 14
- 1.6 Precisão numérica 15

2 Estática de partículas 17

- 2.1 Introdução 18
 - Forças no plano 18**
- 2.2 Força sobre uma partícula e resultante de duas forças 18
- 2.3 Vetores 19
- 2.4 Adição de vetores 20
- 2.5 Resultante de várias forças concorrentes 22
- 2.6 Decomposição dos componentes de uma força 23
- 2.7 Componentes retangulares de uma força e vetores unitários 29
- 2.8 Adição de forças pela soma dos componentes x e y 32
- 2.9 Equilíbrio de uma partícula 37
- 2.10 Primeira lei de Newton do movimento 38
- 2.11 Problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula e diagramas de corpo livre 38
 - Forças no espaço 47**
- 2.12 Componentes retangulares de uma força no espaço 47
- 2.13 Força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação 50
- 2.14 Adição de forças concorrentes no espaço 51
- 2.15 Equilíbrio de uma partícula no espaço 59
- Revisão e resumo 66
- Problemas de revisão 69
- Problemas para resolver no computador 72

3 **Corpos rígidos: sistemas equivalentes de forças** 75

- 3.1 Introdução 76
- 3.2 Forças externas e forças internas 76
- 3.3 Princípio da transmissibilidade e forças equivalentes 77
- 3.4 Produto vetorial de dois vetores 79
- 3.5 Produtos vetoriais expressos em termos de componentes retangulares 81
- 3.6 Momento de uma força em relação a um ponto 83
- 3.7 Teorema de Varignon 85
- 3.8 Componentes retangulares do momento de uma força 85
- 3.9 Produto escalar de dois vetores 96
- 3.10 Produto triplo misto de três vetores 98
- 3.11 Momento de uma força em relação a um dado eixo 99
- 3.12 Momento de um binário 110
- 3.13 Binários equivalentes 111
- 3.14 Adição de binários 113
- 3.15 Binários podem ser representados por vetores 113
- 3.16 Substituição de uma dada força por uma força em O e um binário 114
- 3.17 Redução de um sistema de forças a uma força e um binário 125
- 3.18 Sistemas equivalentes de forças 127
- 3.19 Sistemas equipolentes de vetores 127
- 3.20 Casos particulares de redução de um sistema de forças 128
- 3.21 Redução de um sistema de forças a um tissor 130
- Revisão e resumo 148
- Problemas de revisão 153
- Problemas para resolver no computador 156

4 Equilíbrio de corpos rígidos 159

- 4.1 Introdução 160
- 4.2 Diagrama de corpo livre 161
- Equilíbrio em duas dimensões 162**
- 4.3 Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional 162
- 4.4 Equilíbrio de um corpo rígido em duas dimensões 164
- 4.5 Reações estaticamente indeterminadas e vinculações parciais 166
- 4.6 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de duas forças 183
- 4.7 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de três forças 184
- Equilíbrio em três dimensões 191**
- 4.8 Equilíbrio de um corpo rígido em três dimensões 191
- 4.9 Reações em apoios e conexões para uma estrutura tridimensional 191

Revisão e resumo 212

Problemas de revisão 215

Problemas para resolver no computador 218

5 Forças distribuídas: centroides e centros de gravidade 221

- 5.1 Introdução 222
- Áreas e linhas 222**
- 5.2 Centro de gravidade de um corpo bidimensional 222
- 5.3 Centroides de áreas e linhas 224
- 5.4 Momentos de primeira ordem em áreas e linhas 225
- 5.5 Placas e fios compostos 228

5.6	Determinação de centroides por integração	238
5.7	Teorema de Pappus-Guldinus	240
5.8	Cargas distribuídas sobre vigas	250
5.9	Forças em superfícies submersas	251
	Sólidos	260
5.10	Centro de gravidade de um corpo tridimensional e centroide de um sólido	260
5.11	Corpos compostos	263
5.12	Determinação de centroides de sólidos por integração	263
	Revisão e resumo	276
	Problemas de revisão	280
	Problemas para resolver no computador	283

6 Análise de estruturas 287

6.1	Introdução	288
	Treliças	289
6.2	Definição de uma treliça	289
6.3	Treliças simples	291
6.4	Análise de treliças pelo método dos nós	292
6.5	Nós sujeitos a condições especiais de carregamento	294
6.6	Treliças espaciais	296
6.7	Análise de treliças pelo método das seções	306
6.8	Treliças feitas de várias treliças simples	307
	Estruturas e máquinas	318
6.9	Estruturas que contêm elementos sujeitos à ação de múltiplas forças	318
6.10	Análise de uma estrutura	318
6.11	Estruturas que deixam de ser rígidas quando separadas de seus apoios	319
6.12	Máquinas	333
	Revisão e resumo	347
	Problemas de revisão	350
	Problemas para resolver no computador	352

7 Forças em vigas e cabos 355

- 7.1 Introdução 356
- 7.2 Forças internas em elementos 356
 - Vigas 364**
- 7.3 Diversos tipos de carregamento e apoio 364
- 7.4 Esforço cortante e momento fletor em uma viga 365
- 7.5 Diagramas de esforço cortante e de momento fletor 367
- 7.6 Relações entre carregamento, esforço cortante e momento fletor 375
 - Cabos 385**
- 7.7 Cabos com cargas concentradas 385
- 7.8 Cabos com cargas distribuídas 386
- 7.9 Cabo parabólico 387
- 7.10 Catenária 397

Revisão e resumo 405

Problemas de revisão 408

Problemas para resolver no computador 410

8 Atrito 413

- 8.1 Introdução 414
- 8.2 As leis de atrito seco e coeficientes de atrito 414
- 8.3 Ângulos de atrito 417
- 8.4 Problemas que envolvem atrito seco 418
- 8.5 Cunhas 431
- 8.6 Parafusos de rosca quadrada 432
- 8.7 Mancais de deslizamento e atrito em eixo 441
- 8.8 Mancais de escora e atrito em disco 443
- 8.9 Atrito em roda e resistência ao rolamento 444
- 8.10 Atrito em correia 451

Revisão e resumo 462

Problemas de revisão 465

Problemas para resolver no computador 469

9 Forças distribuídas: momento de inércia 473

- 9.1 Introdução 474
 - Momento de inércia de superfícies 475**
- 9.2 Momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de uma superfície 475
- 9.3 Determinação do momento de inércia de uma superfície por integração 476
- 9.4 Momento de inércia polar 477
- 9.5 Raio de giração de uma superfície 478
- 9.6 Teorema dos eixos paralelos 485
- 9.7 Momentos de inércia de superfícies compostas 486
- 9.8 Produto de inércia 498
- 9.9 Eixos principais e momentos de inércia principais 499
- 9.10 Círculo de Mohr para momentos e produtos de inércia 507
 - Momentos de inércia de corpos 513**
- 9.11 Momento de inércia de um corpo 513
- 9.12 Teorema dos eixos paralelos 514
- 9.13 Momentos de inércia de placas delgadas 515
- 9.14 Determinação do momento de inércia de um corpo tridimensional por integração 517
- 9.15 Momentos de inércia de corpos compostos 517
- 9.16 Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário que passa por O e produtos de inércia de corpos 533
- 9.17 Elipsoide de inércia e eixos principais de inércia 534
- 9.18 Determinação dos eixos principais e dos momentos principais de inércia de um corpo de formato arbitrário 536
- Revisão e resumo 548
- Problemas de revisão 554
- Problemas para resolver no computador 556

10 Método do trabalho virtual 559

- 10.1** Introdução 560
- 10.2** Trabalho de uma força 560
- 10.3** Princípio do trabalho virtual 563
- 10.4** Aplicações do princípio do trabalho virtual 564
- 10.5** Máquinas reais e eficiência mecânica 566
- 10.6** Trabalho de uma força durante um deslocamento finito 580
- 10.7** Energia potencial 582
- 10.8** Energia potencial e equilíbrio 583
- 10.9** Estabilidade do equilíbrio 584

Revisão e resumo 594

Problemas de revisão 597

Problemas para resolver no computador 600

Apêndice Exame de fundamentos de engenharia 603

Créditos das fotos 605

Respostas 607

Índice 617

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática

No fim do século XVII, *Sir Isaac Newton* estabeleceu os princípios fundamentais da mecânica, que constituem a base de grande parte da engenharia atual.



CAPÍTULO

1

Introdução



Introdução

- 1.1 O que é mecânica?
- 1.2 Conceitos e princípios fundamentais
- 1.3 Sistemas de unidades
- 1.4 Conversão de um sistema de unidades para outro
- 1.5 Método de resolução de problemas
- 1.6 Precisão numérica

1.1 O que é mecânica?

A mecânica pode ser definida como a ciência que descreve e prevê as condições de repouso ou movimento dos corpos sob a ação de forças. Ela divide-se em três partes: mecânica dos *corpos rígidos*, mecânica dos *corpos deformáveis* e *mecânica dos fluidos*.

A mecânica dos corpos rígidos é subdividida em *estática* e *dinâmica*: a primeira trata dos corpos em repouso; a última, dos corpos em movimento. Nesta parte do estudo da mecânica, os corpos são considerados perfeitamente rígidos. No entanto, as estruturas e máquinas reais nunca são absolutamente rígidas mas se deformam sob a ação das cargas a que estão sujeitas. Essas deformações, contudo, geralmente são pequenas e não afetam de modo sensível as condições de equilíbrio ou movimento da estrutura a ser estudada. São importantes, por outro lado, na medida em que a resistência da estrutura a falhas seja levada em consideração sendo por isso estudadas na mecânica dos materiais, a parte da mecânica que trata dos corpos deformáveis. A terceira divisão da mecânica, a mecânica dos fluidos, é subdividida no estudo de *fluidos incompressíveis* e de *fluidos compressíveis*. Uma importante subdivisão do estudo dos fluidos incompressíveis é a *hidráulica*, que trata dos problemas que envolvem a água.

A mecânica é uma ciência física, pois trata do estudo de fenômenos físicos. Todavia, alguns associam a mecânica à matemática, enquanto muitos a consideram um assunto de engenharia. Em parte, ambos os pontos de vista são justificáveis. A mecânica constitui a base de muitas ciências da engenharia, sendo um pré-requisito indispensável para seu estudo. Contudo, não apresenta o *empirismo* encontrado em algumas ciências da engenharia, ou seja, não se baseia apenas na experiência e na observação; pelo seu rigor e pela ênfase que coloca no raciocínio dedutivo, a mecânica se assemelha à matemática. Mas, apesar disso, não é uma ciência *abstrata* nem tampouco *pura*; a mecânica é uma ciência *aplicada*. O propósito da mecânica é explicar e prever fenômenos físicos e, desse modo, estabelecer os fundamentos para aplicações de engenharia.

1.2 Conceitos e princípios fundamentais

Embora o estudo da mecânica remonte aos tempos de Aristóteles (384-322 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C), foi preciso esperar até Newton (1642-1727) para que houvesse uma formulação satisfatória de seus princípios fundamentais. Esses princípios foram posteriormente expressos de maneira diferente por d'Alembert, Lagrange e Hamilton. No entanto, sua validade permaneceu incontestada, até Einstein formular sua *teoria da relatividade* (1905). Apesar de suas limitações serem hoje reconhecidas, a *mecânica newtoniana* ainda continua sendo a base das ciências da engenharia atuais.

Os conceitos básicos usados em mecânica são os de *espaço*, *tempo*, *massa* e *força*. Esses conceitos não podem ser verdadeiramente definidos; devem ser aceitos com base em nossa intuição e experiência e usados como um conjunto de referências mentais para o nosso estudo de mecânica.

O conceito de espaço está associado à noção de posição de um ponto P . A posição de P pode ser definida por três comprimentos medidos a partir de um determinado ponto de referência, ou *origem*, segundo três direções dadas. Esses comprimentos são conhecidos como *coordenadas* de P .

Para se definir um evento, não é suficiente indicar a sua posição no espaço. O *tempo* do evento também deve ser fornecido.

O conceito de *massa* é usado para caracterização e comparação de corpos com base em certos experimentos mecânicos fundamentais. Dois corpos de mesma massa, por exemplo, serão atraídos pela Terra de modo idêntico e irão oferecer a mesma resistência a uma variação de movimento de translação.

Uma *força* representa a ação de um corpo sobre outro. A força pode ser exercida por contato direto ou à distância, como no caso das forças gravitacionais e magnéticas. Uma força é caracterizada pelo seu *ponto de aplicação*, sua *intensidade* e sua *direção*; uma força é representada por um *vetor* (Seção 2.3).

Na mecânica newtoniana, espaço, tempo e massa são conceitos absolutos, independentes entre si. (Isto não vale para *mecânica relativística*, na qual o tempo de um evento depende da sua posição e a massa de um corpo varia com sua velocidade.) Por outro lado, o conceito de força não é independente dos outros três. De fato, um dos princípios fundamentais da mecânica newtoniana listados adiante estabelece que a força resultante que atua sobre um corpo está relacionada à massa do corpo e ao modo pelo qual sua velocidade varia com o tempo.

Estudaremos as condições de repouso ou movimento de partículas e de corpos rígidos em termos dos quatro conceitos básicos que acabamos de apresentar. Por *partícula* entendemos uma quantidade de matéria muito pequena e que, por hipótese, ocupa um único ponto no espaço. Um *corpo rígido* é uma combinação de um grande número de partículas que ocupam posições fixas umas em relação às outras. O estudo da mecânica de partículas é obviamente um pré-requisito para o estudo dos corpos rígidos. Além disso, os resultados obtidos para uma partícula podem ser usados diretamente em um grande número de problemas que tratam das condições de repouso ou movimento de corpos reais.

O estudo da mecânica elementar se baseia em seis princípios fundamentais, baseados em evidências experimentais.

A lei do paralelogramo para a adição de forças. Essa lei estabelece que duas forças que atuam sobre uma partícula podem ser substituídas por uma única força, denominada *resultante*, que se obtém traçando-se a diagonal do paralelogramo cujos lados são iguais às forças dadas (Seção 2.2).

O princípio da transmissibilidade. Esse princípio estabelece que as condições de equilíbrio ou movimento de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força que atue em um dado ponto do corpo rígido for substituída por uma força de igual magnitude e de igual direção, porém atuando em um ponto diferente, desde que as duas forças tenham a mesma linha de ação (Seção 3.3).

As três leis fundamentais de Newton. Formuladas por Sir Isaac Newton no final do século XVII, essas leis podem ser enunciadas da seguinte maneira:

PRIMEIRA LEI. Se a força resultante que atua em uma partícula for nula, a partícula permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá em velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento) (Seção 2.10).

SEGUNDA LEI. Se a força resultante que atua sobre uma partícula não for nula, a partícula terá uma aceleração de magnitude proporcional à magnitude da resultante e na mesma direção dessa força resultante.

Conforme você verá na Seção 12.2, essa lei pode ser estabelecida como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

onde \mathbf{F} , m e \mathbf{a} representam, respectivamente, a força resultante que atua sobre a partícula, a massa da partícula e a aceleração da partícula, expressas em um sistema de unidades consistente.

TERCEIRA LEI. As forças de ação e reação entre corpos em contato têm a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos (Seção 6.1).

Lei de Newton da gravitação. Essa lei estabelece que duas partículas de massa M e m são mutuamente atraídas com forças iguais e opostas \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ (Fig. 1.1) de magnitude F dada pela expressão

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.2)$$

onde r = distância entre as duas partículas

G = constante universal denominada constante gravitacional

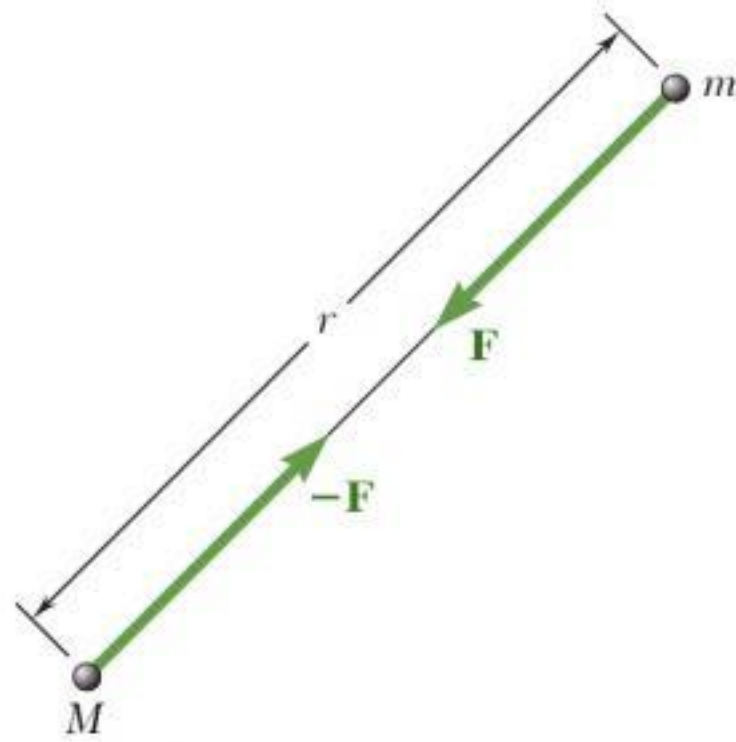


Figura 1.1

A lei de Newton da gravitação introduz a ideia de uma ação exercida a distância e amplia a faixa de aplicação da terceira lei de Newton: a ação \mathbf{F} e a reação $-\mathbf{F}$ na Fig. 1.1 são iguais e opostas, e têm a mesma linha de ação.

Um caso particular de grande importância é a atração exercida pela Terra sobre uma partícula localizada na sua superfície. A força \mathbf{F} exercida pela Terra sobre a partícula é então definida como o *peso* \mathbf{W} (do inglês, *weight*) da partícula. Considerando-se M igual à massa da Terra, m igual à massa da partícula e r igual ao raio R da Terra, e introduzindo-se a constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (1.3)$$

a magnitude do peso W de uma partícula de massa m pode ser expressa como*

$$W = mg \quad (1.4)$$



Foto 1.1 Quando em órbita da Terra, diz-se que as pessoas e os objetos ficam *sem peso*, muito embora a força gravitacional atuante seja aproximadamente 90% daquela experimentada sobre a superfície da Terra. Essa aparente contradição será resolvida no Cap. 12, quando aplicarmos a segunda lei de Newton ao movimento de partículas.

O valor de R na Eq. (1.3) depende da altitude do ponto considerado; depende também da sua latitude, pois a Terra não é perfeitamente esférica. Portanto, o valor de g varia com a posição do ponto considerado. Desde que o ponto realmente permaneça sobre a superfície da Terra, basta, na maior parte dos cálculos de engenharia, admitir que g seja igual a $9,81 \text{ m/s}^2$.

* Uma definição mais precisa do peso \mathbf{W} deveria levar em conta a rotação da Terra.

Os princípios que acabamos de listar serão apresentados ao longo de nosso estudo de mecânica quando necessário. O estudo da estática de partículas realizado no Cap. 2 será baseado somente na lei do paralelogramo para a adição de forças e na primeira lei de Newton. O princípio de transmissibilidade será apresentado no Cap. 3, quando iniciarmos o estudo da estática de corpos rígidos, e a terceira lei de Newton será apresentada no Cap. 6, quando formos analisar as forças exercidas entre si pelos vários elementos que formam uma estrutura. A segunda lei de Newton e a lei de Newton da gravitação serão apresentadas no estudo da dinâmica. Veremos, então, que a primeira lei de Newton é um caso particular da segunda lei de Newton (Seção 12.2) e que o princípio de transmissibilidade poderia ser deduzido a partir dos outros princípios, podendo assim ser eliminado (Seção 16.5). Todavia, a primeira e a terceira leis de Newton, a lei do paralelogramo para a adição de forças e o princípio de transmissibilidade irão, por enquanto, nos prover dos fundamentos necessários e suficientes para o estudo completo da estática de partículas, de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos.

Conforme observamos anteriormente, os seis princípios fundamentais já listados são baseados em evidência experimental. Com exceção da primeira lei de Newton e do princípio de transmissibilidade, são princípios independentes que não podem ser deduzidos matematicamente a partir dos demais ou a partir de qualquer outro princípio físico elementar. Sobre esses princípios está baseada a maior parte da intrincada estrutura da mecânica newtoniana. Por mais de dois séculos, um número espantoso de problemas, tratando das condições de repouso e movimento de corpos rígidos, de corpos deformáveis e de fluidos, foi resolvido pela aplicação desses princípios fundamentais. Muitas das soluções obtidas puderam ser verificadas experimentalmente, fornecendo assim uma verificação adicional dos princípios a partir dos quais foram obtidas. Apenas no final do século XIX e início do XX é que a mecânica de Newton foi colocada em cheque, no estudo do movimento dos átomos e no estudo do movimento de certos planetas, situações em que ela teve de ser suplementada pela teoria da relatividade. Mas, em uma escala humana ou da engenharia, na qual as velocidades são pequenas comparadas com a velocidade da luz, a mecânica de Newton ainda não foi refutada.

1.3 Sistemas de unidades

Associadas aos quatro conceitos fundamentais apresentados na seção anterior, estão as chamadas *unidades cinéticas*, isto é, as unidades de *comprimento*, *tempo*, *massa* e *força*. Essas unidades não podem ser escolhidas sem critério se quisermos satisfazer as condições da Eq. (1.1). Três dessas unidades podem ser definidas arbitrariamente; elas são denominadas *unidades básicas*. A quarta unidade, porém, deve ser escolhida de acordo com a Eq. (1.1) e denomina-se *unidade derivada*. Diz-se então que as unidades cinéticas assim selecionadas formam um *sistema de unidades consistente*.

Sistema Internacional de Unidades (Unidades do SI). Nesse sistema, que será de uso universal quando os Estados Unidos completarem sua conversão às unidades do SI, as unidades básicas são as de comprimento, massa e tempo, denominadas, respectivamente, *metro* (m), *quilograma* (kg) e *segundo* (s). As três são definidas arbitrariamente.

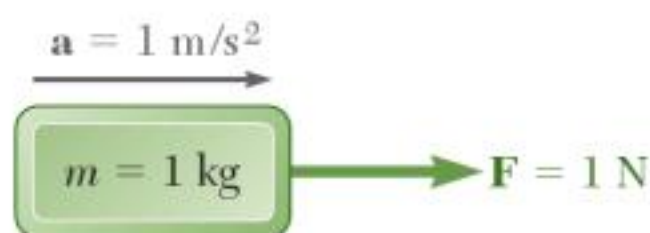


Figura 1.2

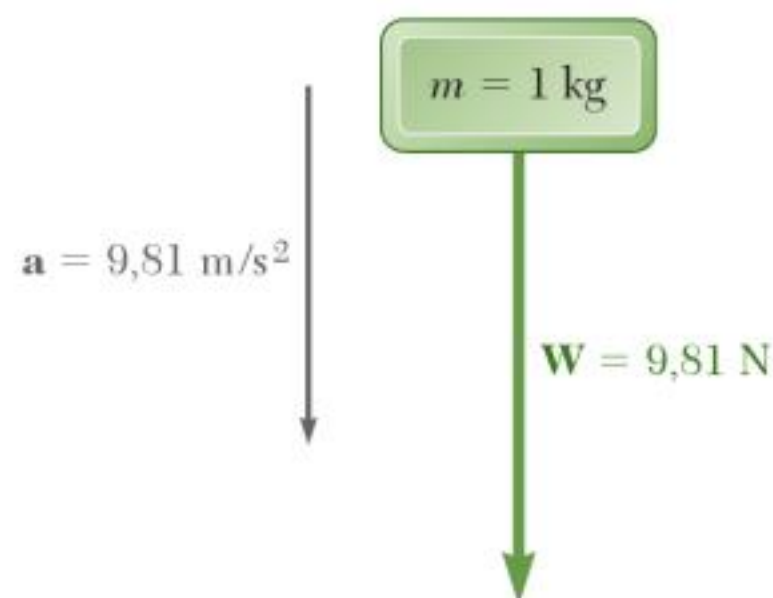


Figura 1.3

O segundo, originalmente escolhido para representar $1/86.400$ do dia solar médio, é agora definido como a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis do estado fundamental do átomo de césio-133. O metro, originalmente definido como um décimo de milionésimo da distância do equador a cada polo, é agora definido como 1.650.763,73 comprimentos de onda da luz laranja-vermelha, que correspondem a uma certa transição em um átomo de criptônio-86. O quilograma, que é aproximadamente igual à massa de $0,001 \text{ m}^3$ de água, é definido como a massa de um padrão de platina-irídio mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, próximo a Paris, França. A unidade de força é uma unidade derivada. Denomina-se *newton* (N) e é definida como sendo a força que imprime uma aceleração de 1 m/s^2 a uma massa de 1 kg (Fig. 1.2). A partir da Eq. (1.1), escrevemos:

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (1.5)$$

Diz-se que as unidades do SI formam um sistema *absoluto* de unidades. Isso significa que as três unidades básicas escolhidas são independentes do local em que as medições são feitas. O metro, o quilograma e o segundo podem ser usados em qualquer lugar da Terra; podem ser usados, inclusive, em outro planeta, e sempre terão o mesmo significado.

O *peso* de um corpo, ou a *força da gravidade* exercida sobre esse corpo, deve ser expresso em newtons, como qualquer outra força. Da Eq. (1.4), segue-se que o peso de um corpo de 1 kg de massa (Fig. 1.3) é:

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) \\ &= 9,81 \text{ N} \end{aligned}$$

Múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais do SI podem ser obtidos pelo uso dos prefixos definidos na Tabela 1.1. Os múltiplos e submúltiplos das unidades de comprimento, massa e força usados mais frequentemente em engenharia são, respectivamente, o *quilômetro* (km) e o *milímetro* (mm); o *megagrama** (Mg) e o *grama* (g); e o *quilonewton* (kN). De acordo com a Tabela 1.1, temos:

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1.000 \text{ m} & 1 \text{ mm} &= 0,001 \text{ m} \\ 1 \text{ Mg} &= 1.000 \text{ kg} & 1 \text{ g} &= 0,001 \text{ kg} \\ 1 \text{ kN} &= 1.000 \text{ N} \end{aligned}$$

A conversão dessas unidades em metros, quilogramas e newtons, respectivamente, pode ser efetuada pelo simples movimento da vírgula decimal três casas para a direita ou para a esquerda. Por exemplo, para converter 3,82 km em metros, move-se a vírgula decimal três casas para a direita:

$$3,82 \text{ km} = 3.820 \text{ m}$$

Analogamente, 47,2 mm são convertidos em metros movendo-se a vírgula decimal três casas para a esquerda:

$$47,2 \text{ mm} = 0,0472 \text{ m}$$

* Também conhecido como *tonelada métrica*.

Tabela 1.1 Prefixos SI

Fator de multiplicação	Prefixo	Símbolo
$1.000.000.000.000 = 10^{12}$	tera	T
$1.000.000.000 = 10^9$	giga	G
$1.000.000 = 10^6$	mega	M
$1.000 = 10^3$	quilo	k
$100 = 10^2$	hecto*	h
$10 = 10^1$	deca*	da
$0,1 = 10^{-1}$	deci*	d
$0,01 = 10^{-2}$	centi*	c
$0,001 = 10^{-3}$	mili	m
$0,000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0,000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0,000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p
$0,000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$	femto	f
$0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$	atto	a

*O uso desses prefixos deve ser evitado, exceto para a medição de áreas e volumes e para o uso não técnico do centímetro, como no caso das medidas do corpo e de roupas.

Usando notação científica, pode-se escrever também:

$$3,82\text{ km} = 3,82 \times 10^3\text{ m}$$

$$47,2\text{ mm} = 47,2 \times 10^{-3}\text{ m},$$

Os múltiplos da unidade de tempo são o *minuto* (min) e a *hora* (h). Uma vez que $1\text{ min} = 60\text{ s}$ e $1\text{ h} = 60\text{ min} = 3.600\text{ s}$, esses múltiplos não podem ser convertidos tão prontamente como os outros.

Usando-se o múltiplo ou submúltiplo apropriado de uma dada unidade, é possível evitar a escrita de números muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, geralmente se escreve 427,2 km em vez de 427.200 m, e 2,16 mm em vez de 0,002 16 m.

Unidades de área e volume. A unidade de área é o *metro quadrado* (m^2), que representa a área de um quadrado de 1 m de lado; a unidade de volume é o *metro cúbico* (m^3), igual ao volume de um cubo de 1 m de lado. Para evitar valores numéricos excessivamente pequenos ou grandes no cálculo de áreas e volumes, utilizam-se sistemas de subunidades, obtidos, respectivamente, pela elevação ao quadrado e ao cubo não só do milímetro mas também de dois submúltiplos intermediários do metro, a saber, o *decímetro* (dm) e o *centímetro* (cm). Uma vez que, por definição,

$$1\text{ dm} = 0,1\text{ m} = 10^{-1}\text{ m}$$

$$1\text{ cm} = 0,01\text{ m} = 10^{-2}\text{ m}$$

$$1\text{ mm} = 0,001\text{ m} = 10^{-3}\text{ m}$$

os submúltiplos da unidade de área são

$$1\text{ dm}^2 = (1\text{ dm})^2 = (10^{-1}\text{ m})^2 = 10^{-2}\text{ m}^2$$

$$1\text{ cm}^2 = (1\text{ cm})^2 = (10^{-2}\text{ m})^2 = 10^{-4}\text{ m}^2$$

$$1\text{ mm}^2 = (1\text{ mm})^2 = (10^{-3}\text{ m})^2 = 10^{-6}\text{ m}^2$$

e os submúltiplos da unidade de volume são

$$\begin{aligned}1 \text{ dm}^3 &= (1 \text{ dm})^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 \\1 \text{ cm}^3 &= (1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3 \\1 \text{ mm}^3 &= (1 \text{ mm})^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3\end{aligned}$$

Deve-se notar que, ao medir-se o volume de um líquido, em geral se refere ao decímetro cúbico (dm^3) como *litro* (L).

Outras unidades derivadas do SI usadas para se medir o momento de uma força, o trabalho de uma força, etc. estão mostradas na Tabela 1.2. Embora essas unidades venham a ser apresentadas em capítulos subsequentes, quando necessário, devemos observar desde já uma regra importante: quando uma unidade derivada for obtida pela divisão de uma unidade básica por outra unidade básica, poderá ser usado um prefixo no numerador da unidade derivada, mas não no denominador. Por exemplo, a constante k de uma mola que se estende 20 mm sob uma carga de 100 N será expressa como:

$$k = \frac{100 \text{ N}}{20 \text{ mm}} = \frac{100 \text{ N}}{0,020 \text{ m}} = 5.000 \text{ N/m} \quad \text{ou} \quad k = 5 \text{ kN/m}$$

porém, jamais como $k = 5 \text{ N/mm}$.

Unidades Usuais nos EUA. A maioria dos engenheiros americanos usa um sistema em que as unidades básicas são as de comprimento, força e tempo. Essas unidades são, respectivamente, o *pé* (ft, do inglês

Tabela 1.2 Principais unidades do SI usadas em mecânica

Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	...	m/s^2
Ângulo	Radiano	rad	*
Aceleração angular	Radiano por segundo ao quadrado	...	rad/s^2
Velocidade angular	Radiano por segundo	...	rad/s
Área	Metro quadrado	...	m^2
Massa específica	Quilograma por metro cúbico	...	kg/m^3
Energia	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Força	Newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Frequência	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	...	$\text{kg} \cdot \text{m/s}$
Comprimento	Metro	m	**
Massa	Quilograma	kg	**
Momento de uma força	Newton-metro	...	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potência	Watt	W	J/s
Pressão	Pascal	Pa	N/m^2
Tensão	Pascal	Pa	N/m^2
Tempo	Segundo	s	**
Velocidade	Metro por segundo	...	m/s
Volume			
Sólidos	Metro cúbico	...	m^3
Líquidos	Litro	L	10^{-3} m^3
Trabalho	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$

* Unidade suplementar (1 revolução = $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$).

** Unidade básica.

foot), a *libra* (lb) e o *segundo* (s). O segundo corresponde à unidade do SI. O pé é definido como 0,3048 m. A libra é definida como o *peso* de um padrão de platina, denominado *libra padrão*, que é mantido no Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia dos Estados Unidos, nos arredores de Washington, cuja massa equivale a 0,45359243 kg. Uma vez que o peso de um corpo depende da atração gravitacional da Terra, que varia com o local, especifica-se que a libra padrão seja colocada ao nível do mar, a uma latitude de 45°, para se definir apropriadamente uma força de 1 lb. Obviamente, as unidades usuais nos Estados Unidos não formam um sistema absoluto de unidades. Em virtude da sua dependência da atração gravitacional da Terra, formam um sistema de unidades *gravitacional*.

Ainda que a libra padrão também sirva como unidade de massa em transações comerciais nos Estados Unidos, não pode ser usada desse modo em cálculos de engenharia, pois tal unidade não seria consistente com as unidades básicas definidas no parágrafo precedente. De fato, quando submetida a uma força de 1 lb, isto é, quando sujeita à força da gravidade, a libra padrão recebe a aceleração da gravidade, $g = 32,2 \text{ ft/s}^2$ (Fig. 1.4), e não a aceleração unitária requerida pela Eq. (1.1). A unidade de massa consistente com o pé, a libra e o segundo é a massa que recebe uma aceleração de 1 ft/s^2 quando submetida a uma força de 1 lb (Fig. 1.5). Essa unidade, às vezes chamada de *slug*, pode ser deduzida da equação $F = ma$, após substituição de 1 lb e 1 ft/s^2 para F e a , respectivamente. Escrevemos

$$F = ma \quad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug}) (1 \text{ ft/s}^2)$$

para obter

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} \quad (1.6)$$

Comparando as Figs. 1.4 e 1.5, concluímos que o slug é uma massa 32,2 vezes maior que a massa da libra padrão.

O fato dos corpos, no sistema de unidades usuais nos Estados Unidos, serem caracterizados pelo seu peso em libras, em vez de sua massa em slugs, será conveniente no estudo de estática, no qual lidamos constantemente com pesos e outras forças e apenas raramente com massas. Porém, no estudo de dinâmica, que envolve forças, massas e acelerações, a massa m de um corpo será expressa em slugs quando seu peso W for dado em libras. Relembrando a Eq. (1.4), escrevemos

$$m = \frac{W}{g} \quad (1.7)$$

onde g é a aceleração da gravidade ($g = 32,2 \text{ ft/s}^2$).

Outras unidades usuais nos Estados Unidos, frequentemente encontradas em problemas de engenharia, são a *milha* (mi), igual a 5.280 ft; a *polegada* (in, do inglês *inch*), igual a $1/12$ ft; e a *quilolibra* (kip, do inglês *kilo-pound*), igual à força de 1.000 lb. A unidade *ton* é frequentemente usada para representar a massa de 2.000 lb mas, assim como a libra, deve ser convertida em slugs nos cálculos de engenharia.

A conversão em pés, libras e segundos de grandezas expressas nessas outras unidades geralmente é mais complicada e requer maior atenção que as operações correspondentes nas unidades do SI. Por exemplo, se

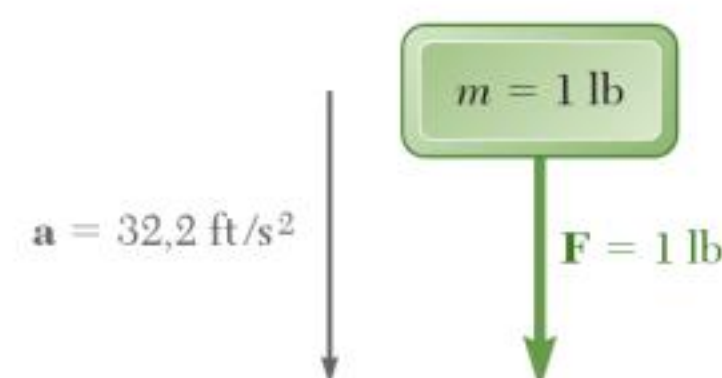


Figura 1.4

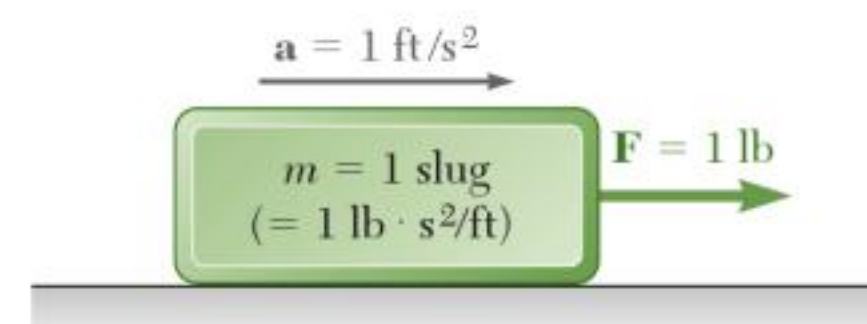


Figura 1.5

a intensidade de uma velocidade é dada como $v = 30 \text{ mi/h}$, a conversão para ft/s é feita da seguinte maneira. Primeiro, escrevemos:

$$v = 30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Uma vez que desejamos nos livrar da unidade milhas e passar para a unidade pés, devemos multiplicar o segundo membro da equação por uma expressão que contenha milhas no denominador e pés no numerador. Mas, como não queremos alterar o valor do segundo membro, a expressão usada deve ter um valor igual à unidade. O quociente $(5.280 \text{ ft})/(1 \text{ mi})$ é a expressão desejada. De modo semelhante, para transformar a unidade hora em segundos, escrevemos:

$$v = \left(30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right) \left(\frac{5.280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right)$$

Efetuada os cálculos numéricos e cancelando as unidades que aparecem tanto no numerador como no denominador, obtemos:

$$v = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 44 \text{ ft/s}$$

1.4 Conversão de um sistema de unidades para outro

Em diversas ocasiões, um engenheiro deseja converter um resultado numérico obtido em unidades usuais nos Estados Unidos em unidades do SI ou vice-versa. Como a unidade de tempo é a mesma em ambos os sistemas, apenas duas unidades cinéticas básicas precisam ser convertidas. Logo, como todas as outras unidades cinéticas podem ser derivadas das unidades básicas, é preciso lembrar apenas dois fatores de conversão.

Unidades de comprimento. Por definição, a unidade de comprimento usual nos Estados Unidos é:

$$1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m} \quad (1.8)$$

Segue-se que

$$1 \text{ mi} = 5.280 \text{ ft} = 5.280(0,3048 \text{ m}) = 1.609 \text{ m}$$

ou

$$1 \text{ mi} = 1.609 \text{ km} \quad (1.9)$$

Além disso,

$$1 \text{ in} = \frac{1}{12} \text{ ft} = \frac{1}{12} (0,3048 \text{ m}) = 0,0254 \text{ m}$$

ou

$$1 \text{ in} = 25,4 \text{ mm} \quad (1.10)$$

Unidades de força. Lembrando que a unidade de força usual nos Estados Unidos (a libra) é definida como sendo o peso da libra padrão

(de massa 0,4536 kg) no nível do mar e a uma latitude de 45° (onde $g = 9,807 \text{ m/s}^2$), e aplicando a Eq. (1.4), escrevemos

$$W = mg$$

$$1 \text{ lb} = (0,4536 \text{ kg})(9,807 \text{ m/s}^2) = 4,448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

ou, considerando a Eq. (1.5)

$$1 \text{ lb} = 4,448 \text{ N} \quad (1.11)$$

Unidades de massa. A unidade de massa usual nos Estados Unidos (slug) é uma unidade derivada. Logo, aplicando as Eqs. (1.6), (1.8) e (1.11), temos:

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = \frac{4,448 \text{ N}}{0,3048 \text{ m/s}^2} = 14,59 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

ou, Eq. (1.5)

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14,59 \text{ kg} \quad (1.12)$$

Embora não se possa usá-la como uma unidade consistente de massa, lembremos que a massa da libra padrão é, por definição,

$$1 \text{ libra massa} = 0,4536 \text{ kg} \quad (1.13)$$

Essa constante pode ser usada para se determinar a massa em unidades do SI (quilogramas) de um corpo que foi caracterizado pelo seu peso em unidades usuais nos EUA (libras).

Para se converter uma unidade derivada usual nos Estados Unidos em unidades do SI, deve-se simplesmente multiplicar ou dividir tal unidade pelos fatores de conversão apropriados. Por exemplo, para converter o momento de uma força, cujo valor é $M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in}$, em unidades do SI, usamos as fórmulas (1.10) e (1.11) e temos:

$$M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in} = 47(4,448 \text{ N})(25,4 \text{ mm})$$

$$= 5310 \text{ N} \cdot \text{mm} = 5,31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Os fatores de conversão dados nesta seção também podem ser usados para se converter um resultado numérico obtido em unidades do SI em unidades usuais nos Estados Unidos. Por exemplo, se o momento de uma força é $M = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$, seguindo o procedimento adotado no último parágrafo da Seção 1.3 escrevemos:

$$M = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = (40 \text{ N} \cdot \text{m}) \left(\frac{1 \text{ lb}}{4,448 \text{ N}} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{0,3048 \text{ m}} \right)$$

Efetando os cálculos numéricos e cancelando as unidades que aparecem tanto no numerador como no denominador, obtemos:

$$M = 29,5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

As unidades usuais nos Estados Unidos utilizadas com maior frequência em mecânica estão listadas na Tabela 1.3 com suas equivalentes no SI.

Tabela 1.3 As unidades usuais nos EUA e as equivalentes no SI

Grandeza	Unidade usual nos EUA	Equivalente no SI
Aceleração	ft/s ²	0,3048 m/s ²
	in/s ²	0,0254 m/s ²
Área	ft ²	0,0929 m ²
	in ²	645,2 mm ²
Energia	ft · lb	1,356 J
Força	kip	4,448 kN
	lb	4,448 N
	oz	0,2780 N
Impulso	lb · s	4,448 N · s
Comprimento	ft	0,3048 m
	in	25,40 mm
	mi	1,609 km
Massa	6 massa oz	28,35 g
	massa lb	0,4536 kg
	slug	14,59 kg
	ton	907,2 kg
Momento de uma força	lb · ft	1,356 N · m
	lb · in	0,1130 N · m
Momento de inércia		
	De uma área	in ⁴ ·
De uma massa	lb · ft + s ²	0,4162 × 10 ⁶ mm ⁴
		1,356 kg · m ²
Quantidade de movimento	lb · s	4,448 kg · m/s
Potência	ft · lb/s	1,356 W
	hp	745,7 W
Pressão ou tensão	lb/ft ²	47,88 Pa
	lb/in ² (psi)	6,895 kPa
Velocidade	ft/s	0,3048 m/s
	in/s	0,0254 m/s
	mi/h (mph)	0,4470 m/s
	mi/h (mph)	1,609 km/h
Volume	ft ³	0,02832 m ³
	in ³	16,39 cm ³
Líquidos	gal	3,785 L
	qt	0,9464 L
Trabalho	ft · lb	1,356 J

1.5 Método de resolução de problemas

Você deve abordar um problema de mecânica como se fosse abordar uma situação real de engenharia. Argumentando com base em sua própria experiência e intuição, você achará mais fácil entender e formular o problema. Todavia, uma vez enunciado claramente o problema, não haverá lugar em sua solução para preferências particulares. *A solução deve se basear nos seis princípios fundamentais estabelecidos na Seção 1.2 ou em teoremas deduzidos a partir deles.* Cada passo dado deve ser justificado nessa base. Devemos seguir regras estritas, que conduzam à solução de maneira quase automática, não deixando espaço para a intuição ou o “sentimento”. Após obter uma resposta, esta deverá ser conferida. Aqui, você poderá novamente apelar para o bom senso e a experiência pessoal. Se não estiver inteiramente satisfeito com o resultado obtido, você deverá conferir sua formulação do problema, a validade dos métodos empregados para solucioná-lo e a precisão dos cálculos.

O *enunciado* de um problema deve ser claro e preciso. Deve conter os dados e indicar a informação pedida. Deve-se incluir um desenho claro mostrando todas as grandezas envolvidas. Diagramas separados devem ser desenhados para todos os corpos envolvidos, indicando claramente as forças

que atuam em cada corpo. Esses diagramas são conhecidos como *diagramas de corpo livre* e estão descritos detalhadamente nas Seções 2.11 e 4.2.

Os *princípios fundamentais* da mecânica listados na Seção 1.2 *serão usados para formularmos equações* que expressem as condições de repouso ou de movimento dos corpos considerados. Cada equação deve ser claramente relacionada a um dos diagramas de corpo livre. Em seguida, você prosseguirá com a resolução do problema, observando estritamente as regras usuais de álgebra e registrando com clareza os vários passos realizados.

Uma vez obtida, a resposta deve ser *cuidadosamente conferida*. Erros de *raciocínio* podem ser facilmente detectados pela verificação das unidades. Por exemplo, para determinar o momento de uma força de 50 N em relação a um ponto a 0,60 m de sua linha de ação, podemos escrever (Seção 3.12)

$$M = Fd = (50 \text{ N})(0,60 \text{ m}) = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A unidade $\text{N} \cdot \text{m}$ obtida multiplicando-se newtons por metros é a unidade correta para o momento de uma força; se fosse obtida outra unidade, saberíamos que algum erro foi cometido.

Erros de *cálculo* geralmente podem ser detectados substituindo-se os valores numéricos obtidos em uma equação que ainda não foi usada e se a equação é satisfeita. É importante enfatizar a importância dos cálculos corretos em engenharia.

1.6 Precisão numérica

A precisão da solução de um problema depende de dois itens: (1) a precisão dos dados e (2) a precisão dos cálculos efetuados.

A solução não pode ser mais precisa que o menos preciso desses dois itens. Por exemplo, se o carregamento de uma ponte é conhecido como sendo 300.000 N com um possível erro de 400 N, o erro relativo que mede o grau de precisão dos dados é:

$$\frac{400 \text{ N}}{300.000 \text{ N}} = 0,0013 = 0,13\%$$

Ao se calcular a reação em um dos apoios da ponte, não fará sentido registrá-la como 57.288 N. A precisão da solução não pode ser maior que 0,13%, não importa quão precisos sejam os cálculos, e o possível erro na resposta pode ser de até $(0,13/100)(57.288 \text{ N}) \cong 75 \text{ N}$. A resposta deve ser registrada apropriadamente como $57.288 \pm 75 \text{ N}$.

Em problemas de engenharia, os dados raramente têm precisão maior que 0,2%. Logo, raramente se justifica escrever as respostas para tais problemas com uma precisão maior que 0,2%. Uma regra prática é usar 4 algarismos significativos para registrar números que começam com “1” e 3 algarismos significativos em todos os outros casos. A menos que seja indicado diferentemente admitiremos que os dados de um problema terão um mesmo grau de precisão. Por exemplo, uma força de 40 N deve ser lida como 40,0 N e uma força de 15 N deve ser lida como 15,00 N.

As calculadoras eletrônicas de bolso tão utilizadas por engenheiros e estudantes de engenharia facilitam os cálculos numéricos na resolução de muitos problemas por sua velocidade e precisão. No entanto, os estudantes não devem registrar algarismos significativos além do justificável simplesmente porque estes são fáceis de obter. Como já observado, uma precisão maior que 0,2% raramente é necessária ou significativa na solução de problemas práticos de engenharia.

Muitos problemas de engenharia podem ser resolvidos considerando o equilíbrio de “partículas”. No caso desta escavadeira, que está sendo transportada para o navio, a relação entre as tensões nos vários cabos envolvidos pode ser obtida considerando o equilíbrio do gancho no qual os cabos estão presos.



CAPÍTULO

Estática de partículas



2 Estática de partículas

- 2.1 Introdução
- 2.2 Força sobre uma partícula e resultante de duas forças
- 2.3 Vetores
- 2.4 Adição de vetores
- 2.5 Resultante de várias forças concorrentes
- 2.6 Decomposição dos componentes de uma força
- 2.7 Componentes retangulares de uma força e vetores unitários
- 2.8 Adição de forças pela soma dos componentes x e y
- 2.9 Equilíbrio de uma partícula
- 2.10 Primeira lei de Newton do movimento
- 2.11 Problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula e diagramas de corpo livre
- 2.12 Componentes retangulares de uma força no espaço
- 2.13 Força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação
- 2.14 Adição de forças concorrentes no espaço
- 2.15 Equilíbrio de uma partícula no espaço

2.1 Introdução

Neste capítulo você estudará o efeito de forças que atuam sobre partículas. Primeiro aprenderá como substituir duas ou mais forças que atuam sobre uma dada partícula por uma única força que tenha o mesmo efeito que as forças originais. Essa única força equivalente é a *resultante* das forças originais que atuam sobre a partícula. Depois, as relações que existem entre as várias forças que atuam sobre a partícula em estado de *equilíbrio* serão deduzidas e usadas para se determinarem algumas das forças atuantes sobre a partícula.

O uso da palavra “partícula” não implica que nosso estudo será limitado a pequenos corpos. Significa que o tamanho e o formato dos corpos em consideração não afetarão significativamente a resolução dos problemas tratados neste capítulo e que todas as forças que atuem sobre um dado corpo serão consideradas em um mesmo ponto de aplicação. Como tal hipótese é verificada em muitas aplicações práticas, neste capítulo você ficará habilitado a resolver diversos problemas de engenharia.

A primeira parte do capítulo é dedicada ao estudo de forças contidas em um único plano; a segunda parte, à análise de forças em espaço tridimensional.

FORÇAS NO PLANO

2.2 Força sobre uma partícula e resultante de duas forças

Uma força representa a ação de um corpo sobre outro e geralmente é caracterizada por seu *ponto de aplicação*, sua *intensidade*, sua *direção* e seu *sentido*. Forças que atuam sobre uma dada partícula, no entanto, têm o mesmo ponto de aplicação. Cada força considerada neste capítulo será, então, completamente definida por sua intensidade, sua direção e seu sentido.

A intensidade de uma força é caracterizada por um certo número de unidades. Como indicamos no Cap. 1, as unidades do SI usadas por engenheiros para medir a intensidade de uma força são o newton (N) e seu múltiplo, o quilonewton (kN), igual a 1.000 N. A direção de uma força é definida pela *linha de ação* e o *sentido* da força. A linha de ação é a linha reta infinita ao longo da qual a força atua; caracteriza-se pelo ângulo que ela forma com algum eixo fixo (Fig. 2.1). A força propriamente dita é representada por um segmento dessa linha; por meio do uso de

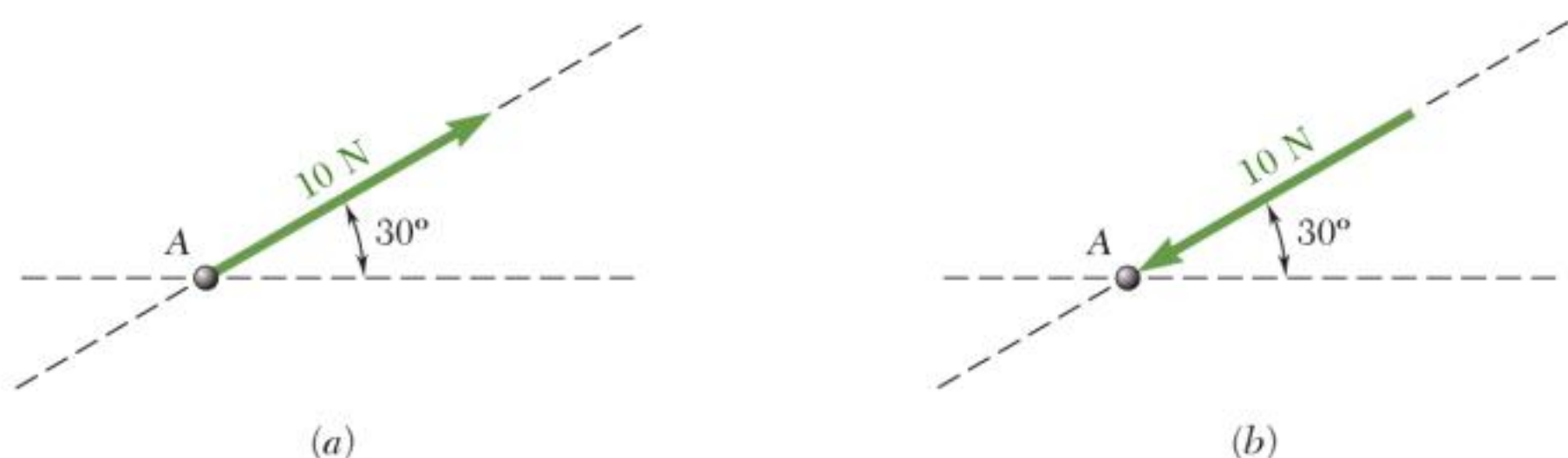


Figura 2.1

uma escala apropriada, pode-se escolher o comprimento desse segmento para representar a intensidade da força. Por fim, o sentido da força deve ser indicado por uma ponta de seta. É importante, na definição de uma força, a indicação de seu sentido. Duas forças que tenham a mesma intensidade e a mesma linha de ação, mas sentidos diferentes, tais como as forças mostradas na Fig. 2.1a e b, terão efeitos diretamente opostos sobre uma partícula.

Constata-se experimentalmente que duas forças \mathbf{P} e \mathbf{Q} que atuam sobre uma partícula A (Fig. 2.2a) podem ser substituídas por uma única força \mathbf{R} que tem o mesmo efeito sobre essa partícula (Fig. 2.2c). Essa força é chamada de *resultante* das forças \mathbf{P} e \mathbf{Q} e pode ser obtida, como mostra a Fig. 2.2b, pela construção de um paralelogramo, usando-se \mathbf{P} e \mathbf{Q} como dois lados adjacentes desse paralelogramo. A *diagonal que passa por A* representa a *resultante*. Esse método, de encontrar a resultante, é denominado *lei do paralelogramo* para a adição de duas forças. Essa lei é baseada em evidência experimental: não pode ser provada ou deduzida matematicamente.

2.3 Vetores

Observa-se, pelo descrito anteriormente, que forças não obedecem às regras de adição definidas na álgebra ou aritmética comuns. Por exemplo, duas forças que atuam em um ângulo reto entre si, uma de 4 N e a outra de 3 N, somadas resultam em uma força de 5 N, e não em uma força de 7 N. Forças não são as únicas quantidades que seguem a lei do paralelogramo para adição. Como você verá mais adiante, *deslocamentos*, *velocidades*, *acelerações* e *quantidades de movimento* são outros exemplos de quantidades físicas que têm intensidade, direção e sentido e que são somadas de acordo com a lei do paralelogramo. Todas essas quantidades podem ser representadas matematicamente por vetores, enquanto aquelas quantidades físicas que têm intensidade, mas não direção, tais como *volume*, *massa* ou *energia*, são representadas por números simples ou *escalares*.

Vetores são definidos como *expressões matemáticas que têm intensidade, direção e sentido, que se somam de acordo com a lei do paralelogramo*. Vetores são representados por setas nas figuras e serão distinguidos dos escalares neste texto pelo uso de negrito (\mathbf{P}). De forma manuscrita, um vetor pode ser expresso pelo desenho de uma pequena seta acima da letra usada para representá-lo (\vec{P}) ou sublinhando-se essa letra (\underline{P}). A intensidade do vetor define o comprimento da seta usada para representá-lo. Neste texto, a fonte em itálico será usada para denotar a intensidade de um vetor. Assim, a intensidade de um vetor \mathbf{P} será representada por P .

Um vetor usado para representar uma força que atua sobre uma dada partícula tem um ponto de aplicação bem definido, a saber, a partícula propriamente dita. Diz-se que tal vetor é *fixo*, ou *ligado*, e não pode ser deslocado sem que se modifiquem as condições do problema. Outras quantidades físicas, entretanto, como momentos e binários (ver Cap. 3), são representadas por vetores que podem se mover livremente no espaço são denominados vetores *livres*. Ainda outras quantidades, como forças atuantes sobre um corpo rígido (ver Cap. 3), são representadas por veto-

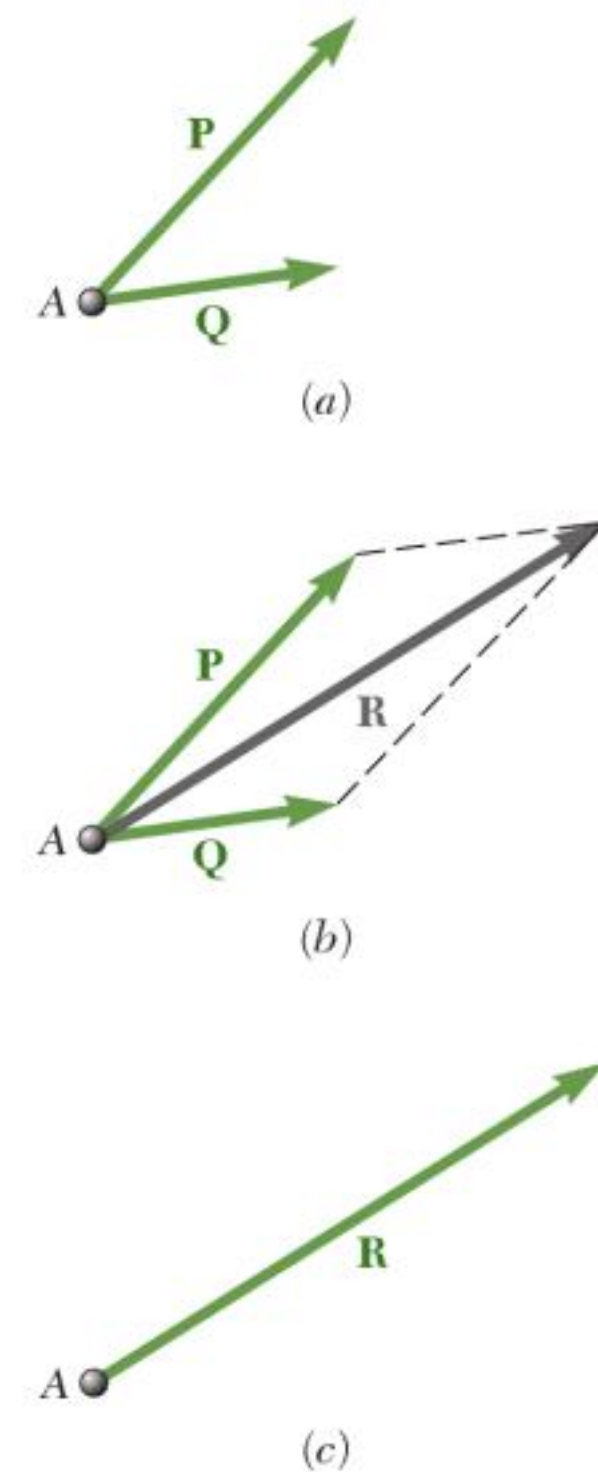


Figura 2.2

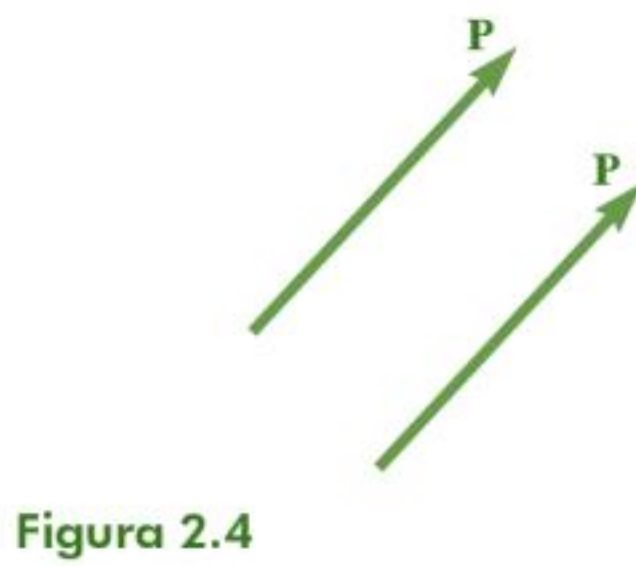


Figura 2.4

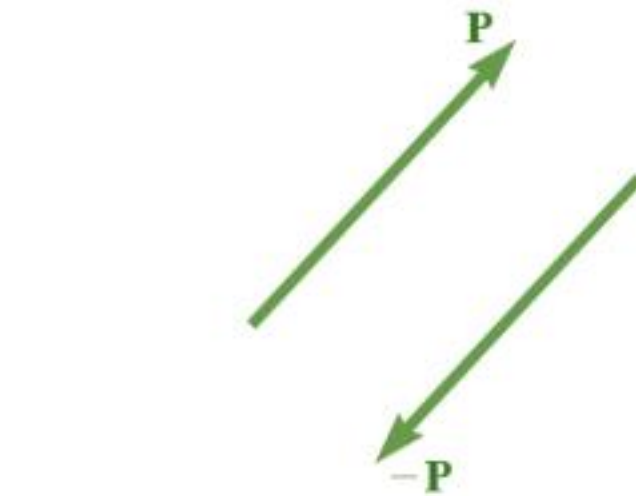


Figura 2.5

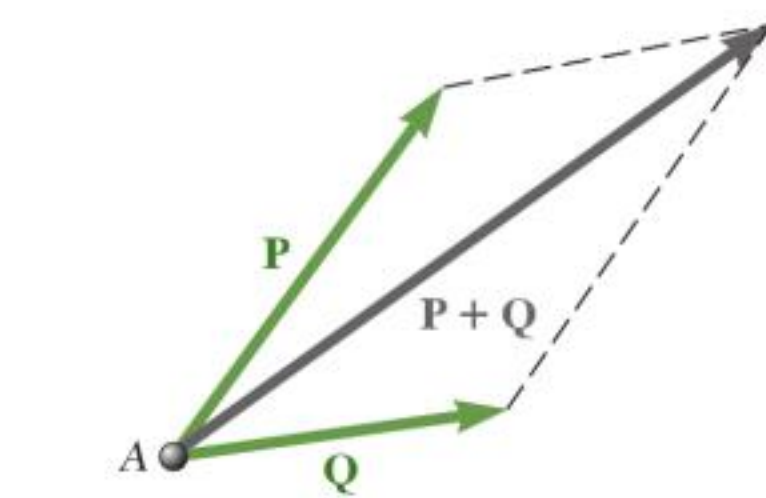


Figura 2.6

res que podem ser deslocados, ou deslizados, ao longo de suas linhas de ação, denominados vetores *deslizantes*.*

Dois vetores que têm a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido são considerados *iguais*, independente de terem ou não o mesmo ponto de aplicação (Fig. 2.4); vetores iguais podem ser representados pela mesma letra.

O *vetor oposto* de um dado vetor **P** é definido como um vetor que tem a mesma intensidade e a mesma direção de **P** e um sentido oposto ao de **P** (Fig. 2.5); o oposto de um vetor **P** é denotado por $-\mathbf{P}$. Os vetores **P** e $-\mathbf{P}$ são geralmente referidos como vetores *iguais e opostos*. Temos então:

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

2.4 Adição de vetores

Vimos na seção anterior que, por definição, vetores se somam de acordo com a lei do paralelogramo. Portanto, a soma de dois vetores **P** e **Q** é obtida aplicando-se os dois vetores no mesmo ponto A e construindo-se o paralelogramo, usando **P** e **Q** como dois lados do paralelogramo (Fig. 2.6). A diagonal que passa por A representa a soma dos vetores **P** e **Q**, e essa soma é representada por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. O fato de o sinal + ser usado para representar tanto as adições de vetores como as de escalares não deve causar confusão, se as quantidades vetoriais e escalares forem sempre cuidadosamente distinguidas. Portanto, devemos notar que a intensidade do vetor $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ *não é*, geralmente, igual à soma $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ das intensidades dos vetores **P** e **Q**.

* Algumas expressões têm intensidade, direção e sentido, mas não se somam de acordo com a lei do paralelogramo. Embora possam ser representadas por setas, essas expressões *não* podem ser consideradas vetores.

Um grupo dessas expressões é o de rotações finitas de um corpo rígido. Coloque um livro fechado sobre uma mesa à sua frente, de modo que fique em posição de leitura, com a capa para cima e a lombada para a esquerda. Agora gire o livro 180° em torno de um eixo paralelo à lombada (Fig. 2.3a); essa rotação pode ser representada por uma seta de comprimento igual a 180 unidades e orientada tal como mostra a figura. Pegando o livro nessa nova posição, gire-o agora 180° em torno de um eixo perpendicular à lombada (Fig. 2.3b); essa segunda rotação pode ser representada por uma seta de 180 unidades de comprimento e orientada tal como mostra a figura. Mas o livro poderia ter sido colocado nessa posição final por meio de uma rotação única de 180° em torno de um eixo vertical (Fig. 2.3c). Concluímos que a soma das duas rotações de 180° representadas pelas setas direcionadas respectivamente ao longo dos eixos z e x é uma rotação de 180° representada por uma seta direcionada ao longo do eixo y (Fig. 2.3d). Obviamente, as rotações finitas de um corpo rígido *não* obedecem à lei do paralelogramo para adição; em consequência, *não* podem ser representadas por vetores.

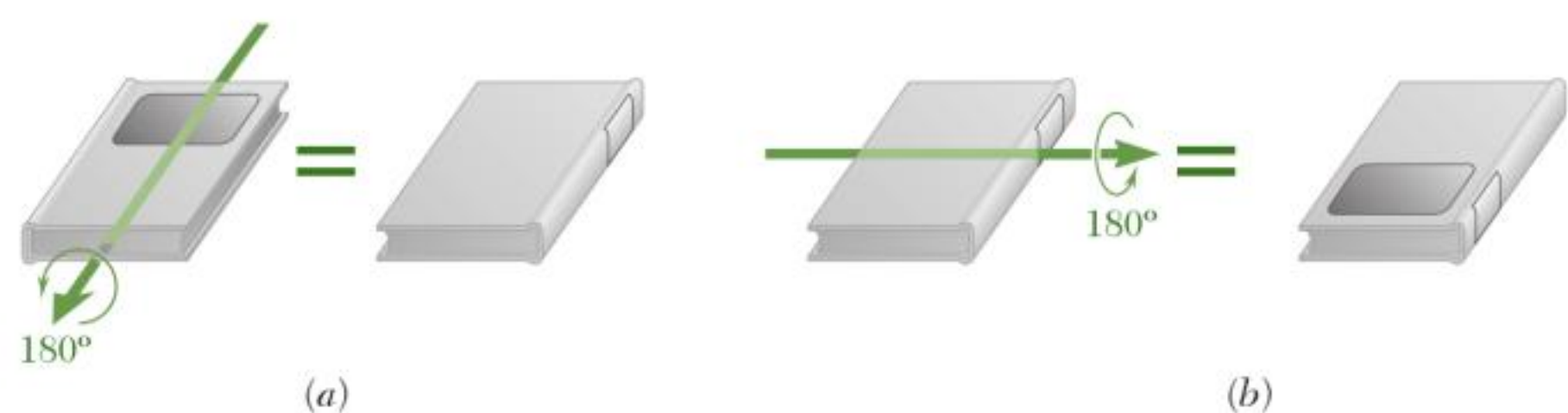


Figura 2.3 Rotações finitas de um corpo rígido.

Como o paralelogramo construído com os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} não depende da ordem em que \mathbf{P} e \mathbf{Q} são selecionados, concluímos que a adição de dois vetores é *comutativa*, dada por:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \quad (2.1)$$

Da lei do paralelogramo, podemos deduzir um outro método para se determinar a soma de dois vetores. Esse método, conhecido como a *regra do triângulo*, é apresentado a seguir. Considere a Fig. 2.6, na qual a soma dos vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} foi determinada pela lei do paralelogramo. Como o lado do paralelogramo oposto a \mathbf{Q} é igual a \mathbf{Q} em intensidade e direção, podemos desenhar apenas metade do paralelogramo (Fig. 2.7a). A soma dos dois vetores pode, portanto, ser determinada *dispondo-se \mathbf{P} e \mathbf{Q} no padrão ponta-a-cauda** e, em seguida, unindo-se a cauda de \mathbf{P} à ponta de \mathbf{Q} . Na Fig. 2.7b, é considerada a outra metade do paralelogramo, e obtém-se o mesmo resultado. Isso confirma o fato de que a adição de vetores é comutativa.

A *subtração* de um vetor é definida pela adição do vetor oposto correspondente. Portanto, o vetor $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$, que representa a diferença entre os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} , é obtido adicionando-se a \mathbf{P} o vetor oposto $-\mathbf{Q}$ (Fig. 2.8). Temos:

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \quad (2.2)$$

Aqui novamente devemos observar que, embora seja usado o mesmo sinal para denotar a subtração vetorial e a escalar, serão evitadas confusões se forem tomados cuidados para se distinguir entre quantidades escalares e vetoriais.

Vamos agora considerar a *soma de três ou mais vetores*. A soma de três vetores \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{S} será, *por definição*, obtida primeiro somando-se os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} , e depois adicionando-se o vetor \mathbf{S} ao vetor $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. Temos, portanto,

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \quad (2.3)$$

De modo semelhante, a soma de quatro vetores será obtida adicionando-se o quarto vetor à soma dos três primeiros. Segue-se que a soma de qualquer número de vetores pode ser obtida aplicando-se repetidamente a lei do paralelogramo a pares sucessivos de vetores até que todos os vetores dados tenham sido substituídos por um único vetor.

* O padrão ponta-a-cauda significa posicionar dois vetores de modo a unir a ponta (final) do primeiro vetor à cauda (origem) do segundo vetor.

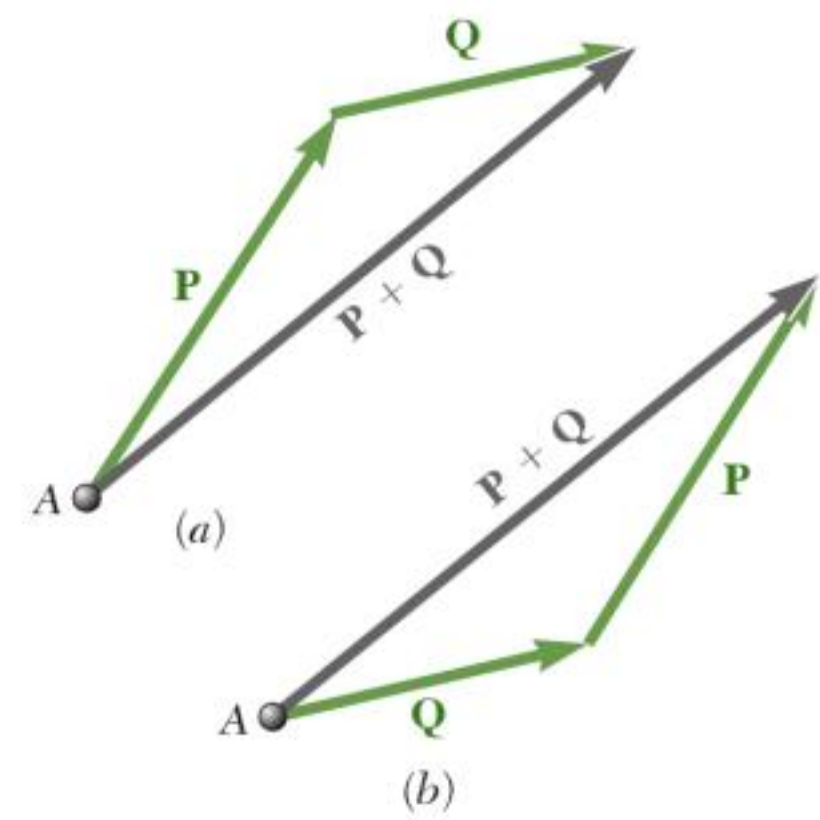


Figura 2.7

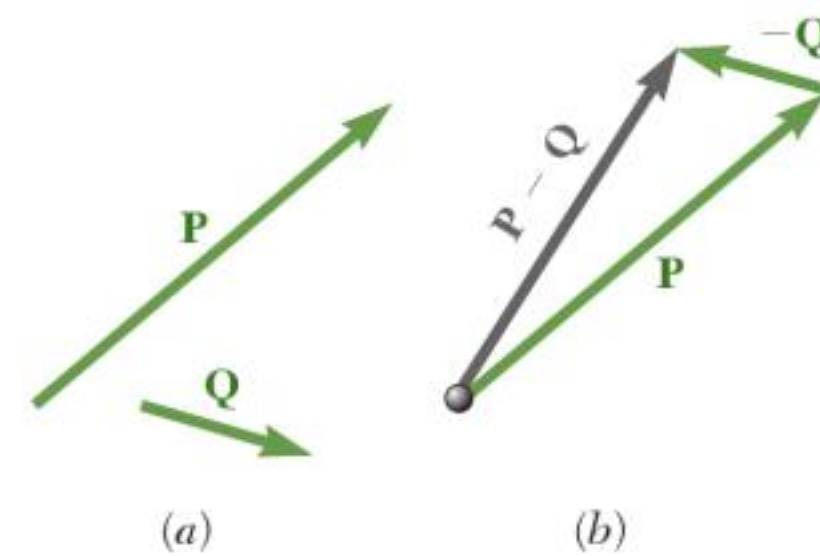
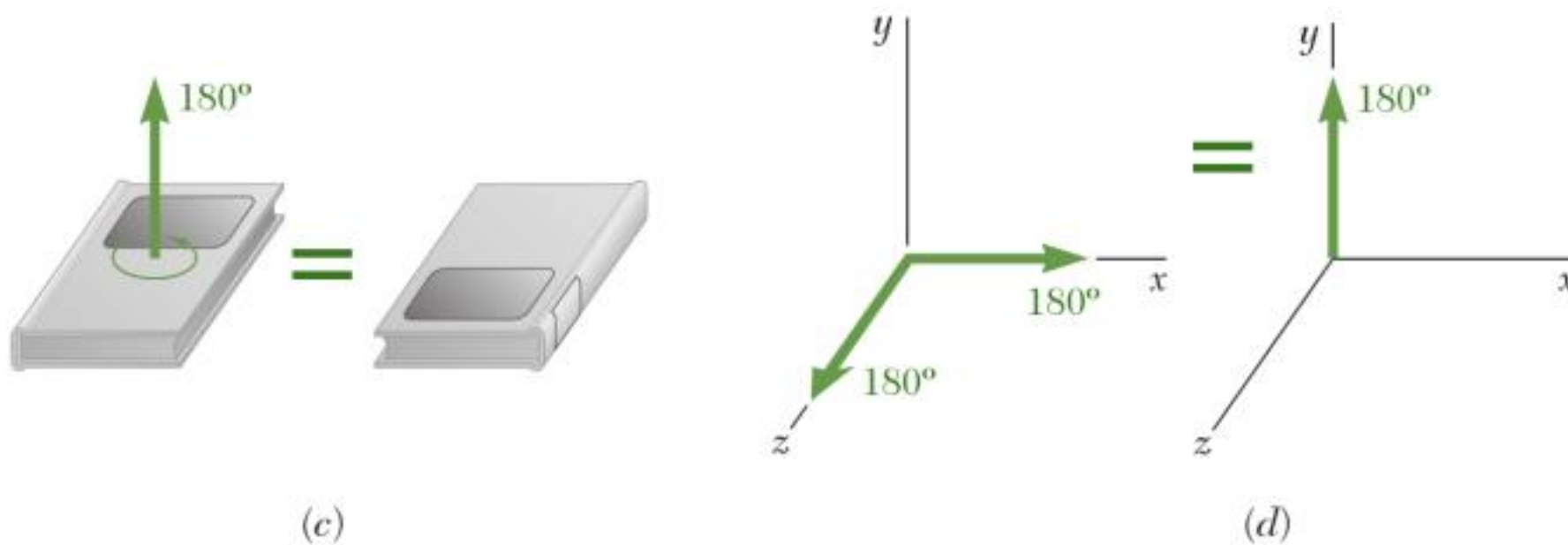


Figura 2.8



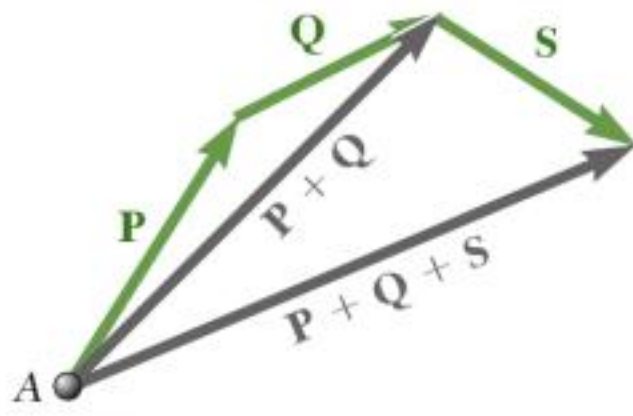


Figura 2.9

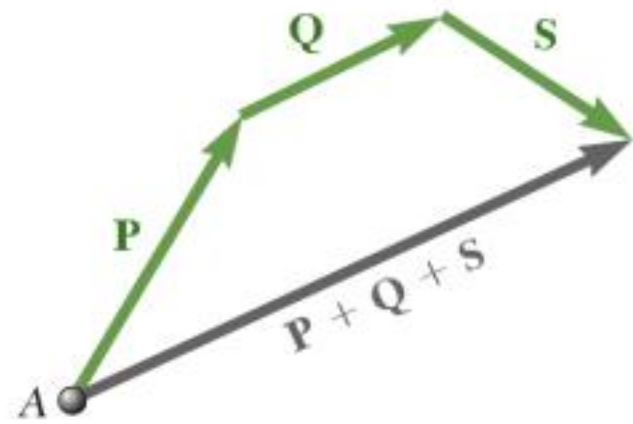


Figura 2.10

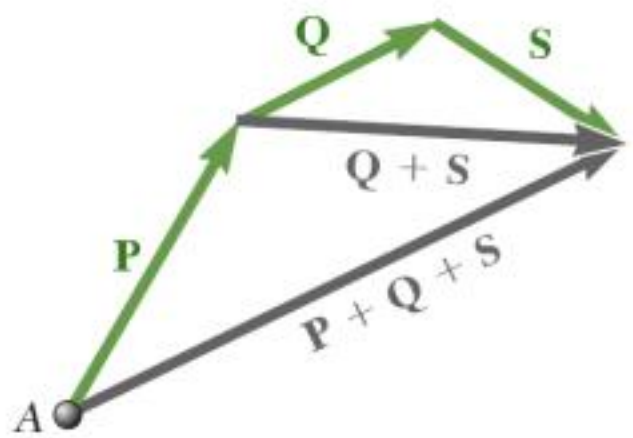


Figura 2.11

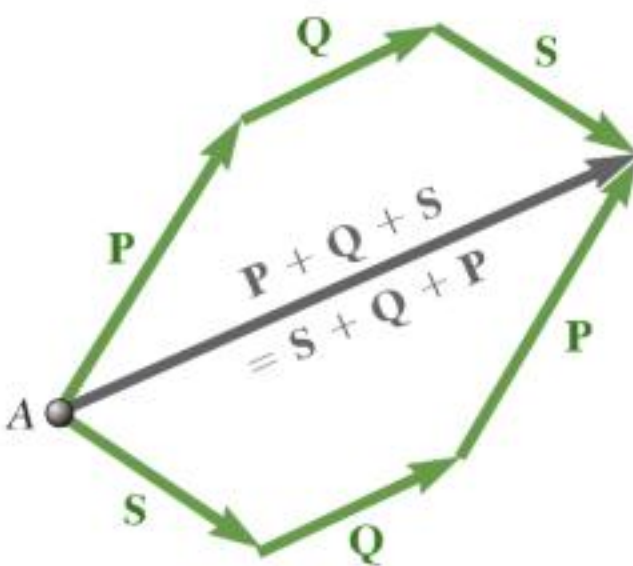


Figura 2.12

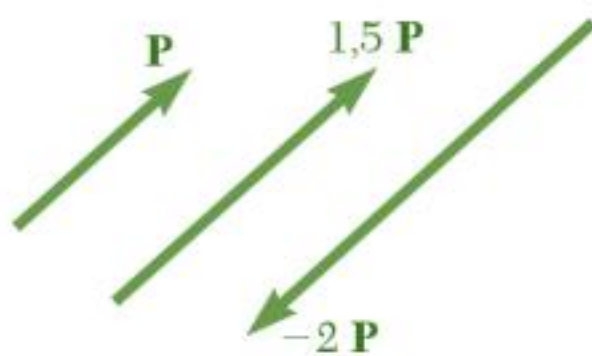


Figura 2.13

Se os vetores dados são *coplanares*, ou seja, se eles estão contidos no mesmo plano, será fácil obter a sua soma graficamente. Nesse caso, a aplicação sucessiva da regra do triângulo é preferível à aplicação da lei do paralelogramo. Na Fig. 2.9, a soma de três vetores \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{S} foi obtida dessa maneira. A regra do triângulo foi primeiro aplicada para se obter a soma $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ dos vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} , e aplicada novamente para se obter a soma dos vetores $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ e \mathbf{S} . A determinação do vetor $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$, no entanto, poderia ter sido omitida, e a soma dos três vetores obtida diretamente, como mostra a Fig. 2.10, *dispondo-se os vetores dados no padrão ponta-a-cauda e unindo-se a cauda do primeiro vetor à ponta do último*. Esse procedimento é conhecido como *regra do polígono* para adição de vetores.

Observamos que o resultado obtido teria sido o mesmo se, como mostra a Fig. 2.11, os vetores \mathbf{Q} e \mathbf{S} tivessem sido substituídos pela soma $\mathbf{Q} + \mathbf{S}$. Portanto, podemos escrever:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \quad (2.4)$$

o que expressa o fato de que a adição de vetores é *associativa*. Lembrando que também foi mostrado que a adição de vetores, no caso de dois vetores, é comutativa, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Essa expressão, assim como outras que poderiam ser obtidas da mesma maneira, mostra que a ordem em que vários vetores são adicionados é irrelevante (Fig. 2.12).

Produto de um escalar por um vetor. Como é conveniente representar a soma $\mathbf{P} + \mathbf{P}$ por $2\mathbf{P}$, a soma $\mathbf{P} + \mathbf{P} + \mathbf{P}$ por $3\mathbf{P}$ e, em geral, a soma de n vetores iguais \mathbf{P} pelo produto $n\mathbf{P}$, definiremos o produto $n\mathbf{P}$ de um inteiro positivo n por um vetor \mathbf{P} como um vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido que \mathbf{P} e a intensidade $n\mathbf{P}$. Estendendo essa definição para incluir todos os escalares, e lembrando a definição de vetor oposto dada na Seção 2.3, definiremos o produto $k\mathbf{P}$ de um escalar k por um vetor \mathbf{P} como um vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido que \mathbf{P} (se k for positivo), ou a mesma direção e sentido oposto ao de \mathbf{P} (se k for negativo), e uma intensidade igual ao produto de \mathbf{P} e do valor absoluto de k (Fig. 2.13).

2.5 Resultante de várias forças concorrentes

Considere uma partícula A sobre a qual atuam várias forças coplanares, isto é, várias forças contidas em um mesmo plano (Fig. 2.14a). Como as forças consideradas aqui passam todas por A , também são denominadas concorrentes. Os vetores que representam as forças que atuam sobre A podem ser adicionados pela regra do polígono (Fig. 2.14b). Como o uso da regra do polígono é equivalente à aplicação repetida da lei do paralelogramo, o vetor \mathbf{R} assim obtido representa a resultante das forças concorrentes dadas, ou seja, a força única que tem sobre a partícula A o mesmo

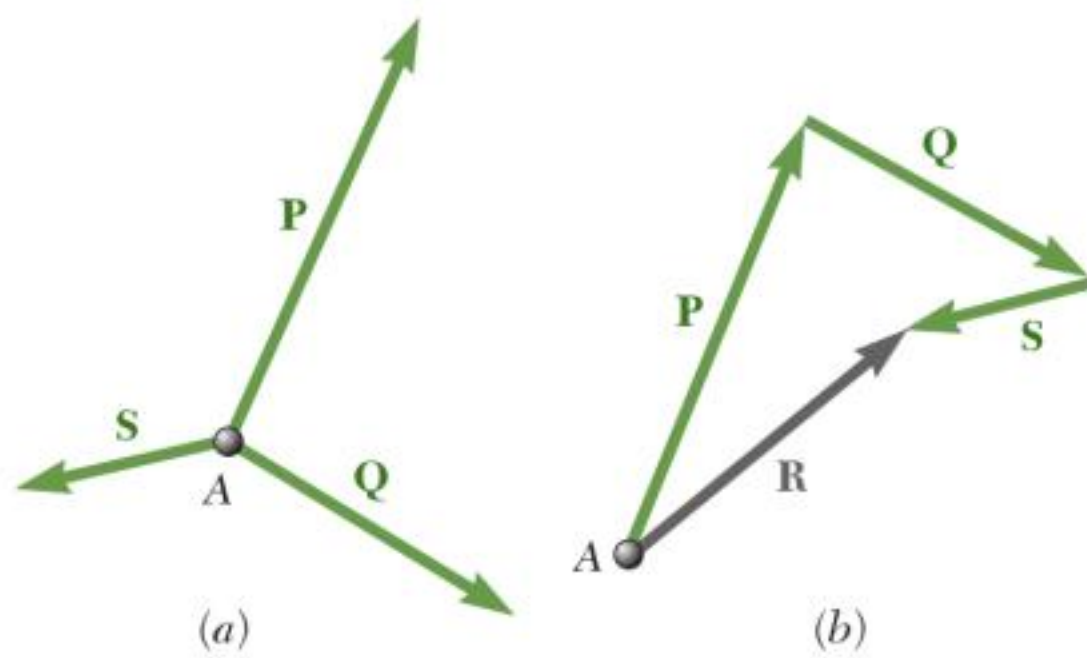


Figura 2.14

efeito que as forças originais dadas. Como indicamos acima, a ordem em que os vetores \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{S} , representando as forças dadas, são adicionados é irrelevante.

2.6 Decomposição dos componentes de uma força

Vimos que duas ou mais forças que atuam sobre uma partícula podem ser substituídas por uma força única que tem o mesmo efeito sobre a partícula. Reciprocamente, uma força única \mathbf{F} que atua sobre uma partícula pode ser substituída por duas ou mais forças que, juntas, têm o mesmo efeito sobre a partícula. Essas forças são chamadas de *componentes* da força original \mathbf{F} , e o processo de substituição de \mathbf{F} por estas componentes é denominado *decomposição dos componentes da força \mathbf{F}* .

Obviamente, para cada força \mathbf{F} existe um número infinito de possíveis conjuntos de componentes. Conjuntos de dois *componentes* \mathbf{P} e \mathbf{Q} são os mais importantes no que concerne a aplicações práticas. Mas, mesmo assim, o número de maneiras pelas quais uma dada força \mathbf{F} pode ser decomposta em dois componentes é ilimitado (Fig. 2.15). Dois casos são de particular interesse:

1. Um *dos dois componentes*, \mathbf{P} , é conhecido. O segundo componente, \mathbf{Q} , é obtido aplicando-se a regra do triângulo e unindo-se a ponta de \mathbf{P} à ponta de \mathbf{F} (Fig. 2.16); a intensidade, a direção e o sentido de \mathbf{Q} são determinadas graficamente ou por trigonometria. Uma vez que \mathbf{Q} tiver sido determinado, ambos os componentes \mathbf{P} e \mathbf{Q} devem ser aplicados em A .
2. A *linha de ação de cada componente* é conhecida. A intensidade e o sentido dos componentes são obtidos aplicando-se a lei do paralelogramo e traçando-se retas a partir da ponta de \mathbf{F} , paralelas às linhas de ação dadas (Fig. 2.17). Esse processo conduz a dois componentes bem definidos, \mathbf{P} e \mathbf{Q} , que podem ser determinados graficamente ou calculados trigonometricamente aplicando-se a lei dos senos.

Muitos outros casos podem ser encontrados; por exemplo, a direção de um componente pode ser conhecida, enquanto se deseja que a intensidade do outro componente seja tão pequena quanto possível (ver Problema Resolvido 2.2). Em todos os casos, o triângulo ou paralelogramo adequado que satisfaz as condições dadas é representado.

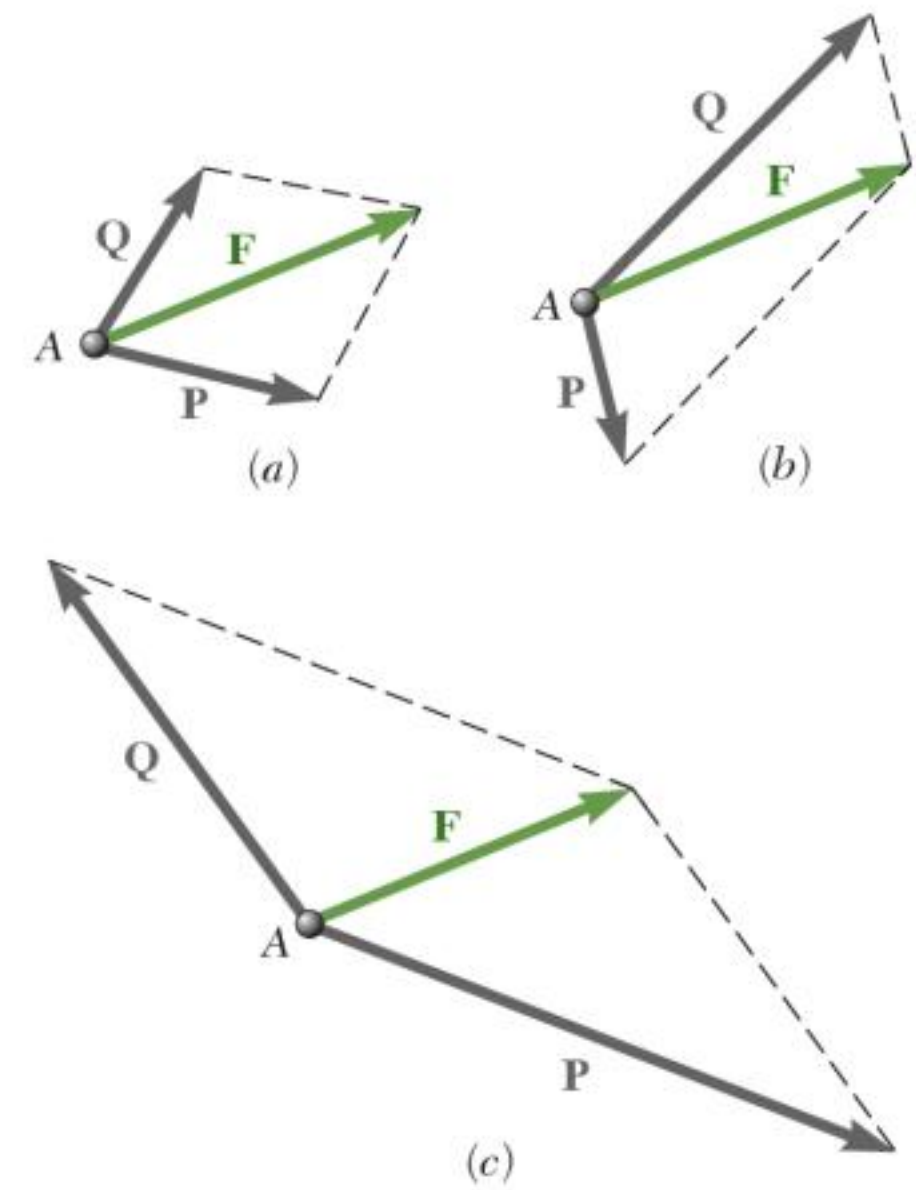


Figura 2.15

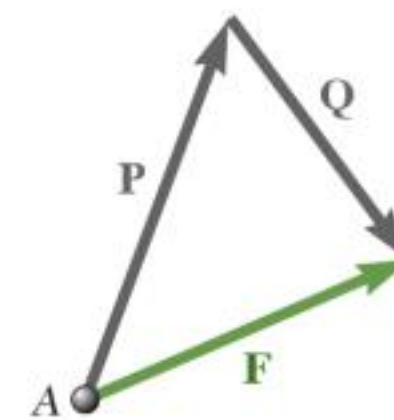


Figura 2.16

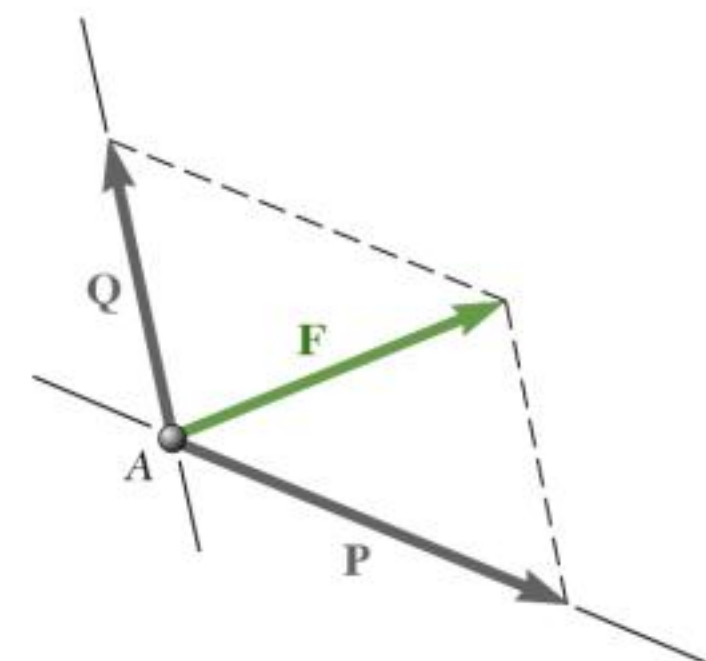
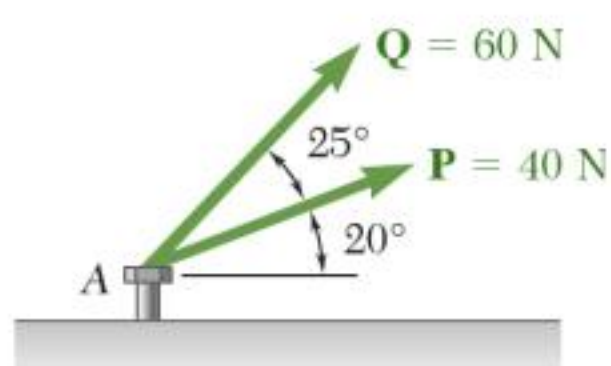


Figura 2.17



PROBLEMA RESOLVIDO 2.1

As duas forças **P** e **Q** atuam sobre um parafuso **A**. Determine sua resultante.

SOLUÇÃO

Solução gráfica. Um paralelogramo com lados iguais a **P** e **Q** é desenhado em escala. A intensidade e o ângulo que define a direção da resultante são medidos e os valores encontrados são:

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R = 98 \text{ N } \angle 35^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

Pode-se usar também a regra do triângulo. As forças **P** e **Q** são desenhadas no padrão ponta-a-cauda. Novamente, a intensidade e o ângulo que define a direção da resultante são medidos.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R = 98 \text{ N } \angle 35^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

Solução trigonométrica. A regra do triângulo é usada novamente; dois lados e o ângulo incluído são conhecidos. Aplicamos a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B \\ R^2 &= (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ \\ R &= 97,73 \text{ N} \end{aligned}$$

Agora, aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \quad \frac{\sin A}{60 \text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97,73 \text{ N}} \quad (1)$$

Resolvendo a Eq. (1) para $\sin A$, obtemos:

$$\sin A = \frac{(60 \text{ N}) \sin 155^\circ}{97,73 \text{ N}}$$

Usando uma calculadora, primeiro calculamos o quociente, em seguida seu arco seno, e obtemos:

$$A = 15,04^\circ \quad \alpha = 20^\circ + A = 35,04^\circ$$

Usamos 3 algarismos significativos para escrever a resposta (ver Seção 1.6):

$$\mathbf{R = 97,7 \text{ N } \angle 35,0^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

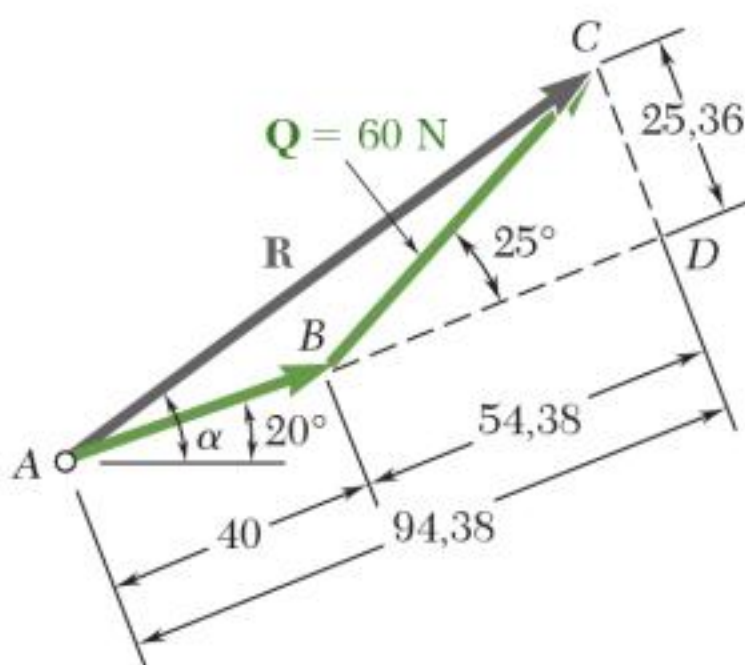
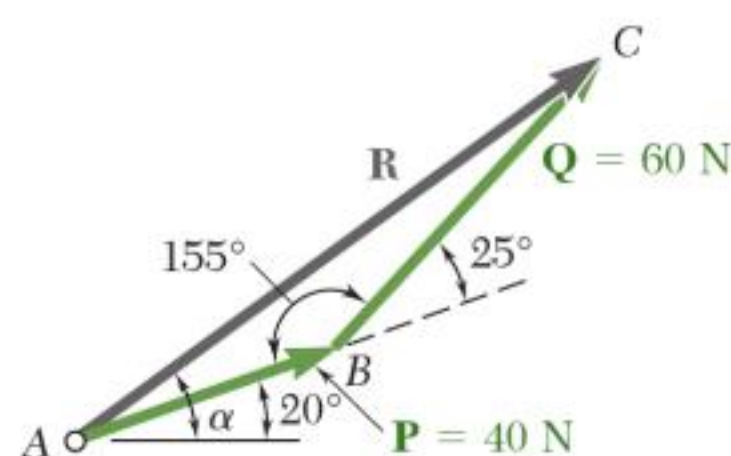
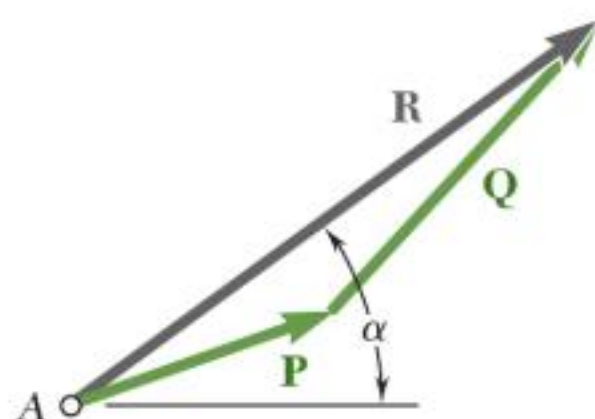
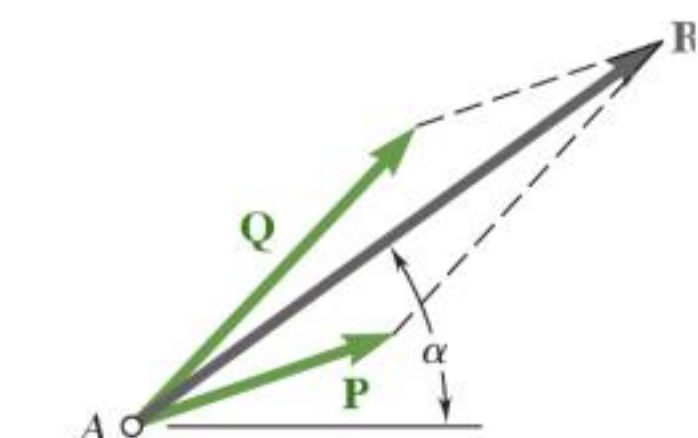
Solução trigonométrica alternativa. Construímos o triângulo retângulo **BCD** e calculamos:

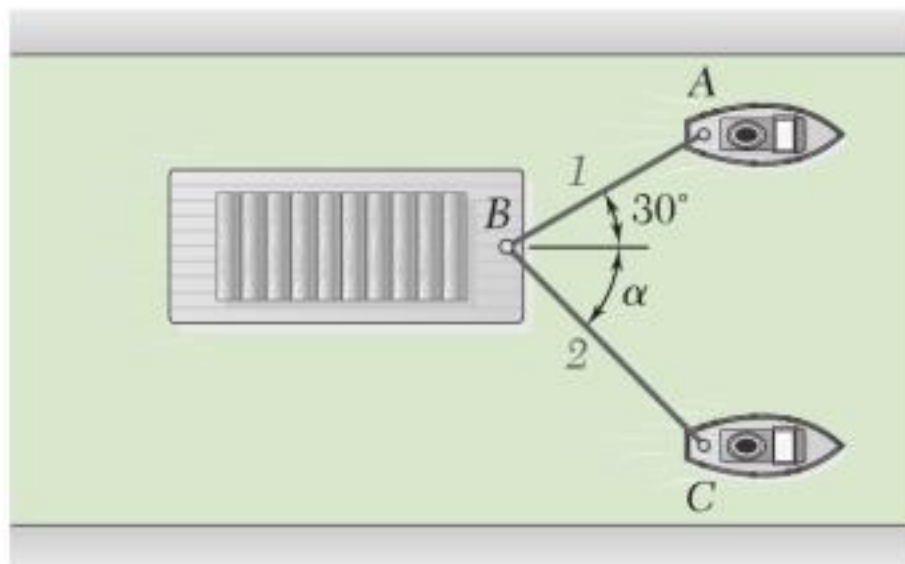
$$\begin{aligned} CD &= (60 \text{ N}) \sin 25^\circ = 25,36 \text{ N} \\ BD &= (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54,38 \text{ N} \end{aligned}$$

Em seguida, usando o triângulo **ACD**, obtemos:

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{25,36 \text{ N}}{94,38 \text{ N}} & A &= 15,04^\circ \\ R &= \frac{25,36}{\sin A} & R &= 97,73 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\text{Novamente,} \quad \alpha = 20^\circ + A = 35,04^\circ \quad \mathbf{R = 97,7 \text{ N } \angle 35,0^\circ} \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESOLVIDO 2.2

Uma barça é puxada por dois rebocadores. Se a resultante das forças exercidas pelos rebocadores é uma força de 22.250 N dirigida ao longo do eixo da barça, determine (a) a força de tração em cada um dos cabos, sabendo que $\alpha = 45^\circ$, (b) o valor de α para o qual a tração no cabo 2 seja mínima.

SOLUÇÃO

a. Tração para $\alpha = 45^\circ$. Solução gráfica. Aplica-se a lei do paralelogramo; a diagonal (resultante) é conhecida, igual a 22.250 N, e está dirigida para a direita. Os lados são desenhados paralelos aos cabos. Se o desenho for feito em escala, medimos:

$$T_1 = 16.200 \text{ N} \quad T_2 = 11.500 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Solução trigonométrica. Pode-se aplicar a regra do triângulo. Notamos que o triângulo mostrado representa metade do paralelogramo mostrado acima. Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{22.250 \text{ N}}{\sin 105^\circ}$$

Com uma calculadora, primeiro calculamos e armazenamos o valor do último quociente. Multiplicando esse valor sucessivamente por $\sin 45^\circ$ e $\sin 30^\circ$, obtemos:

$$T_1 = 16.288 \text{ N} \quad T_2 = 11.517 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

b. Valor de α para T_2 mínimo. Para determinar o valor de α para o qual a tração no cabo 2 é mínima, aplica-se novamente a regra do triângulo. No croqui mostrado, a linha $1-1'$ é a direção conhecida de T_1 . Várias direções possíveis de T_2 são mostradas pelas linhas $2-2'$. Observa-se que o valor mínimo de T_2 ocorre quando o T_1 e o T_2 são perpendiculares. O valor de T_2 é

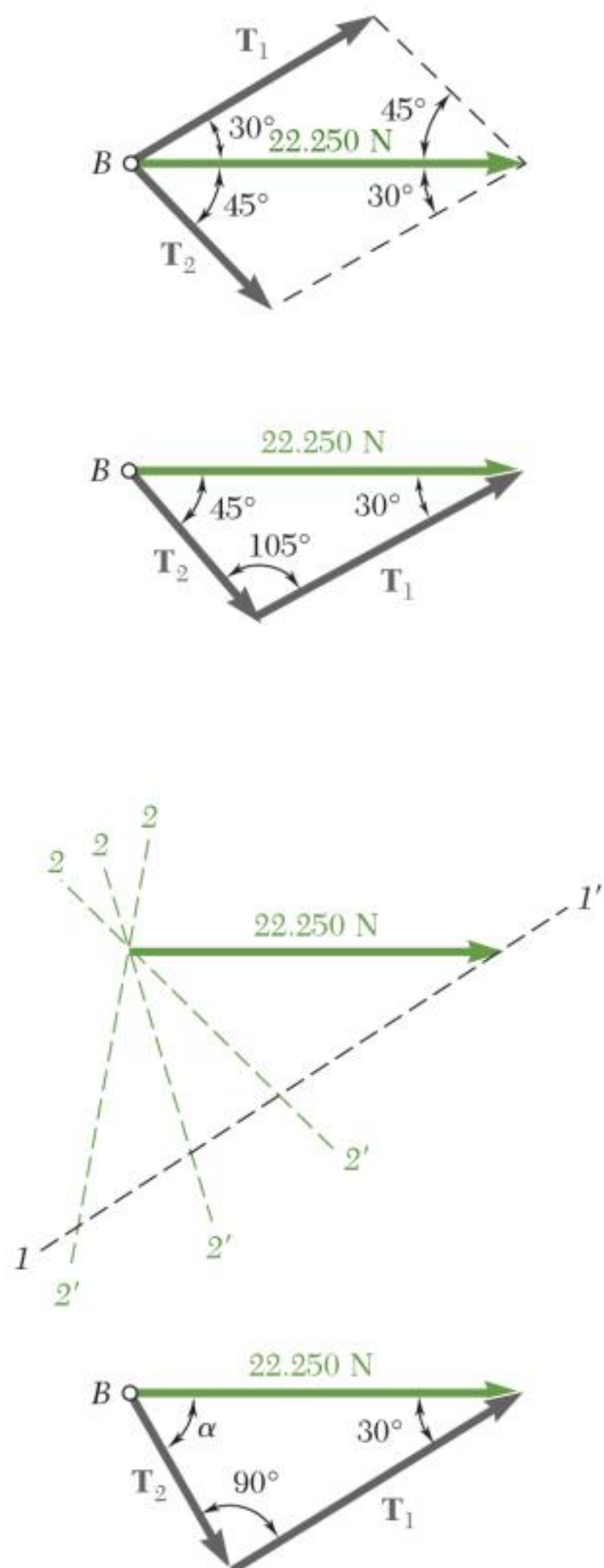
$$T_2 = (22.500 \text{ N}) \sin 30^\circ = 11.125 \text{ N}$$

Os valores correspondentes de T_1 e α são

$$T_1 = (22.500 \text{ N}) \cos 30^\circ = 19.269 \text{ N}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As seções anteriores foram dedicadas à introdução e à aplicação da *lei do paralelogramo* para a adição de vetores.

Apresentamos dois problemas resolvidos. No Problema 2.1, a lei do paralelogramo foi usada para determinar a resultante de duas forças de intensidade, direção e sentido conhecidas. Já no Problema 2.2, a lei foi usada para descobrir uma força dada em dois componentes de direção e sentido conhecidos.

Agora você vai ser solicitado a resolver problemas por conta própria. Alguns podem parecer com um dos problemas resolvidos; outros não. O que todos os problemas desta seção têm em comum é que podem ser solucionados pela aplicação direta da lei do paralelogramo.

A solução para um dado problema deve consistir nos seguintes passos:

1. Identifique quais das forças são as forças aplicadas e qual é a resultante. Frequentemente é útil escrever a equação vetorial que mostra como as forças estão relacionadas. Por exemplo, no Problema Resolvido 2.1 teríamos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Você deve ter em mente essa relação enquanto formula a próxima parte da sua solução.

2. Desenhe um paralelogramo tendo as forças aplicadas como dois lados adjacentes e a resultante como a diagonal inclusa (Fig. 2.2). Alternativamente, você pode *usar a regra do triângulo* com as forças aplicadas desenhadas no padrão ponta-a-cauda e com a resultante se estendendo da cauda do primeiro vetor à ponta do segundo (Fig. 2.7).

3. Indique todas as dimensões. Usando um dos triângulos do paralelogramo ou o triângulo construído de acordo com a regra do triângulo, indique todas as dimensões – sejam lados ou ângulos – e determine as dimensões desconhecidas, seja graficamente ou por trigonometria. Se você usar trigonometria, lembre-se de que, se dois lados e o ângulo incluso forem conhecidos [Problema Resolvido 2.1], a lei de cossenos deve ser aplicada primeiro; e de que, se um lado e todos os ângulos forem conhecidos [Problema Resolvido 2.2], a lei de senos deve ser aplicada primeiro.

Se você sabe um pouco de Mecânica, pode se sentir tentado a ignorar as técnicas de solução dessa lição em favor da decomposição das forças em componentes retangulares. Esse método também é muito importante e, por isso, será considerado na próxima seção, mas o uso da lei do paralelogramo simplifica a solução de muitos problemas e deve ser dominado completamente neste momento.

PROBLEMAS*

- 2.1** Duas forças **P** e **Q** são aplicadas no ponto A de um suporte tipo gancho. Sabendo que $P = 75 \text{ N}$ e $Q = 125 \text{ N}$, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando (a) a lei do paralelogramo, (b) a regra do triângulo.
- 2.2** Duas forças **P** e **Q** são aplicadas no ponto A de um suporte tipo gancho. Sabendo que $P = 266 \text{ N}$ e $Q = 110 \text{ N}$, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando (a) a lei do paralelogramo, (b) a regra do triângulo.
- 2.3** Os cabos AB e AD ajudam a suportar o poste AC. Sabendo que a tração é 500 N em AB e 160 N em AD, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas pelos cabos em A usando (a) a lei do paralelogramo e (b) a regra do triângulo.

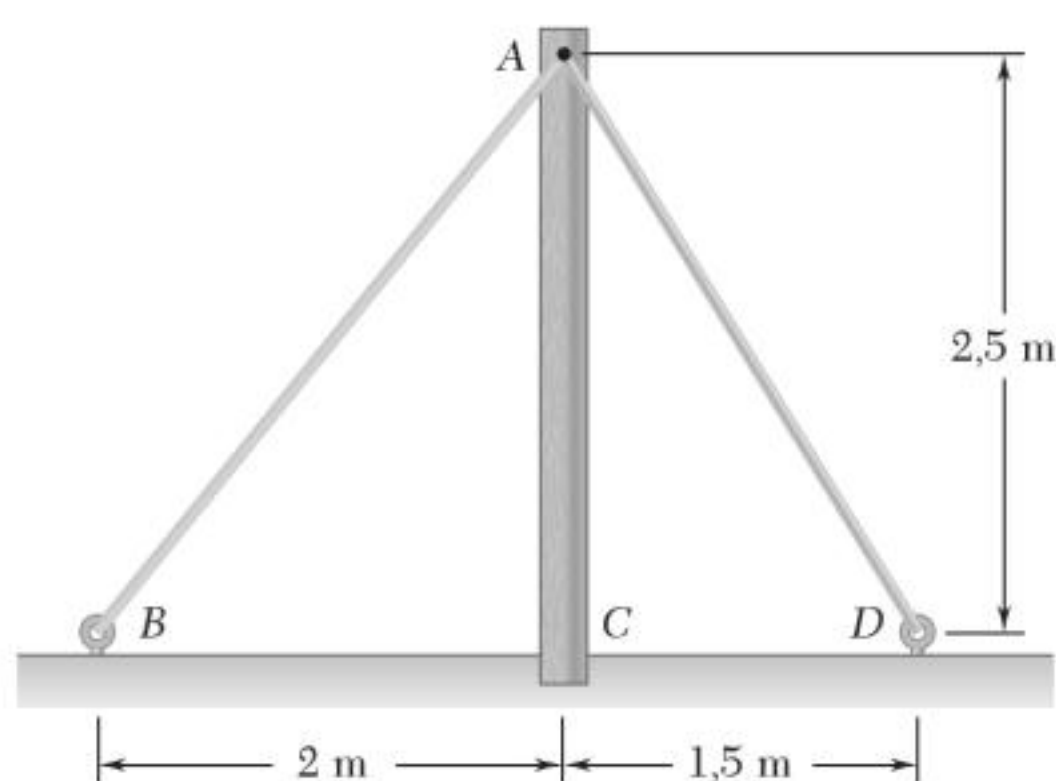


Figura P2.3

- 2.4** Duas forças são aplicadas no ponto B da viga AB. Determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido de sua resultante usando (a) a lei do paralelogramo, (b) a regra do triângulo.
- 2.5** A força de 1.330 N deve ser decomposta em componentes ao longo das linhas $a-a'$ e $b-b'$. (a) Usando trigonometria, determine o ângulo α sabendo que o componente ao longo de $a-a'$ é 530 N . (b) Qual é o valor correspondente do componente ao longo de $b-b'$?
- 2.6** A força de 300 N deve ser decomposta em componentes ao longo das linhas $a-a'$ e $b-b'$. (a) Usando trigonometria, determine o ângulo α sabendo que o componente ao longo de $b-b'$ é 120 N . (b) Qual é o valor correspondente do componente ao longo de $a-a'$?
- 2.7** Duas forças são aplicadas a um suporte tipo gancho indicadas na figura. Usando trigonometria e sabendo que a intensidade de **P** é 35 N , determine (a) o ângulo requerido a se a resultante **R** das duas forças aplicadas no suporte for horizontal, e (b) a intensidade correspondente de **R**.

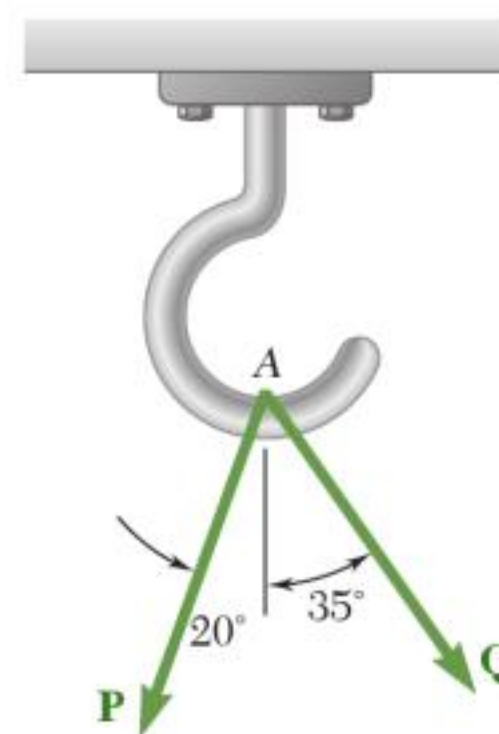


Figura P2.1 e P2.2

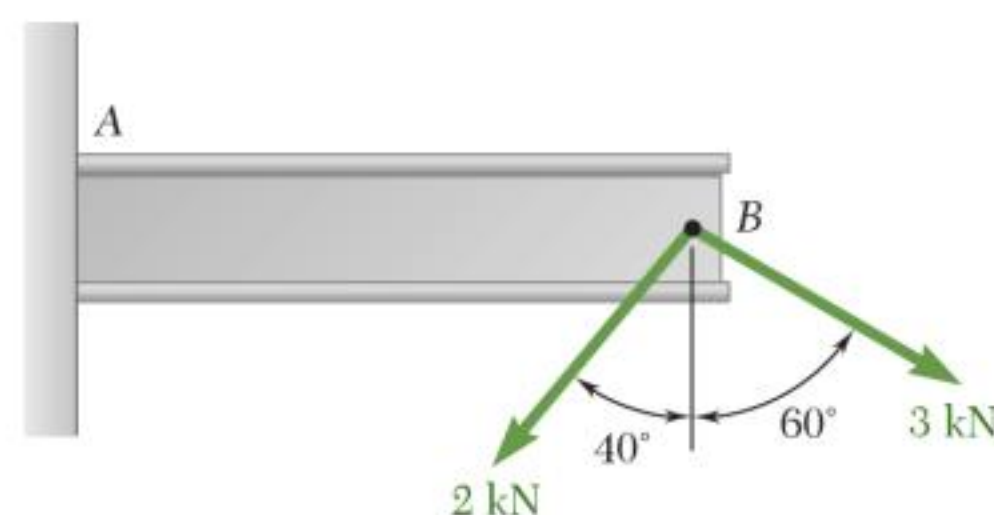


Figura P2.4

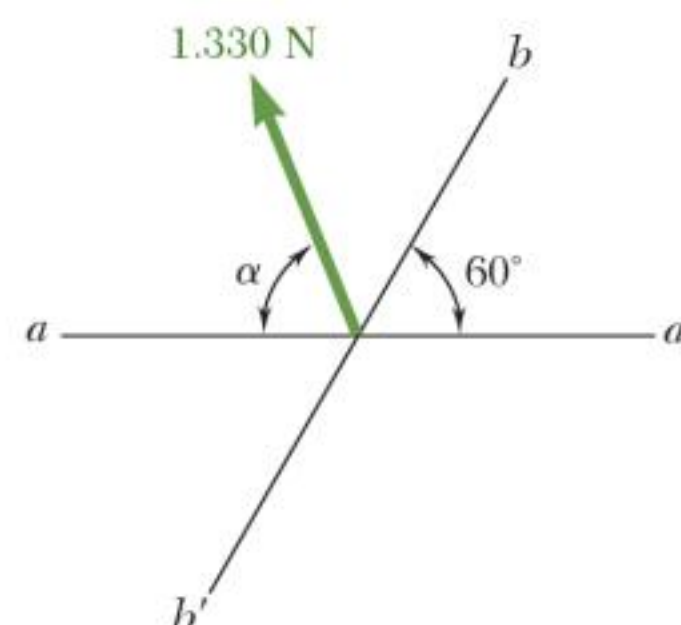


Figura P2.5 e P2.6

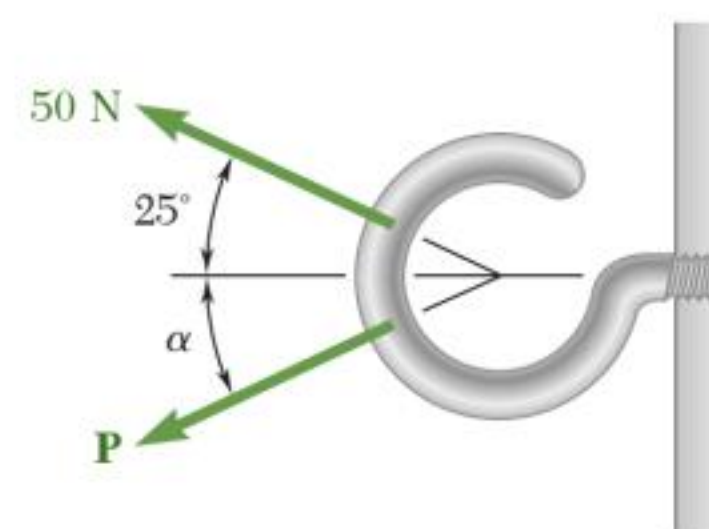


Figura P2.7

* As respostas a todos os problemas escritos em fonte normal (tal como 2.1) estão no final do livro. As respostas a problemas cujo número é escrito em itálico (tal como 2.4) não são dadas.

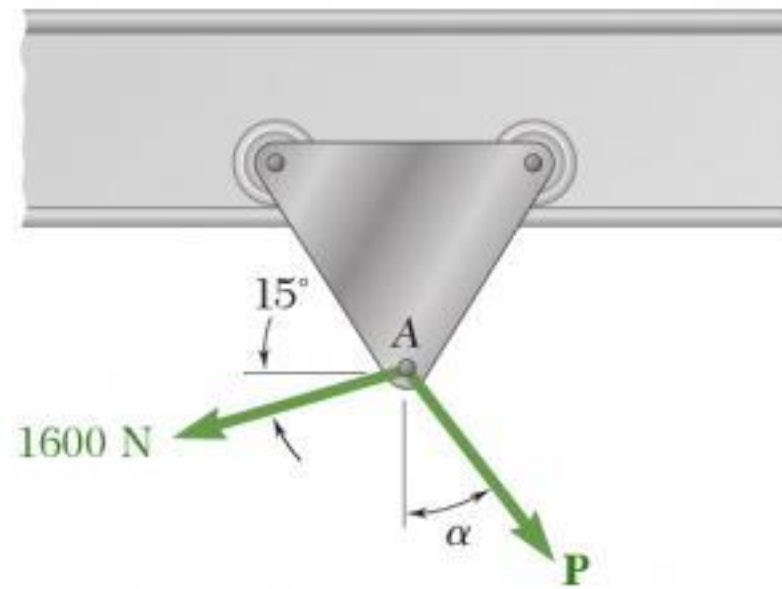


Figura P2.9 e P2.10

2.8 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.1, usando trigonometria e sabendo que a intensidade de \mathbf{P} é 75 N, determine (a) a intensidade requerida da força \mathbf{Q} se a resultante \mathbf{R} das duas forças aplicadas em A for vertical, (b) a intensidade correspondente de \mathbf{R} .

2.9 Um carrinho de mão que se movimenta ao longo da viga horizontal é acionado por duas forças indicadas na figura. (a) Sabendo-se que $\alpha = 25^\circ$, determine, usando trigonometria, a intensidade da força \mathbf{P} se a força resultante sobre o carrinho de mão é vertical. (b) Qual a intensidade correspondente da resultante?

2.10 Um carrinho de mão que se movimenta ao longo da viga horizontal é acionado por duas forças indicadas na figura. Usando a trigonometria, a intensidade, direção e sentido da força \mathbf{P} se a força resultante sobre o carrinho de mão é vertical e de valor igual a 2.500 N.

2.11 Um tanque de aço deve ser posicionado em uma escavação. Sabendo-se que $\alpha = 20^\circ$, determine, usando trigonometria, (a) a intensidade requerida para a força \mathbf{P} se a resultante \mathbf{R} das duas forças aplicadas em A é vertical (b) a correspondente intensidade de \mathbf{R} .

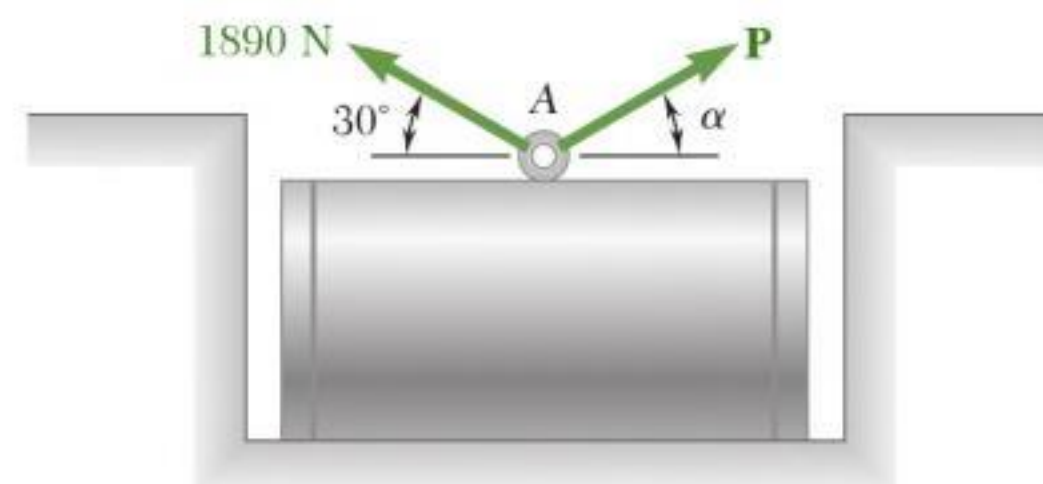


Figura P2.11 e P2.12

2.12 Um tanque de aço deve ser posicionado em uma escavação. Sabendo-se que a intensidade de $\mathbf{P} = 2.220$ N, determine, usando trigonometria (a) o ângulo requerido se a resultante \mathbf{R} das duas forças aplicadas em A é vertical (b) a correspondente intensidade de \mathbf{R} .

2.13 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.7, determine, usando trigonometria, (a) a intensidade e a direção da menor força \mathbf{P} para que a resultante \mathbf{R} das duas forças aplicadas no suporte seja horizontal, (b) a correspondente intensidade de \mathbf{R} .

2.14 Para o tanque de aço do Problema 2.11, determine, usando trigonometria, (a) a intensidade e a direção da menor força \mathbf{P} para a qual a resultante \mathbf{R} das duas forças aplicadas em A seja vertical, (b) a correspondente intensidade de \mathbf{R} .

2.15 Resolva o Problema 2.2 usando trigonometria.

2.16 Resolva o Problema 2.3 usando trigonometria.

2.17 Resolva o Problema 2.4 usando trigonometria.

- 2.18** Dois elementos estruturais A e B são parafusados a um suporte, como mostra a figura. Sabendo que ambos os elementos estão em compressão e que a força é 15 kN no elemento A e 10 kN no elemento B , determine, usando trigonometria, a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças aplicadas ao suporte pelos elementos A e B .
- 2.19** Dois elementos estruturais A e B são parafusados a um suporte, como mostra a figura. Sabendo que ambos os elementos estão em compressão e que a força é 10 kN no elemento A e 15 kN no elemento B , determine, usando trigonometria, a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças aplicadas ao suporte pelos elementos A e B .
- 2.20** Para o suporte tipo gancho do Problema 2.7, sabendo-se que $P = 75$ N e $\alpha = 50^\circ$, determine, usando trigonometria, a intensidade e a direção da resultante das duas forças aplicadas no suporte.

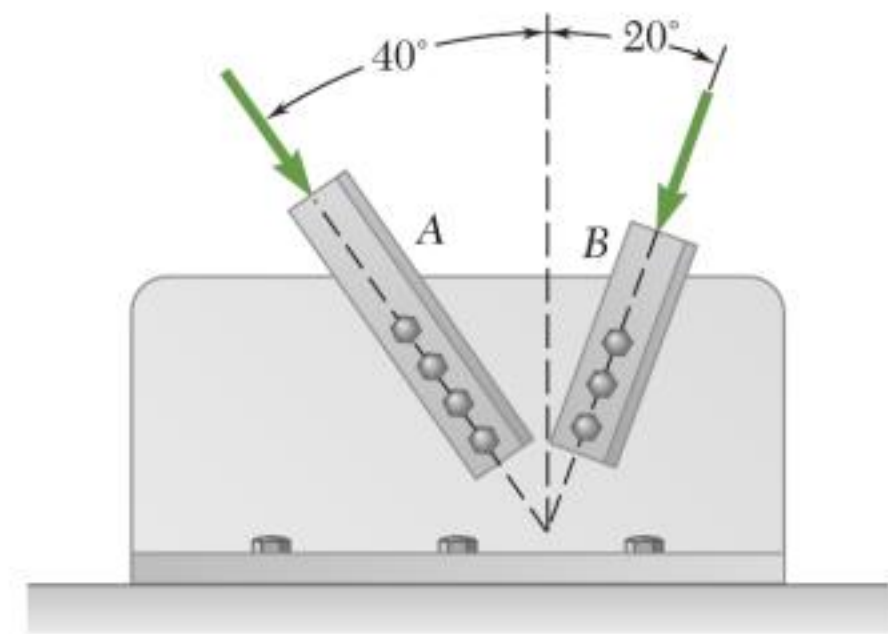


Figura P2.18 e P2.19

2.7 Componentes retangulares de uma força e vetores unitários*

Em muitos problemas, será desejável decompor uma força em dois componentes que são perpendiculares entre si. Na Fig. 2.18, a força \mathbf{F} foi decomposta em um componente \mathbf{F}_x ao longo do eixo x e um componente \mathbf{F}_y ao longo do eixo y . O paralelogramo desenhado para se obter os dois componentes é um *retângulo*, e \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y são chamados de *componentes retangulares*.

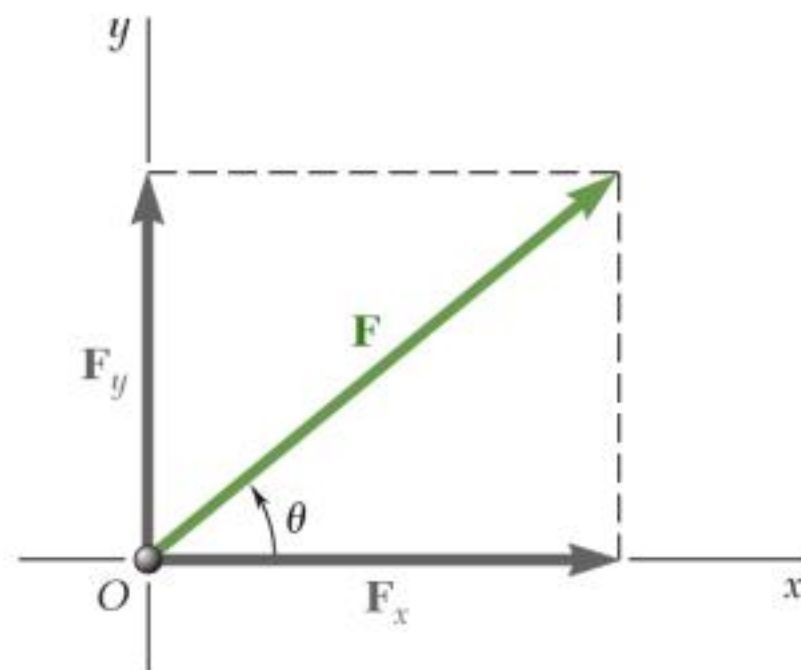


Figura 2.18

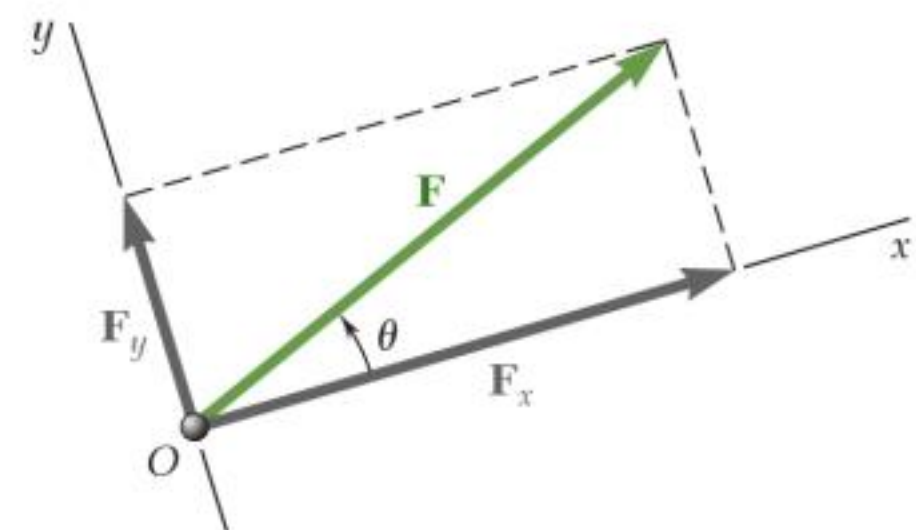


Figura 2.19

Os eixos x e y geralmente são dispostos na horizontal e na vertical, respectivamente, como na Fig. 2.18; podem, no entanto, ser dispostos em duas direções perpendiculares quaisquer, como mostra a Fig. 2.19. Na determinação dos componentes retangulares de uma força, o estudante deve pensar nas linhas de construção representadas nas Figs. 2.18 e 2.19 como sendo *paralelas* aos eixos x e y , em vez de perpendiculares a esses eixos. Essa prática ajudará a evitar erros na determinação de componentes *obliquos*, como na Seção 2.6.

* As propriedades estabelecidas nas Seções 2.7 e 2.8 podem ser facilmente estendidas a componentes retangulares de qualquer quantidade vetorial.

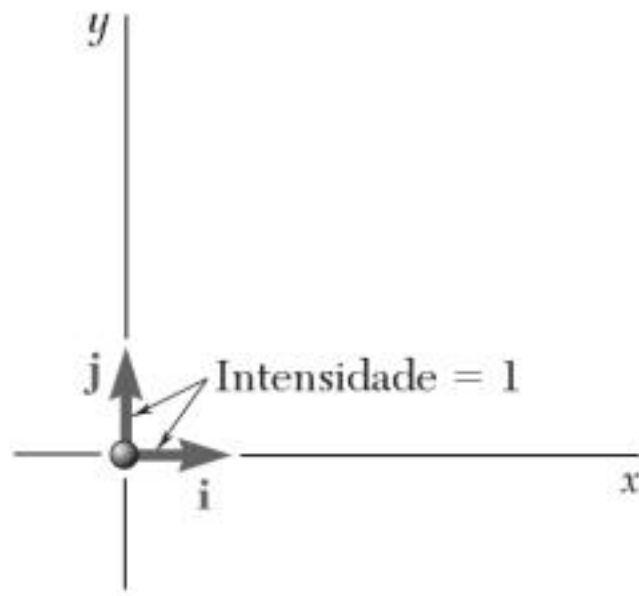


Figura 2.20

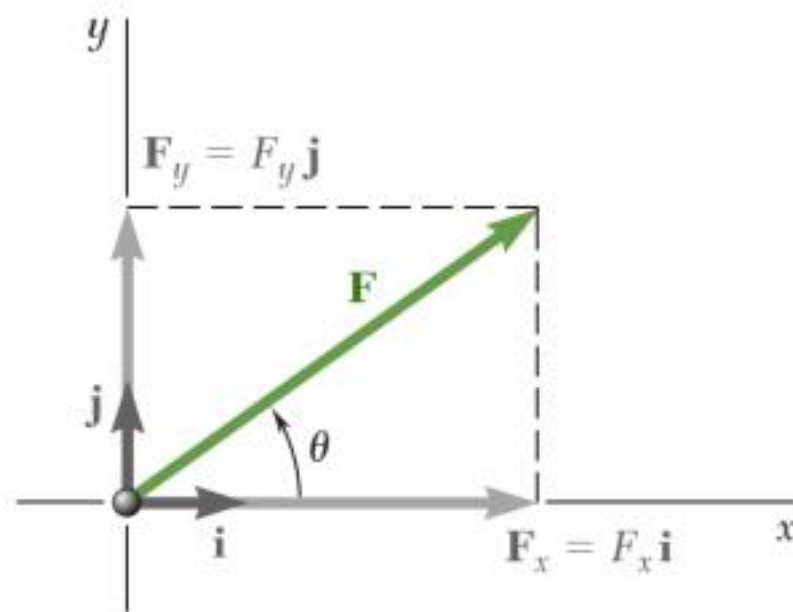


Figura 2.21

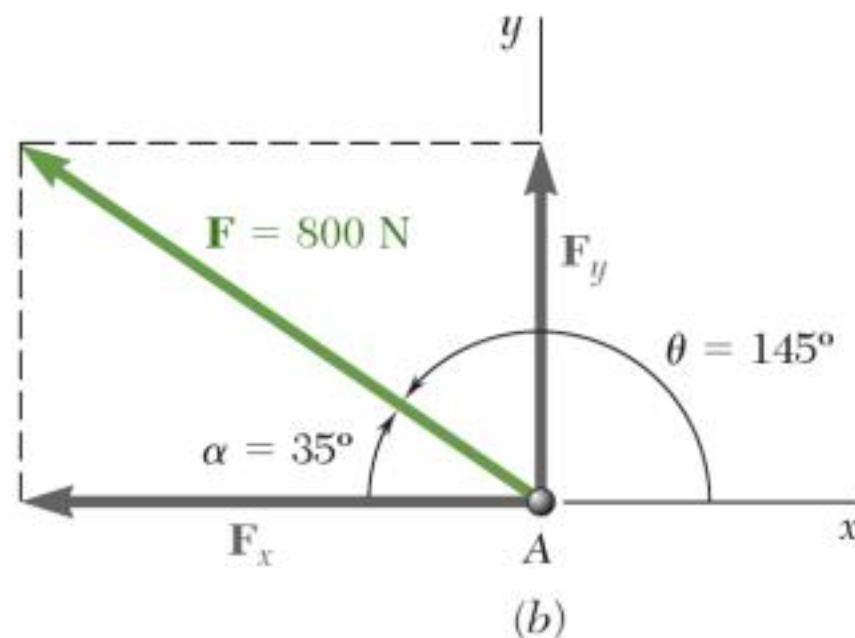
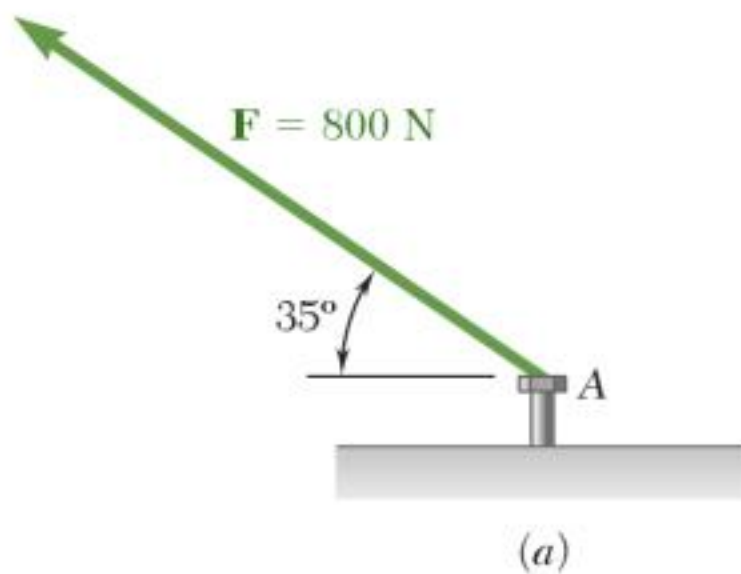


Figura 2.22

Dois vetores de intensidade unitária, dirigidos respectivamente ao longo dos eixos positivos x e y , serão introduzidos neste ponto. Esses vetores são denominados *vetores unitários* e são representados por \mathbf{i} e \mathbf{j} , respectivamente (Fig. 2.20). Lembrando a definição do produto de um escalar por um vetor dada na Seção 2.4, notamos que os componentes retangulares \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y da força \mathbf{F} podem ser obtidos multiplicando-se respectivamente os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} pelos escalares apropriados (Fig. 2.21). Temos:

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

e

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

Embora os escalares F_x e F_y possam ser positivos ou negativos, dependendo do sentido de \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y , seus valores absolutos são respectivamente iguais às intensidades das forças componentes \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y . Os escalares F_x e F_y são denominados *componentes escalares* da força \mathbf{F} , enquanto as verdadeiras forças componentes \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y recebem o nome de *componentes vetoriais* de \mathbf{F} . Entretanto, quando não houver possibilidade de confusão, podemos chamar tanto os componentes vetoriais quanto os componentes escalares de \mathbf{F} simplesmente de *componentes* de \mathbf{F} . Notamos que o componente escalar F_x é positivo quando o componente vetorial \mathbf{F}_x tiver o mesmo sentido que o vetor unitário \mathbf{i} (ou seja, o mesmo sentido que o eixo x positivo) e é negativo quando \mathbf{F}_x tiver sentido oposto. Pode-se chegar a uma conclusão semelhante com relação ao sinal do componente escalar F_y .

Representando por F a intensidade da força \mathbf{F} e por θ o ângulo entre \mathbf{F} e o eixo x , medido no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo (Fig. 2.21), podemos expressar os componentes escalares de \mathbf{F} da seguinte maneira:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Notamos que as relações obtidas valem para qualquer valor do ângulo θ , de 0° a 360° e que definem tanto o sinal como o valor absoluto dos componentes escalares F_x e F_y .

EXEMPLO 1 Uma força de 800 N é exercida no parafuso A, como mostra a Fig. 2.22a. Determine os componentes vertical e horizontal dessa força.

Para se obter o sinal correto para os componentes escalares F_x e F_y , o valor θ nas Eqs. (2.8) deve ser substituído por $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$. Entretanto, pode ser mais prático determinar por inspeção os sinais de F_x e F_y (Fig. 2.22b) e usar as funções trigonométricas do ângulo $\alpha = 35^\circ$. Escrevemos, portanto:

$$\begin{aligned} F_x &= -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N} \\ F_y &= +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N} \end{aligned}$$

Os componentes vetoriais de \mathbf{F} são, então:

$$\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}$$

e podemos escrever \mathbf{F} na forma

$$\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j}$$

EXEMPLO 2 Um homem puxa com a força de 300 N uma corda amarrada a um edifício, como mostra a Fig. 2.23a. Quais são os componentes horizontal e vertical da força exercida pela corda no ponto A?

Vê-se da Fig. 2.23b que:

$$F_x = +(300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = -(300 \text{ N}) \sin \alpha$$

Observamos que $AB = 10 \text{ m}$, obtemos da Fig. 2.23a:

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{AB} = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{6 \text{ m}}{AB} = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Portanto, obtemos

$$F_x = +(300 \text{ N}) \frac{4}{5} = +240 \text{ N} \quad F_y = -(300 \text{ N}) \frac{3}{5} = -180 \text{ N}$$

e temos

$$\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (180 \text{ N})\mathbf{j}$$

Quando a força \mathbf{F} é definida pelos seus componentes retangulares F_x e F_y (ver Fig. 2.21), o ângulo θ , que define sua direção, pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\text{tg } \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

A intensidade F da força pode ser obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras da seguinte maneira:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

ou resolvendo-se em termos de F uma da Eqs. (2.8).

EXEMPLO 3 Uma força $\mathbf{F} = (3.150 \text{ N})\mathbf{i} + (6.750 \text{ N})\mathbf{j}$ é aplicada a um parafuso A. Determine a intensidade da força e o ângulo θ que ela forma com a horizontal.

Primeiro desenhamos um diagrama mostrando os dois componentes retangulares da força e o ângulo θ (Fig. 2.24). A partir da Eq. (2.9), temos:

$$\text{tg } \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6.750 \text{ N}}{3.150 \text{ N}}$$

Usando uma calculadora^o, digitamos 6.750 N e dividimos por 3.150 N; calculando o arco tangente do quociente, obtemos $\theta = 65,0^\circ$. Resolvendo a segunda das Eqs. (2.8) para F , temos:

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{6.750 \text{ N}}{\sin 65^\circ} = 7.448 \text{ N}$$

O último cálculo é facilitado se o valor de F_y for armazenado na memória quando originamente digitado; ele pode, então, ser chamado de volta para ser dividido por $\sin \theta$.

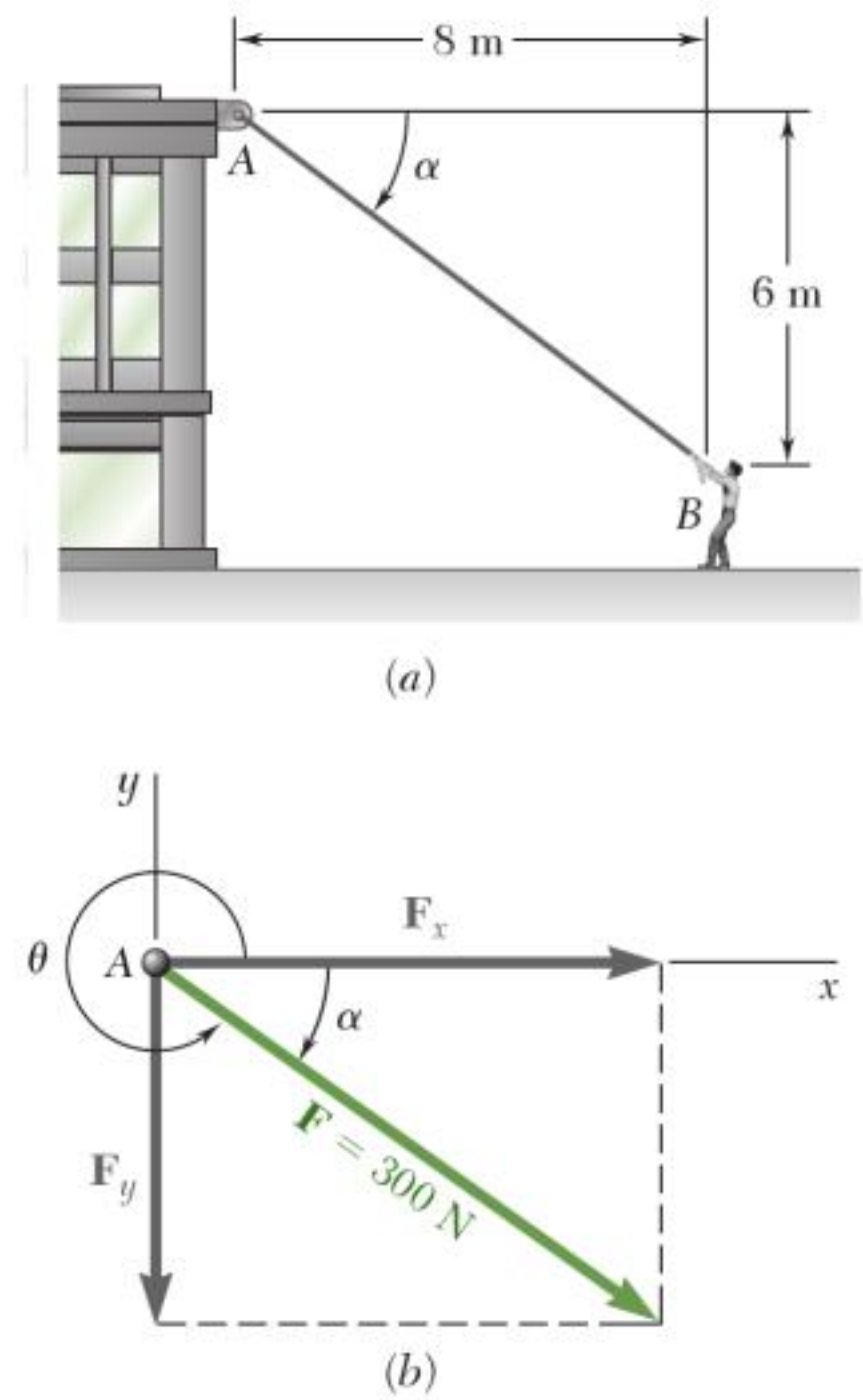


Figura 2.23

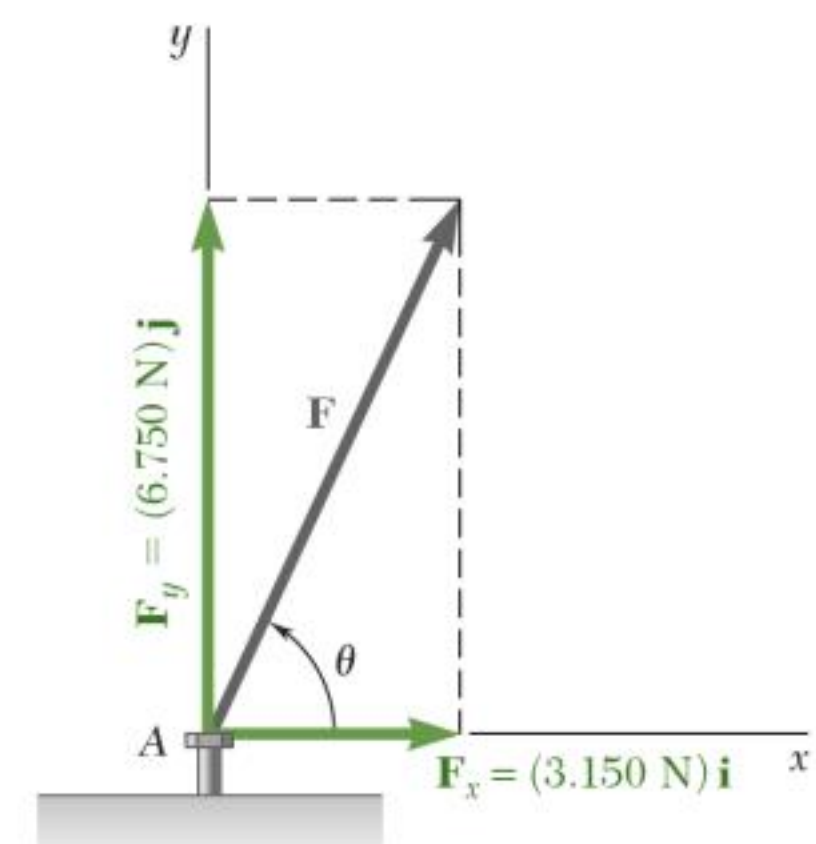
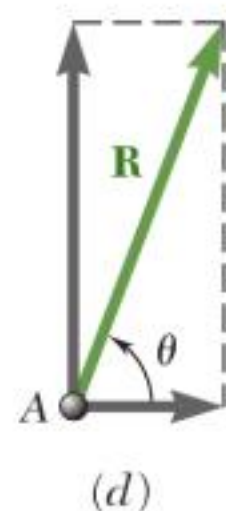
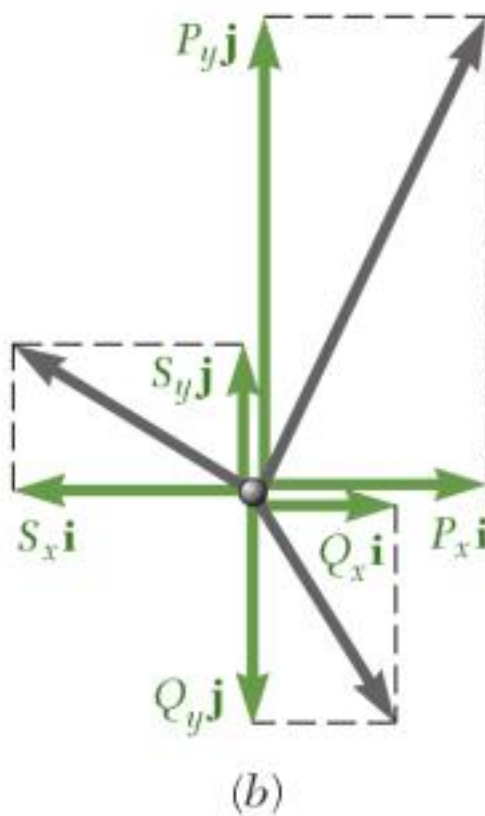
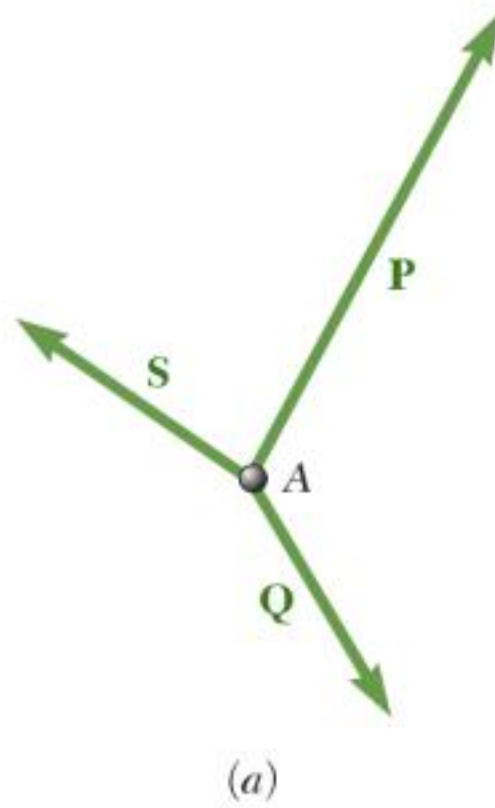


Figura 2.24

^o Supõe-se que a calculadora usada tenha teclas para o cálculo de funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Algumas calculadoras também têm teclas para conversão direta de coordenadas retangulares em coordenadas polares, e vice-versa. Tais calculadoras eliminam a necessidade de se calcularem funções trigonométricas nos Exemplos 1, 2 e 3 e em problemas do mesmo tipo.

2.8 Adição de forças pela soma dos componentes x e y



Foi visto na Seção 2.2 que forças devem ser adicionadas de acordo com a lei do paralelogramo. A partir dessa lei, dois outros métodos, mais facilmente aplicáveis a soluções gráficas de problemas, foram apresentados nas Seções 2.4 e 2.5: a regra do triângulo para adição de duas forças e a regra do polígono para adição de três ou mais forças. Foi também visto que o triângulo de forças usado para se definir a resultante de duas forças poderia ser usado para se obter uma solução *trigonométrica*.

Quando três ou mais forças são adicionadas, nenhuma solução trigonométrica prática pode ser obtida do polígono de forças que define a resultante das forças. Nesse caso, uma solução *analítica* do problema pode ser obtida decompondo cada força em dois componentes retangulares. Considere, por exemplo, três forças **P**, **Q** e **S** atuando sobre uma partícula A (Fig. 2.25a). A resultante **R** delas é definida pela relação:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \quad (2.11)$$

Decompondo cada força em seus componentes retangulares, escrevemos:

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

de onde temos que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.12)$$

ou, em notação reduzida

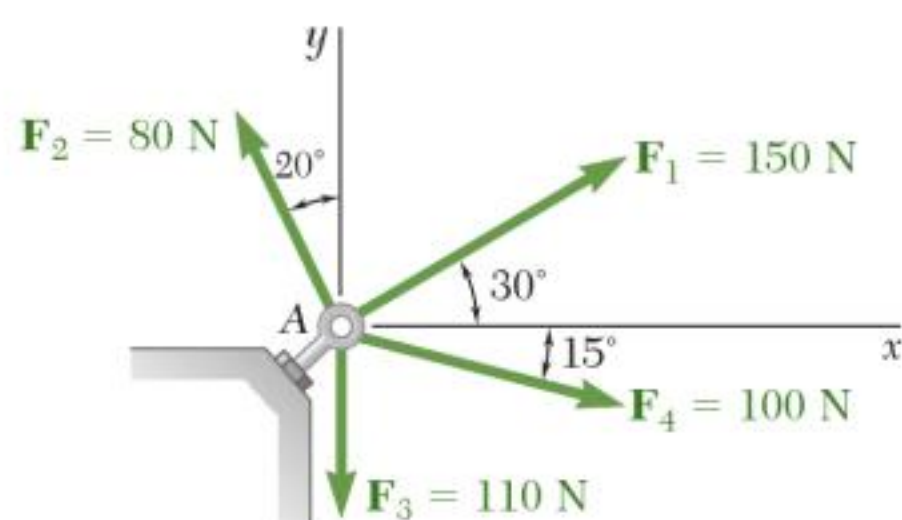
$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.13)$$

Concluimos que os *componentes escalares* R_x e R_y da resultante **R** de várias forças que atuem sobre uma partícula são obtidos adicionando-se algebricamente os correspondentes componentes escalares das forças dadas.*

Na prática, a determinação da resultante **R** é feita em três passos, como ilustra a Fig. 2.25. Primeiro as forças dadas mostradas na Fig. 2.25a são decompostas em seus componentes x e y (Fig. 2.25b). Adicionando esses componentes, obtemos os componentes x e y de **R** (Fig. 2.25c). Por fim, a resultante $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ é determinada aplicando-se a lei do paralelogramo (Fig. 2.25d). Esse procedimento será mais eficiente se os cálculos forem dispostos em uma tabela. Este é o único método analítico prático para a adição de três ou mais forças, e é também, muitas vezes, preferido em vez da solução trigonométrica, no caso da adição de duas forças.

Figura 2.25

* Obviamente, esse resultado também se aplica à adição de outras quantidades vetoriais, tais como velocidades, acelerações ou quantidades de movimento.

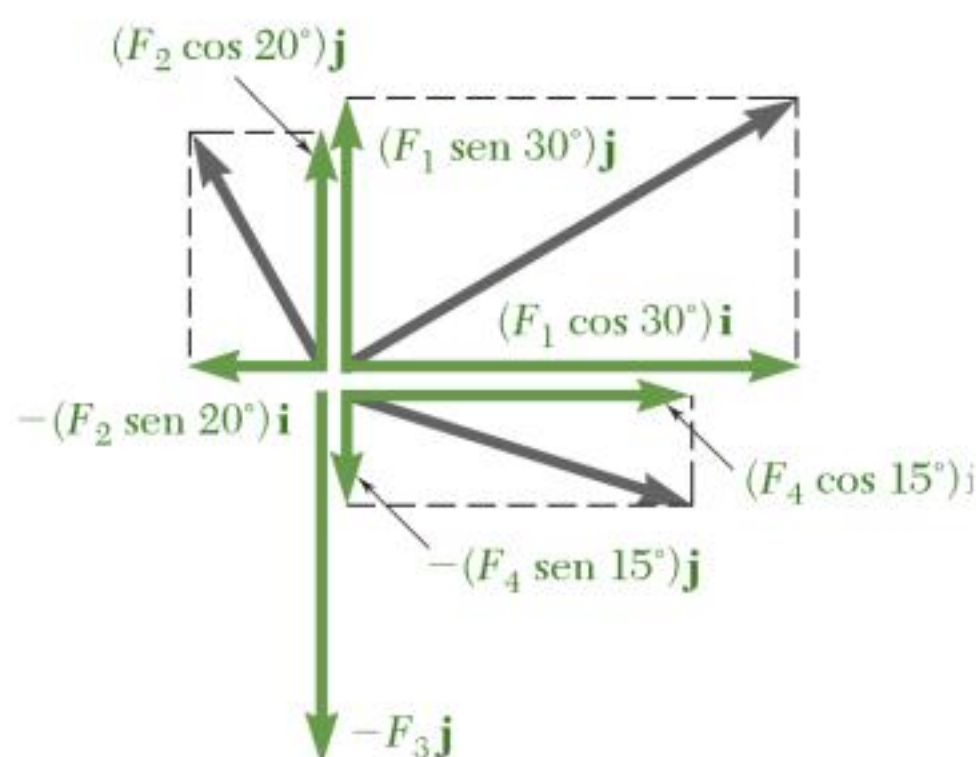


PROBLEMA RESOLVIDO 2.3

Quatro forças atuam no parafuso A, como mostrado na figura. Determine a resultante das forças no parafuso.

SOLUÇÃO

Os componentes x e y de cada força são determinados por trigonometria como mostra a figura e são inseridos na tabela a seguir. De acordo com a convenção adotada na Seção 2.7, o número escalar que representa o componente da força é positivo se o componente da força tem o mesmo sentido que o eixo coordenado correspondente. Logo, os componentes x atuando para a direita e os componentes y atuando para cima são representados por números positivos.

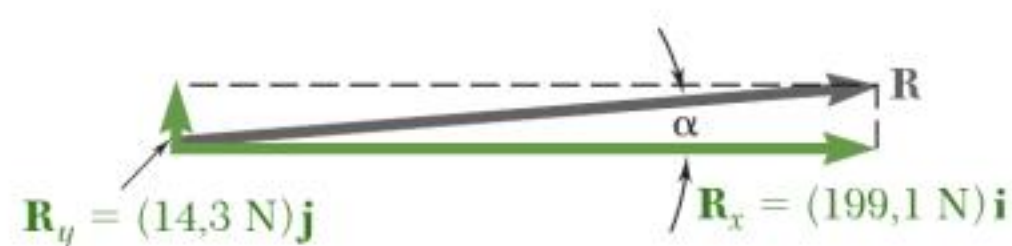


Força	Intensidade, N	Componente x , N	Componente y , N
F_1	150	+129,9	+75,0
F_2	80	-27,4	+75,2
F_3	110	0	-110,0
F_4	100	+96,6	-25,9
		$R_x = +199,1$	$R_y = +14,3$

Então, a resultante \mathbf{R} das quatro forças é:

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad \mathbf{R} = (199,1 \text{ N})\mathbf{i} + (14,3 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

A intensidade, a direção e o sentido da resultante podem agora ser determinados. A partir do triângulo mostrado, temos:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{R_y}{R_x} = \frac{14,3 \text{ N}}{199,1 \text{ N}} & \alpha &= 4,1^\circ \\ R &= \frac{14,3 \text{ N}}{\operatorname{sen} \alpha} = 199,6 \text{ N} & \mathbf{R} &= 199,6 \text{ N} \angle 4,1^\circ \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Com uma calculadora, o último cálculo fica mais fácil se o valor de R_y for armazenado na memória quando digitado pela primeira vez. Depois, poderá ser recuperado e dividido por $\operatorname{sen} \alpha$ (ver também a nota de rodapé na página 31.).

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Você viu na seção anterior que a resultante de duas forças pode ser determinada graficamente ou a partir da trigonometria de um triângulo oblíquo.

A. Quando três ou mais forças estão envolvidas, a determinação de sua resultante \mathbf{R} é feita mais facilmente decompondo-se primeiro cada força em *componentes retangulares*. Dois casos podem ser encontrados, dependendo do modo como cada uma das forças dadas é definida:

Caso 1. A força \mathbf{F} é definida por sua intensidade F e pelo ângulo α que ela forma com o eixo x . Os componentes x e y da força podem ser obtidos multiplicando-se F por $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, respectivamente [Exemplo 1].

Caso 2. A força \mathbf{F} é definida por sua intensidade F e pelas coordenadas de dois pontos A e B em sua linha de ação (Fig. 2.23). O ângulo α que \mathbf{F} forma com o eixo x pode ser determinado primeiro por trigonometria. Entretanto, os componentes de \mathbf{F} também podem ser obtidos diretamente a partir das proporções entre as várias dimensões envolvidas, sem de fato determinar α [Exemplo 2].

B. Componentes retangulares da resultante. Os componentes R_x e R_y da resultante podem ser obtidos somando-se algebricamente os componentes correspondentes das forças dadas [Problema Resolvido 2.3].

Você pode expressar a resultante *forma vetorial* usando os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , que são direcionados ao longo dos eixos x e y , respectivamente:

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

Você também pode determinar a *intensidade*, a *direção* e o *sentido* da resultante solucionando o triângulo retângulo de lados R_x e R_y para R e para o ângulo que \mathbf{R} forma com o eixo x .

PROBLEMAS

2.21 e 2.22 Determine os componentes x e y de cada uma das forças indicadas.

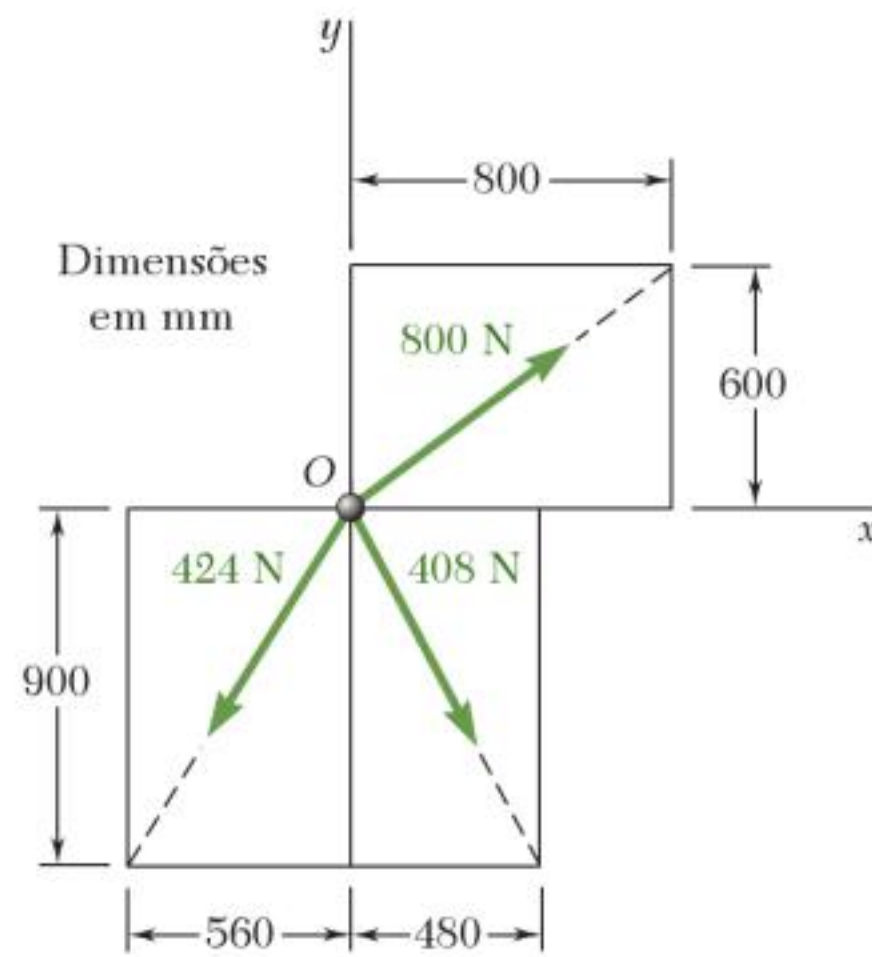


Figura P2.21

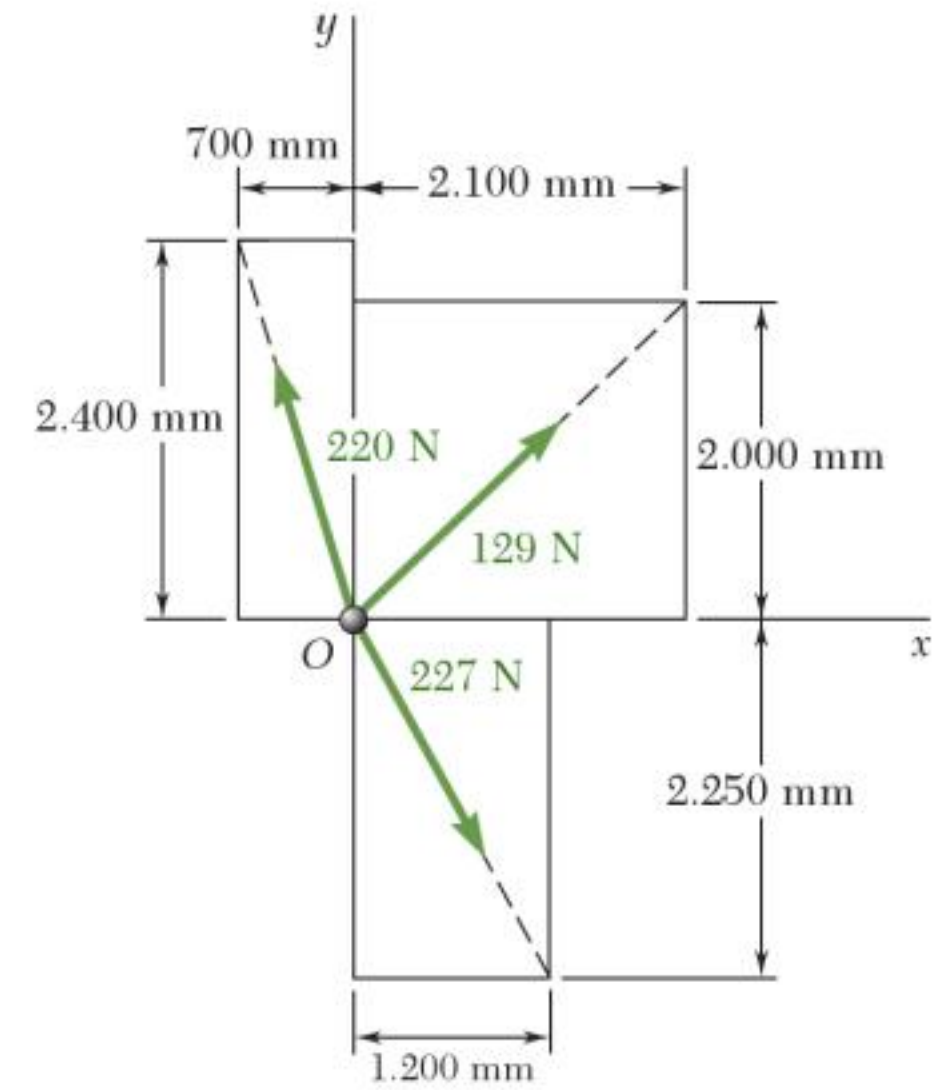


Figura P2.22

2.23 e 2.24 Determine os componentes x e y de cada uma das forças indicadas.

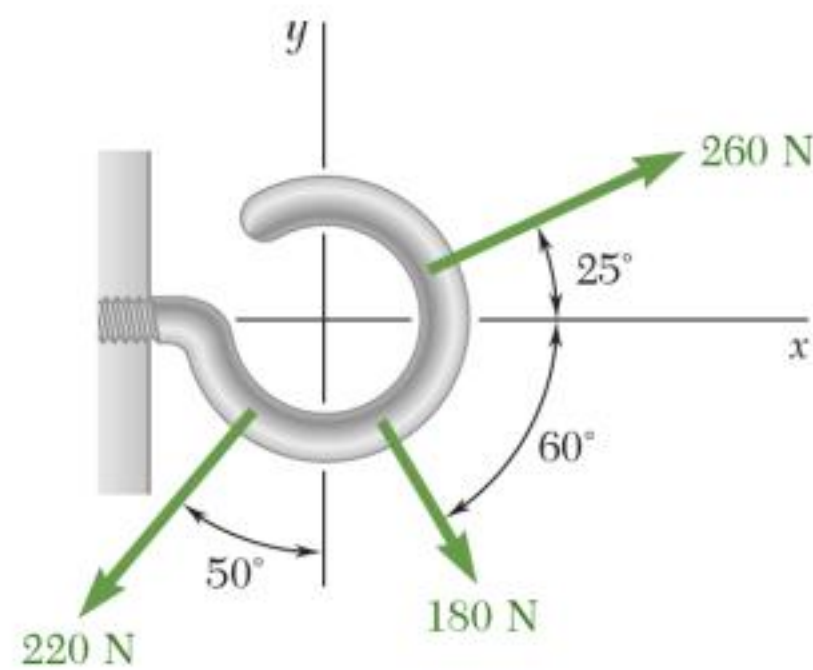


Figura P2.23

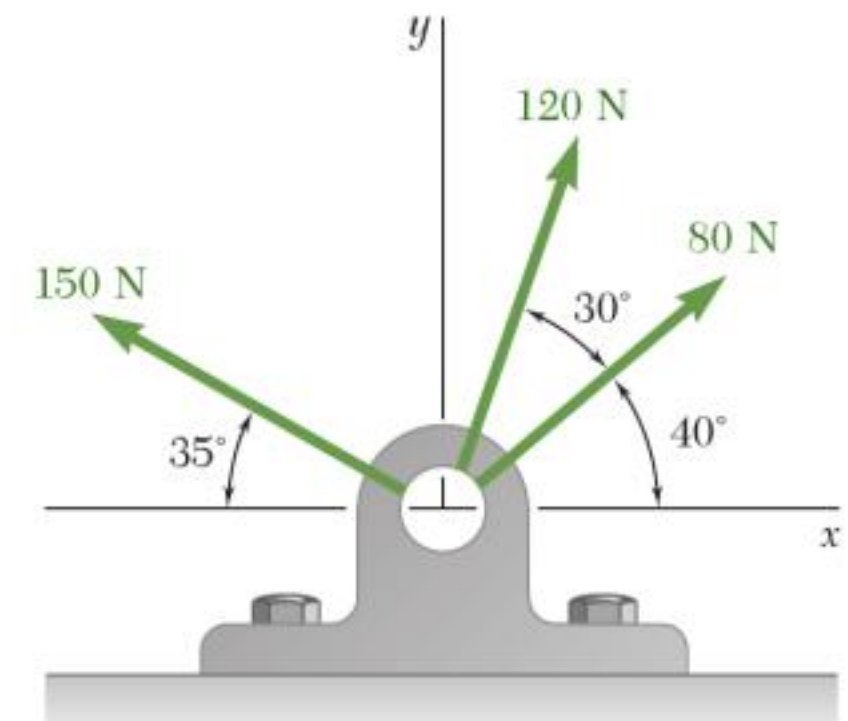


Figura P2.24

2.25 O elemento BD exerce sobre o elemento ABC uma força \mathbf{P} dirigida ao longo da linha BD . Sabendo que \mathbf{P} deve ter um componente horizontal de 1330 N , determine (a) a intensidade da força \mathbf{P} , (b) sua componente vertical.

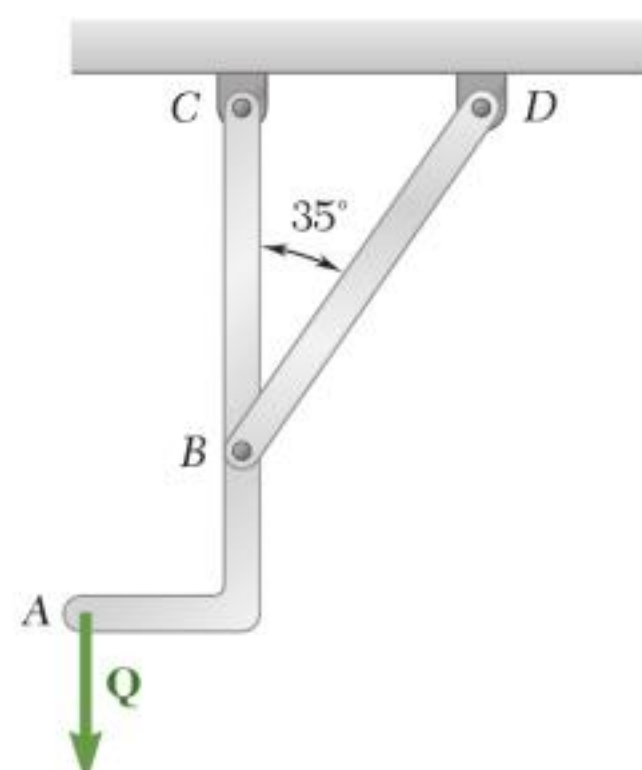


Figura P2.25

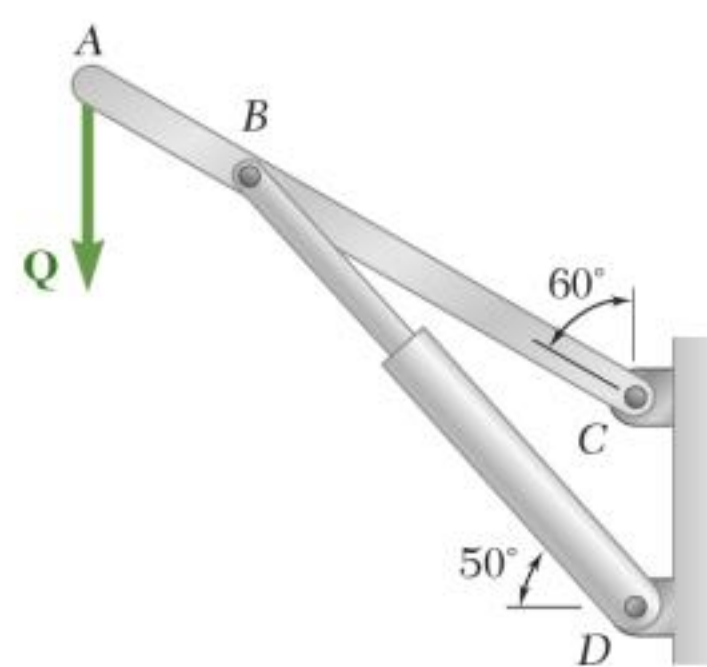


Figura P2.26

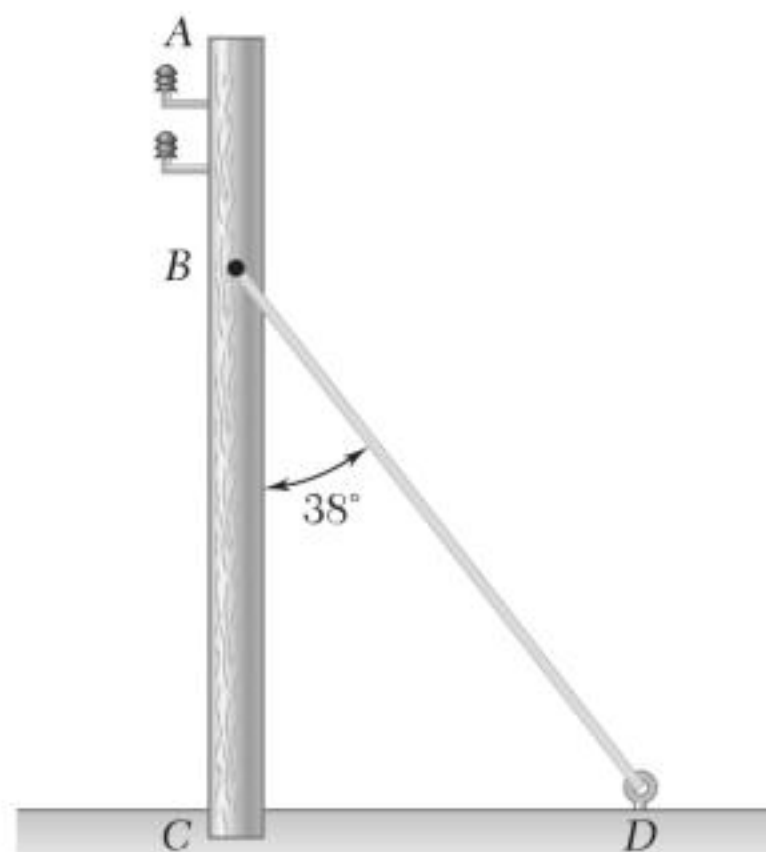


Figura P2.27 e P2.28

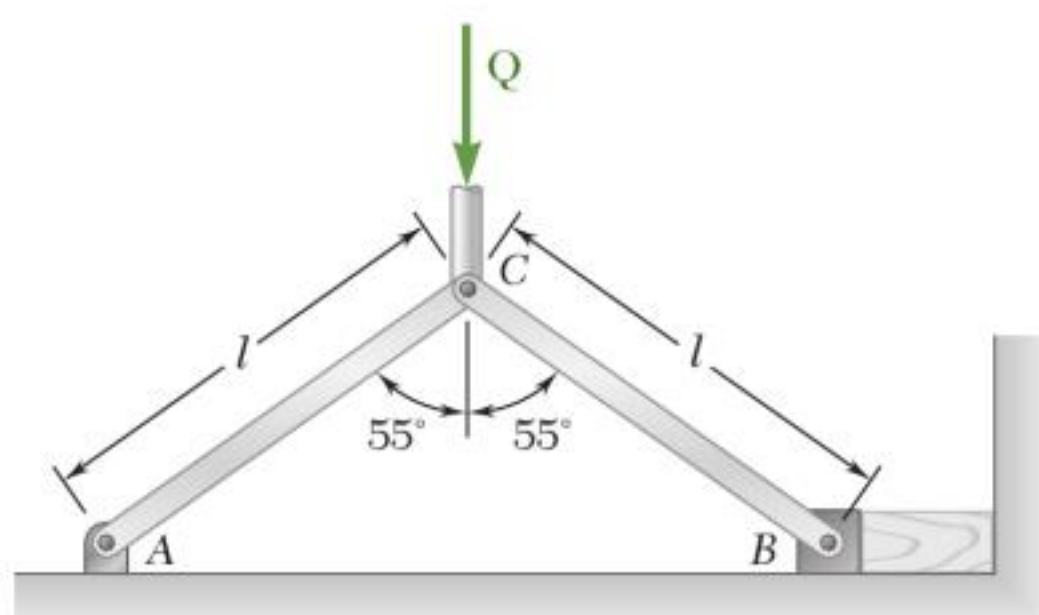


Figura P2.29

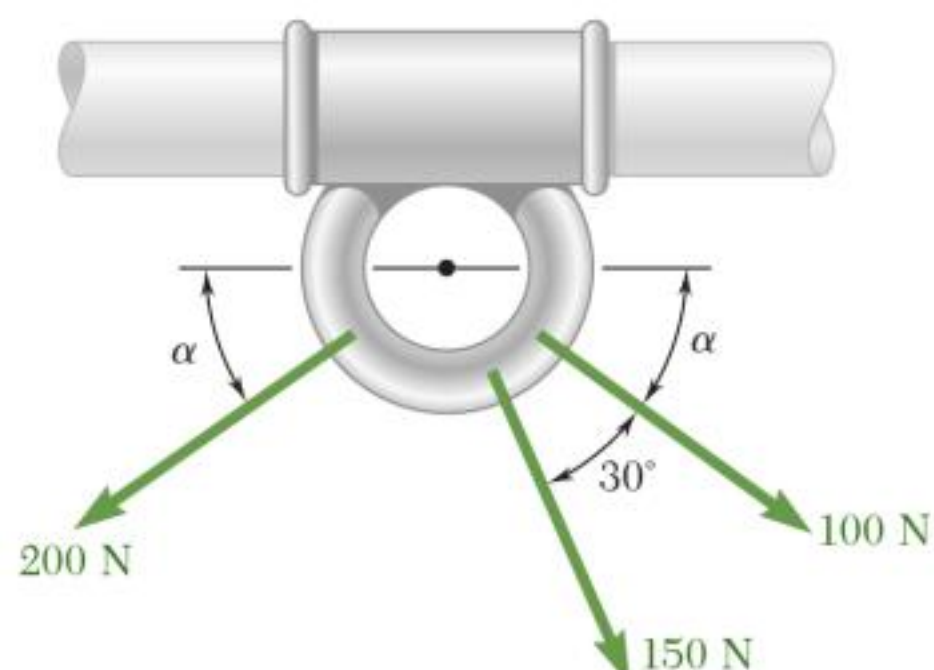


Figura P2.35

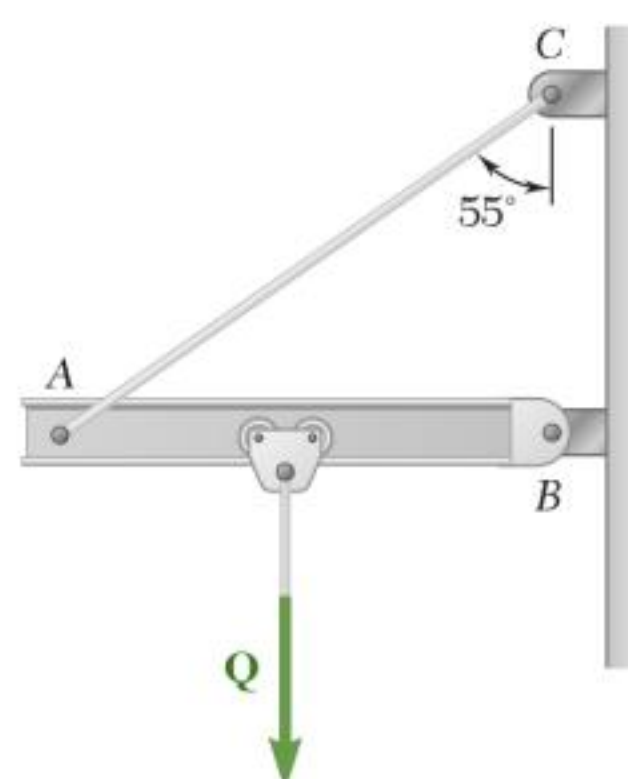


Figura P2.30

- 2.26** Um cilindro hidráulico BD exerce sobre o membro ABC uma força \mathbf{P} dirigida ao longo da linha BD . Sabendo que \mathbf{P} tem um componente perpendicular a ABC de 750 N, determine (a) a intensidade da força \mathbf{P} , (b) sua componente paralela a ABC .
- 2.27** O cabo de sustentação BD exerce no poste telefônico AC uma força \mathbf{P} dirigida ao longo de BD . Sabendo que \mathbf{P} tem uma componente de 120 N perpendicular ao poste AC , determine (a) a intensidade da força \mathbf{P} , (b) sua componente ao longo da linha AC .
- 2.28** O cabo de sustentação BD exerce no poste telefônico AC uma força \mathbf{P} dirigida ao longo de BD . Sabendo que \mathbf{P} tem um componente de 180 N ao longo da linha AC , determine (a) a intensidade da força \mathbf{P} , (b) sua componente em uma direção perpendicular a AC .
- 2.29** O elemento CB de um torno de bancada (morsa) exerce no bloco B uma força \mathbf{P} dirigida ao longo da linha CB . Sabendo que \mathbf{P} tem uma componente horizontal de 1.200 N, determine (a) a intensidade da força \mathbf{P} , (b) sua componente vertical.
- 2.30** O cabo AC exerce sobre a viga AB a força \mathbf{P} dirigida ao longo da linha AC . Sabendo que \mathbf{P} tem uma componente vertical de 1.560 N, determine (a) a intensidade da força \mathbf{P} , (b) sua componente horizontal.

- 2.31** Determine a resultante das três forças do Problema 2.22.
- 2.32** Determine a resultante das três forças do Problema 2.24.
- 2.33** Determine a resultante das três forças do Problema 2.23.
- 2.34** Determine a resultante das três forças do Problema 2.21.
- 2.35** Sabendo que $\alpha = 35^\circ$, determine a resultante das três forças indicadas.

- 2.36** Sabendo que a tração no cabo BC é 725 N , determine a resultante das três forças exercidas no ponto B da viga AB .

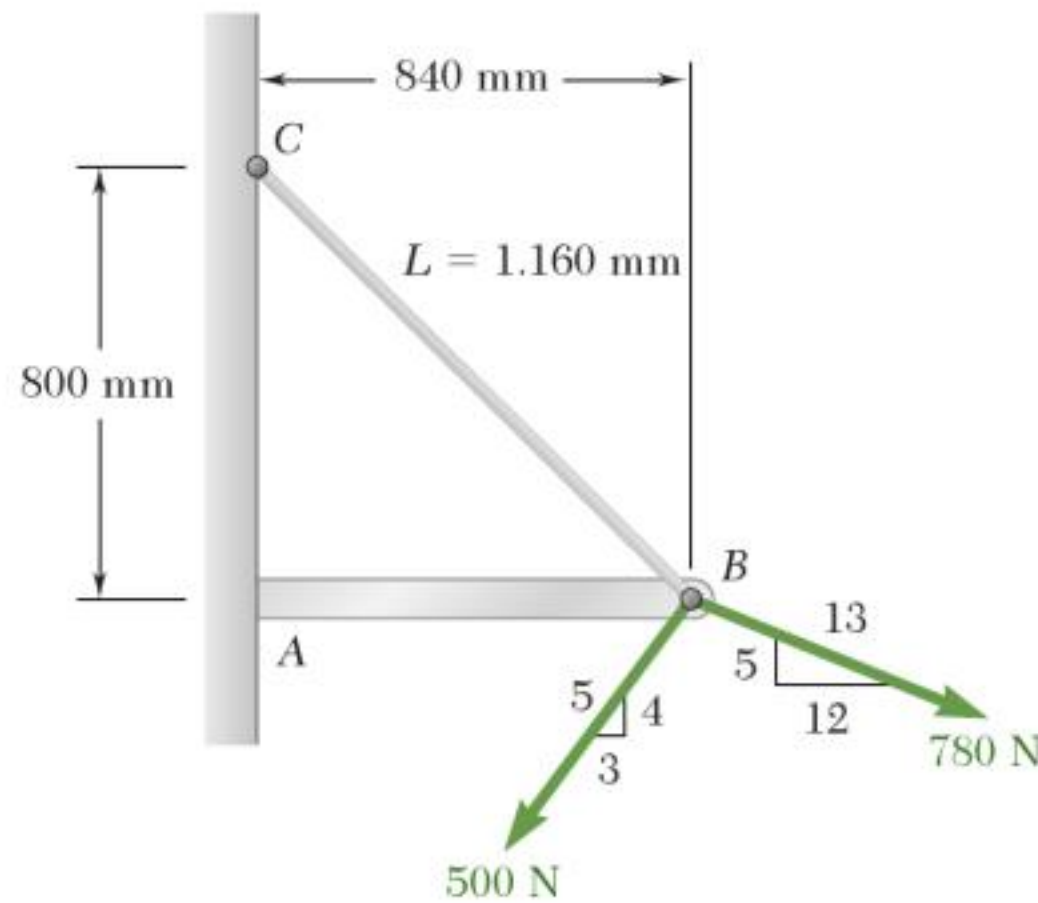


Figura P2.36

- 2.37** Sabendo que $\alpha = 40^\circ$, determine a resultante das três forças indicadas.
- 2.38** Sabendo que $\alpha = 75^\circ$, determine a resultante das três forças indicadas.
- 2.39** Para o anel do Problema 2.35, determine (a) o valor necessário de α para que a resultante das forças seja na vertical, (b) a correspondente intensidade da resultante.
- 2.40** Para a viga do Problema 2.36, determine (a) a tração necessária no cabo BC se a resultante das três forças exercidas no ponto B seja vertical, (b) a correspondente intensidade da resultante.
- 2.41** Determine (a) a tensão de tração necessária no cabo AC , sabendo que a resultante das três forças exercida no ponto C da haste BC seja ao longo da linha BC , (b) a correspondente intensidade da resultante.
- 2.42** Para o bloco dos Problemas 2.37 e 2.38, determine (a) o valor necessário de α para que a resultante das três forças mostradas seja paralela ao plano inclinado, (b) a correspondente intensidade da resultante.

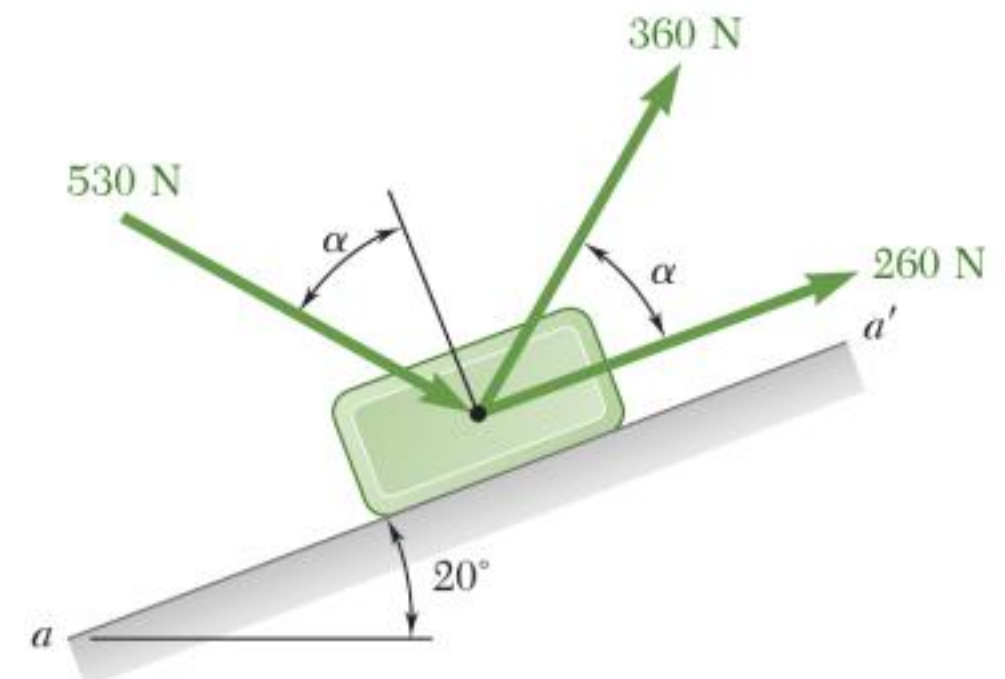


Figura P2.37 e P2.38

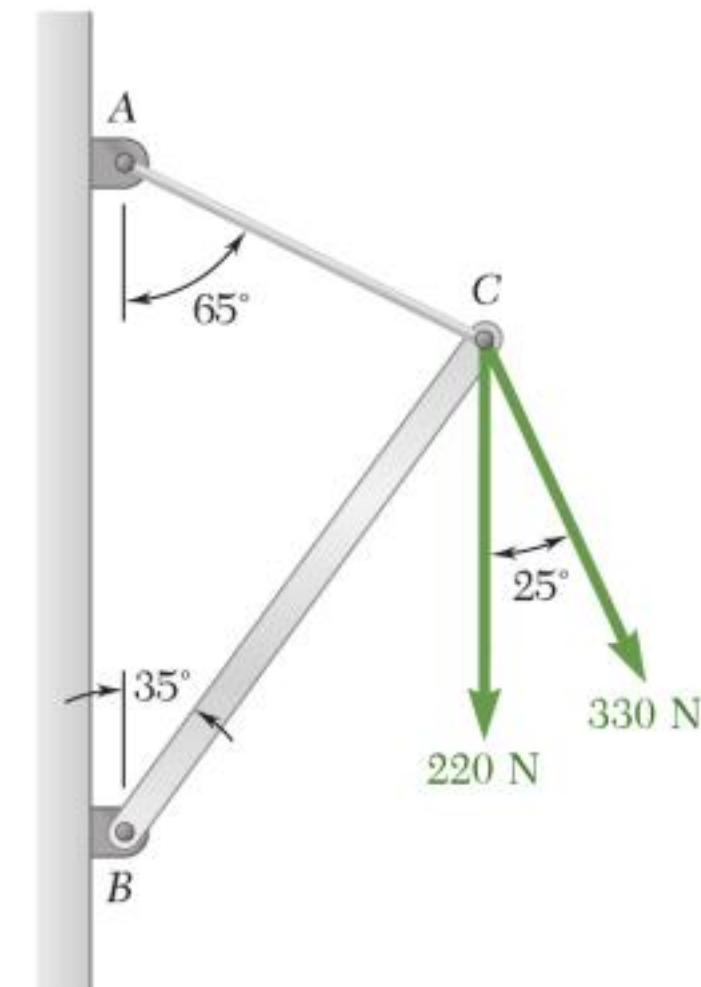


Figura P2.41

2.9 Equilíbrio de uma partícula

Nas seções anteriores, discutimos os métodos para se determinar a resultante de várias forças que atuam sobre uma partícula. Embora isso não tenha ocorrido em nenhum dos problemas considerados até aqui, é perfeitamente possível que a resultante seja zero. Nesse caso, o efeito resultante das forças dadas é nulo, e diz-se que a partícula está em equilíbrio. Temos, então, a seguinte definição: *Quando a resultante de todas as forças que atuam sobre uma partícula é igual a zero, a partícula está em equilíbrio.*

Uma partícula sobre a qual se aplicam duas forças estará em equilíbrio se as duas forças tiverem a mesma intensidade e a mesma linha de ação, mas sentidos opostos. A resultante dessas duas forças é, então, igual a zero. Tal caso é ilustrado na Fig. 2.26.

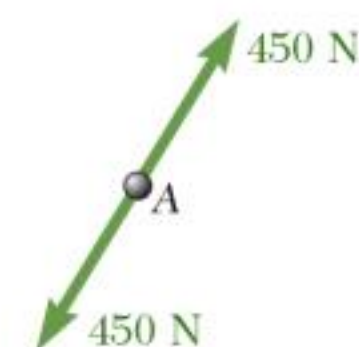


Figura 2.26

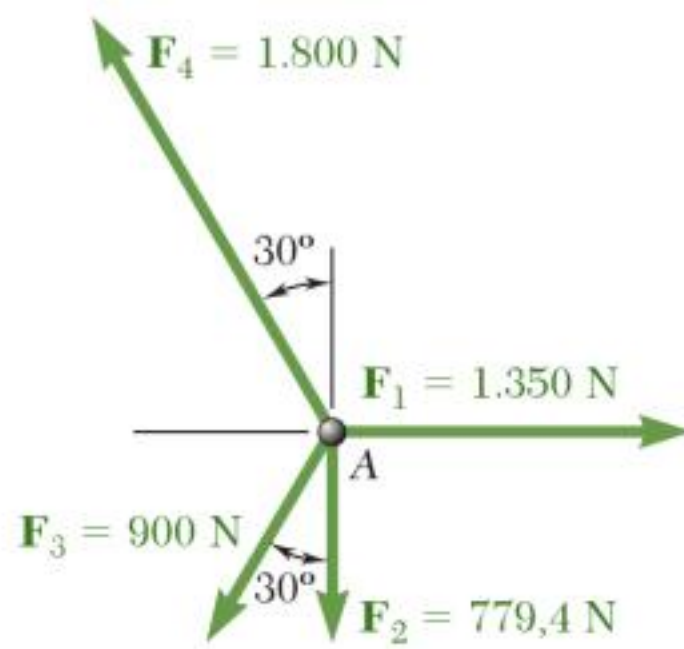


Figura 2.27

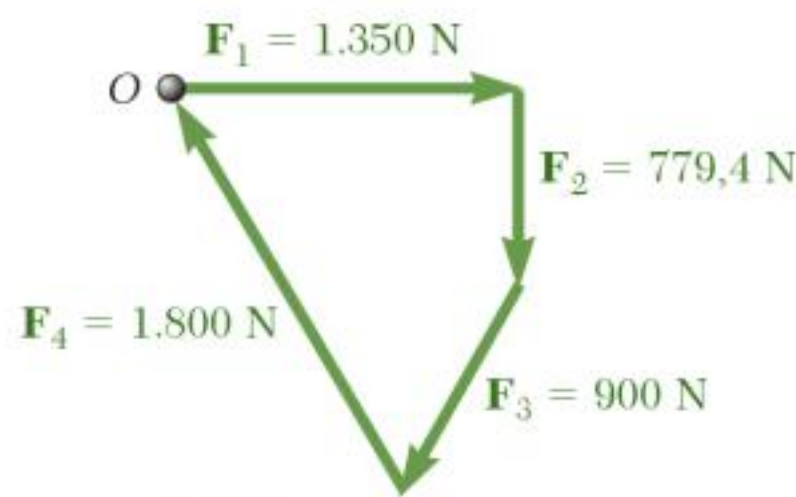


Figura 2.28

Outro caso de equilíbrio de uma partícula é representado na Fig. 2.27, que mostra quatro forças atuando em A. Na Fig. 2.28, a resultante das forças dadas é determinada pela regra do polígono. Começando no ponto O com \mathbf{F}_1 e dispondo as forças no padrão ponta-a-cauda, encontramos que a ponta de \mathbf{F}_4 coincide com o ponto inicial O. Logo, a resultante \mathbf{R} do sistema de forças dado é zero e a partícula está em equilíbrio.

O polígono fechado desenhado na Fig. 2.28 fornece uma expressão gráfica para o equilíbrio de A. Para expressar *algebricamente* as condições de equilíbrio de uma partícula, escrevemos:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Decompondo cada força \mathbf{F} em componentes retangulares, temos:

$$X(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = 0 \quad \text{ou} \quad (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} = 0$$

Concluimos que as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de uma partícula são:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Retomando a partícula mostrada na Fig. 2.27, verificamos que as condições de equilíbrio são satisfeitas. Escrevemos

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 1.350 \text{ N} - (900 \text{ N}) \sin 30^\circ - (1.800 \text{ N}) \sin 30^\circ \\ &= 1.350 \text{ N} - 450 \text{ N} - 900 \text{ N} = 0 \\ \Sigma F_y &= -779,4 \text{ N} - (900 \text{ N}) \cos 30^\circ + (1.800 \text{ N}) \cos 30^\circ \\ &= -779,4 \text{ N} - 779,4 \text{ N} + 1.558,8 \text{ N} = 0 \end{aligned}$$

2.10 Primeira lei de Newton do movimento

No fim do século XVII, Sir Isaac Newton formulou três leis fundamentais nas quais se baseia a ciência da mecânica. A primeira dessas leis pode ser enunciada nos seguintes termos:

Se a força resultante que atua sobre uma partícula é nula, a partícula permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá à velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento).

Dessa lei e da definição de equilíbrio dada na Seção 2.9, conclui-se que uma partícula em equilíbrio ou está em repouso ou se desloca em linha reta à velocidade constante. Na próxima seção, serão considerados vários problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula.

2.11 Problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula e diagramas de corpo livre

Na prática, um problema de engenharia mecânica é derivado de uma situação física real. Um esboço mostrando as condições físicas do problema é conhecido como *diagrama espacial*.

Os métodos de análise discutidos nas seções precedentes aplicam-se a sistemas de forças que atuam sobre uma partícula. Muitos problemas que envolvem estruturas reais, entretanto, podem ser reduzidos a problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula. Isso é feito escolhendo-se uma partícula significativa e traçando-se um diagrama sepa-

rado mostrando essa partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Tal diagrama é denominado *diagrama de corpo livre*.

Como exemplo, considere o caixote de 75 kg mostrado no diagrama espacial da Fig. 2.29a. Esse caixote encontra-se entre dois edifícios, e é carregado em um caminhão que irá removê-lo. O caixote é sustentado por um cabo vertical, que está fixado em A a duas cordas que passam por roldanas presas aos edifícios em B e C. Deseja-se determinar a tração em cada uma das cordas AB e AC.

Para resolver esse problema, deve-se traçar um diagrama de corpo livre mostrando a partícula em equilíbrio. Como estamos interessados nas forças de tração nas cordas, o diagrama de corpo livre deve incluir ao menos uma dessas forças de tração ou, se possível, ambas as forças de tração. Observa-se que o ponto A é um bom corpo livre para esse problema. O diagrama de corpo livre do ponto A está representado na Fig. 2.29b. A figura mostra o ponto A e as forças exercidas nele pelo cabo vertical e pelas duas cordas. A força exercida pelo cabo é dirigida para baixo, e sua intensidade é igual ao peso W do caixote. Recordando a Eq. (1.4), temos:

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

e indicamos esse valor no diagrama de corpo livre. As forças exercidas pelas duas cordas não são conhecidas. Como elas são respectivamente iguais em intensidade às forças de tração na corda AB e na corda AC, vamos designá-las por T_{AB} e T_{AC} e desenhá-las afastando-se de A nas direções mostradas no diagrama espacial. Nenhum outro detalhe é incluído no diagrama de corpo livre.

Como o ponto A está em equilíbrio, as três forças que atuam sobre ele devem formar um triângulo fechado quando desenhadas no padrão ponta-a-cauda. Esse triângulo de forças foi desenhado na Fig. 2.29c. Os valores T_{AB} e T_{AC} das forças de tração nas cordas podem ser encontrados graficamente se o triângulo for desenhado em escala, ou podem ser encontrados por trigonometria. Se for escolhido o último método de solução, usamos a lei dos senos e escrevemos:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

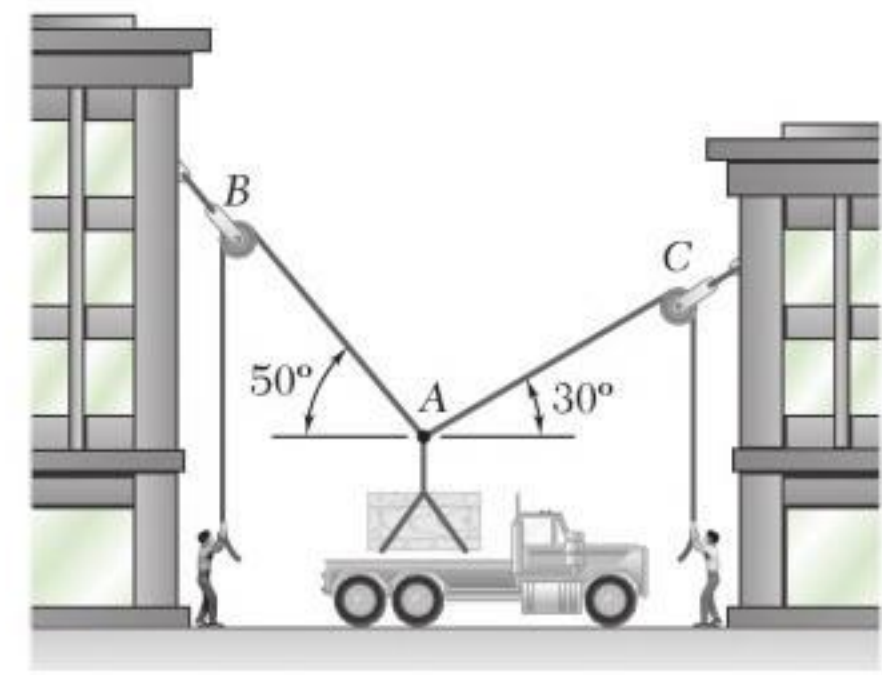
$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Quando uma partícula está em *equilíbrio sob três forças*, o problema pode ser resolvido desenhando-se um triângulo de forças. Quando a partícula está em *equilíbrio sob mais de três forças*, o problema pode ser resolvido graficamente desenhando-se um polígono de forças. Se desejarmos uma solução analítica, devemos resolver com auxílio das *equações de equilíbrio*, dadas na Seção 2.9:

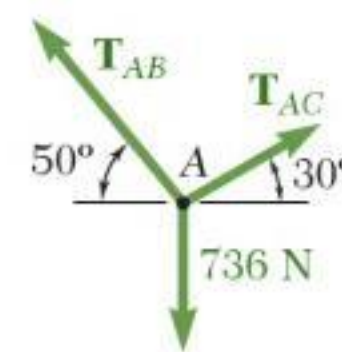
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Essas equações podem ser resolvidas para não mais do que *duas incógnitas*; de modo idêntico, o triângulo de forças usado nesse caso de equilíbrio sob três forças pode ser resolvido para duas incógnitas.

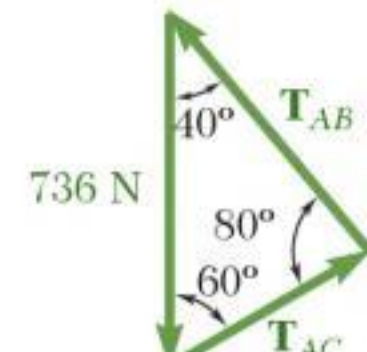
Os tipos mais comuns de problemas são aqueles nos quais as duas incógnitas representam (1) os dois componentes (ou a intensidade e a direção) de uma única força, (2) as intensidades de duas forças, cada qual de direção conhecida. Problemas envolvendo a determinação do valor máximo ou mínimo da intensidade de uma força são também encontrados (ver Problemas 2.57 a 2.61).



(a) Diagrama espacial



(b) Diagrama de corpo livre

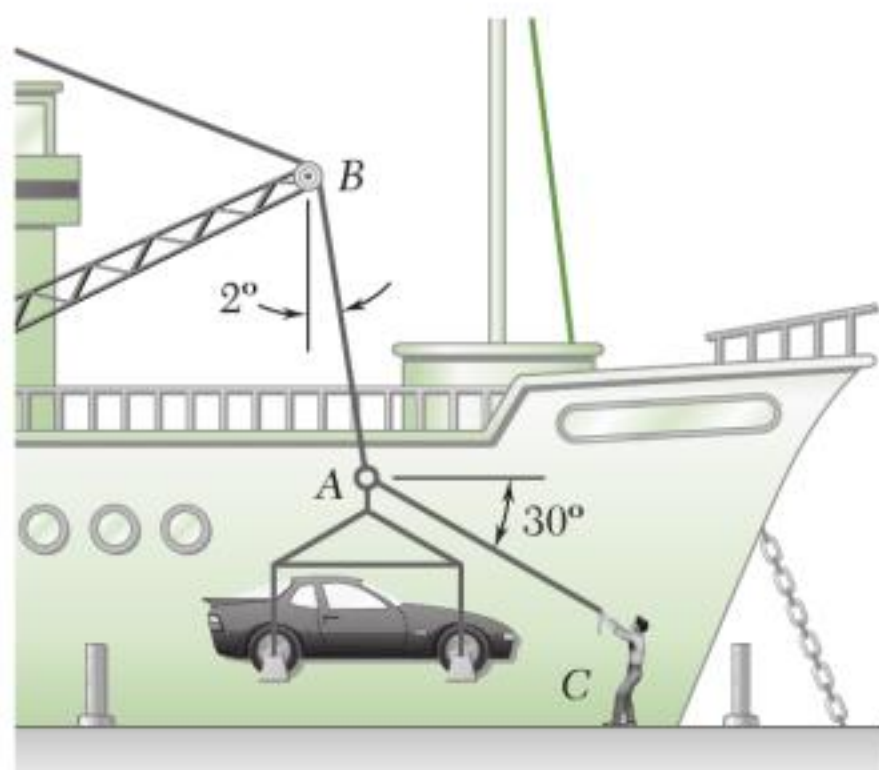


(c) Triângulo de forças

Figura 2.29



Foto 2.1 Como ilustra o exemplo anterior, é possível determinar as forças de tração nos cabos que sustentam o eixo mostrado tratando o gancho como uma partícula e, então, aplicando as equações de equilíbrio às forças que atuam sobre o gancho.



PROBLEMA RESOLVIDO 2.4

Numa operação de descarregamento de um navio, um automóvel de 15.750 N é sustentado por um cabo. Uma corda é amarrada ao cabo em A e puxada para pousar o automóvel na posição desejada. O ângulo entre o cabo e a vertical é de 2°, enquanto o ângulo entre a corda e a horizontal é de 30°. Qual é a tração da corda?

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. O ponto A é escolhido como um corpo livre, podendo, assim, desenhar o diagrama de corpo livre completo. T_{AB} é a tração no cabo AB, e T_{AC} é a tração na corda.

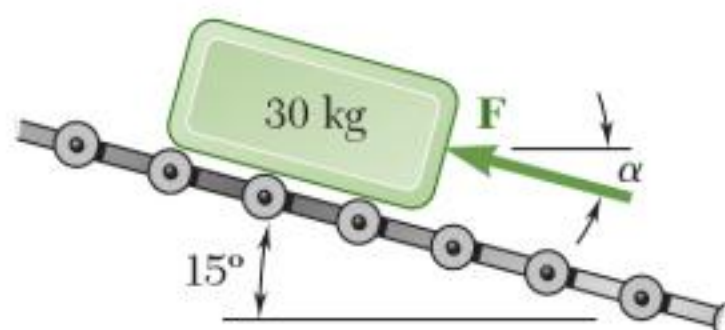
Condição de equilíbrio. Como apenas três forças atuam no corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para expressar que o corpo está em equilíbrio. Usando a lei dos senos, temos:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{15.750 \text{ N}}{\sin 58^\circ}$$

Com uma calculadora, primeiro calculamos e armazenamos na memória o valor do último quociente. Multiplicando-se esse valor sucessivamente por $\sin 120^\circ$ e por $\sin 2^\circ$, obtemos

$$T_{AB} = 16.084 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 648 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 2.5

Determine a intensidade e a direção da menor força F que irá manter em equilíbrio a embalagem mostrada na figura. Observe que a força exercida pelos roletes a embalagem é perpendicular ao plano inclinado.

SOLUÇÃO

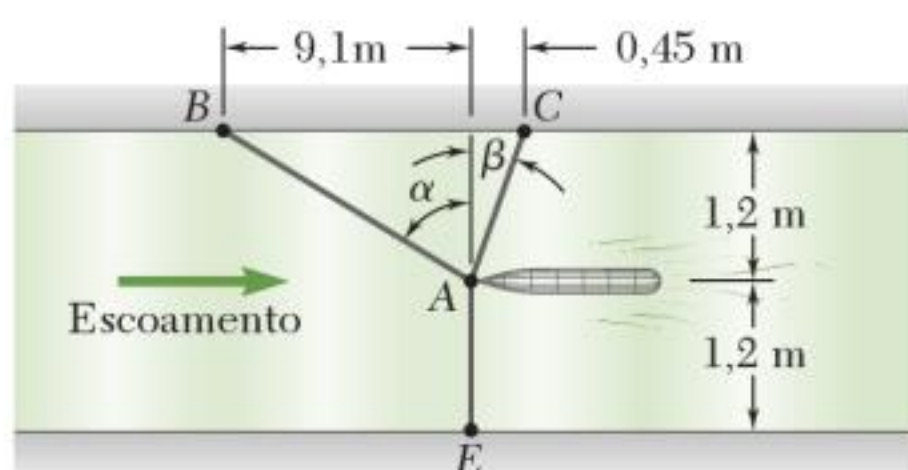
Diagrama de corpo livre. Escolhemos o pacote como um corpo livre, supondo que ele pode ser tratado como uma partícula. Desenhamos o diagrama de corpo livre correspondente.

Condição de equilíbrio. Como apenas três forças atuam no corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para expressar que o corpo está em equilíbrio. A linha $I-I'$ representa a direção conhecida de P . Para obter o valor mínimo da força F , escolhemos a direção de F perpendicular à de P . Da geometria do triângulo obtido, encontramos:

$$F = (294 \text{ N}) \sin 15^\circ = 76,1 \text{ N}$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$F = 76,1 \text{ N} \angle 15^\circ \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 2.6

Como parte do projeto de um novo baco a vela, deseja-se determinar a força de arrasto que pode ser esperada a uma dada velocidade. Para tal, é colocado um modelo do casco proposto em um canal de teste e são usados três cabos para manter sua proa na linha do centro do canal. Leituras do dinamômetro indicam que, para uma dada velocidade, a tração é de 180 N no cabo AB e de 270 N no cabo AE. Determine a força de arrasto exercida no casco e a tração no cabo AC.

SOLUÇÃO

Determinação dos ângulos. Primeiro, determinam-se os ângulos α e β que definem as direções dos cabos AB e AC. Temos:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{2,1 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} = 1,75 & \tan \beta &= \frac{0,45 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} = 0,375 \\ \alpha &= 60,26^\circ & \beta &= 20,56^\circ \end{aligned}$$

Diagrama de corpo livre. Escolhendo o casco como um corpo livre, desenhamos o diagrama de corpo livre mostrado. Esse inclui as forças exercidas pelos três cabos sobre o casco, assim como a força de arrasto F_D exercida pelo escoamento.

Condição de equilíbrio. Expressamos que o casco está em equilíbrio escrevendo que a resultante de todas as forças é zero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \quad (1)$$

Como mais de três forças estão envolvidas, decompomos as forças em componente x e y :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{AB} &= -(180 \text{ N}) \sin 60,26^\circ \mathbf{i} + (180 \text{ N}) \cos 60,26^\circ \mathbf{j} \\ &= -(156,29 \text{ N}) \mathbf{i} + (89,29 \text{ N}) \mathbf{j} \\ \mathbf{T}_{AC} &= T_{AC} \sin 20,56^\circ \mathbf{i} + T_{AC} \cos 20,56^\circ \mathbf{j} \\ &= 0,3512 T_{AC} \mathbf{i} + 0,9363 T_{AC} \mathbf{j} \\ \mathbf{T}_{AE} &= -(270 \text{ N}) \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_D &= F_D \mathbf{i} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões obtidas na Eq. (1) e fatorando os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , temos:

$$(-156,29 \text{ N} + 0,3512 T_{AC} + F_D) \mathbf{i} + (89,29 \text{ N} + 0,9363 T_{AC} - 270 \text{ N}) \mathbf{j} = 0$$

Essa equação será satisfeita se, e somente se, os coeficientes de \mathbf{i} e \mathbf{j} forem iguais a zero. Obtemos, então, duas equações de equilíbrio mostradas a seguir, que expressam, respectivamente, que a soma dos componentes x e a soma dos componentes y das forças dadas devem ser iguais a zero.

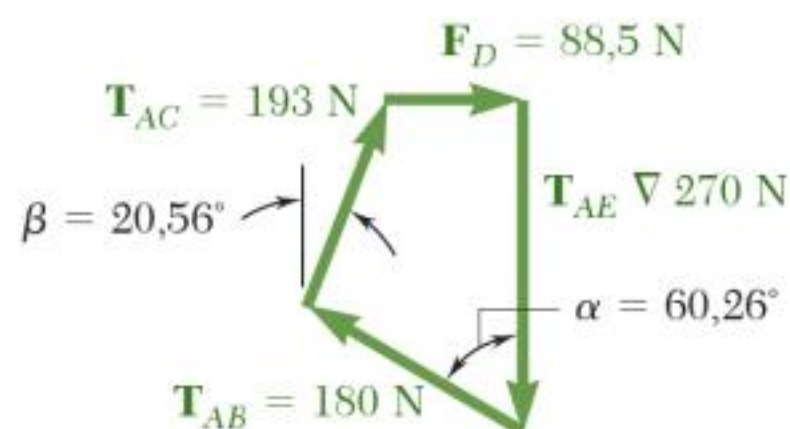
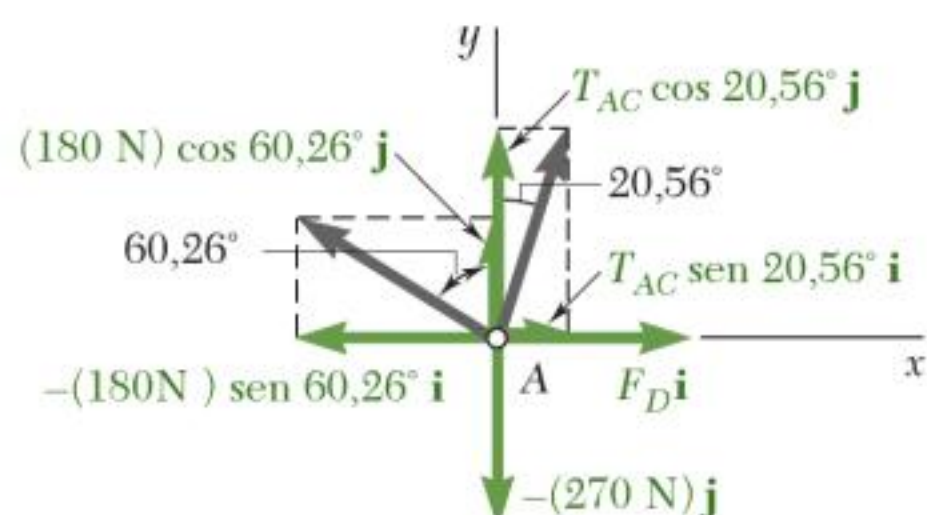
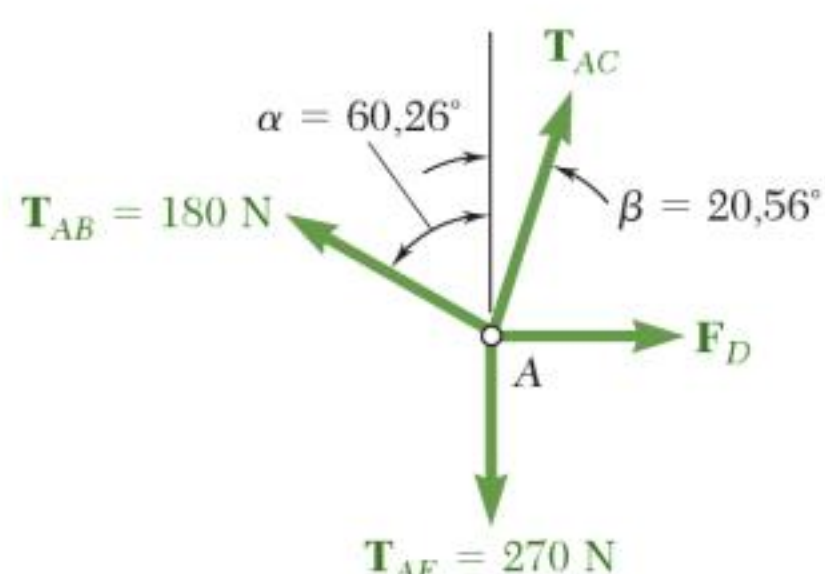
$$(\Sigma F_x = 0:) \quad -156,29 \text{ N} + 0,3512 T_{AC} + F_D = 0 \quad (2)$$

$$(\Sigma F_y = 0:) \quad 89,29 \text{ N} + 0,9363 T_{AC} - 270 \text{ N} = 0 \quad (3)$$

A partir da Eq. (3), encontramos e, substituindo esse valor em Eq. (2),

$$\begin{aligned} T_{AC} &= +193 \text{ N} \quad \blacktriangleleft \\ F_D &= +88,5 \text{ N} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Ao traçarmos o diagrama de corpo livres, pressupomos um sentido para cada força desconhecida. O sinal positivo na resposta indica que o sentido proposto está correto. O polígono de forças completo pode ser esquematizado para se verificar os resultados.



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando uma partícula está em *equilíbrio*, a resultante das forças que atuam sobre a partícula tem que ser zero. Ao expressar esse fato para uma partícula sob a ação de *forças coplanares*, obtêm-se duas relações entre essas forças. Como vimos nos problemas resolvidos anteriores, essas relações podem ser usadas para se determinar duas incógnitas, tais como a intensidade e a direção de uma força ou as intensidades de duas forças.

Traçar um diagrama de corpo livre é o primeiro passo na solução de um problema que envolva o equilíbrio de uma partícula. Esse diagrama representa a partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Indique no seu diagrama de corpo livre as intensidades das forças conhecidas, bem como qualquer ângulo ou dimensões que definam a direção de uma força. Qualquer intensidade ou ângulo desconhecido deve ser representado por um símbolo apropriado. Nada mais deve ser incluído no diagrama de corpo livre.

Traçar um diagrama de corpo livre claro e preciso é fundamental na solução de qualquer problema de equilíbrio. Se saltar esse passo, você pode economizar lápis e papel, mas muito provavelmente chegue a uma solução errada.

Caso 1. Se apenas três forças estão envolvidas no diagrama de corpo livre, o restante da solução é mais bem executado traçando-se essas forças pelo padrão ponta-a-cauda para formar um *triângulo de forças*. Esse triângulo pode ser resolvido graficamente ou por trigonometria, desde que não haja mais do que duas incógnitas [Problemas Resolvidos 2.4 e 2.5].

Caso 2. Se mais de três forças estão envolvidas, é mais vantajoso usar uma *solução analítica*. Comece selecionando eixos x e y apropriados e decompõe cada uma das forças mostradas no diagrama de corpo livre em componentes x e y . Expressando que a soma dos componentes x e a soma dos componentes y de todas as forças são ambas iguais a zero, obterá duas equações que podem ser resolvidas para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.6].

É fortemente recomendado que, quando se adota uma solução analítica, as equações de equilíbrio sejam escritas na mesma forma que as Eqs. (2) e (3) do Problema Resolvido 2.6. A prática, adotada por alguns estudantes, de colocar inicialmente as incógnitas no lado esquerdo da equação e as quantidades conhecidas no lado direito, pode levar à confusão na atribuição do sinal apropriado a cada termo.

Observamos que, independentemente do método empregado para resolver um problema de equilíbrio bidimensional, é possível determinar no máximo duas incógnitas. Se um problema bidimensional envolve mais de duas incógnitas, uma ou mais relações adicionais têm que ser obtidas a partir da informação contida no enunciado do problema.

PROBLEMAS

2.43 Dois cabos estão ligados em C e são carregados como mostra a figura. Sabendo que $\alpha = 20^\circ$, determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

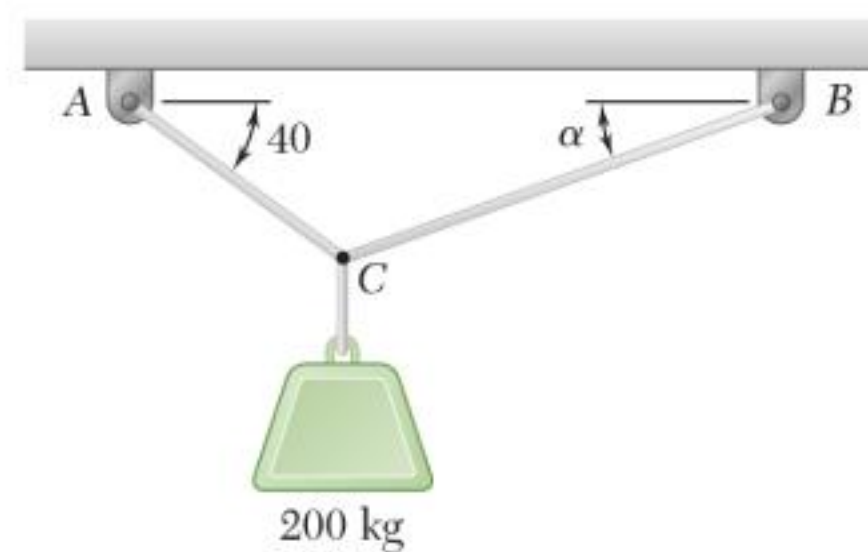


Figura P2.43

2.44 Dois cabos estão ligados em C e são carregados como mostra a figura. Determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

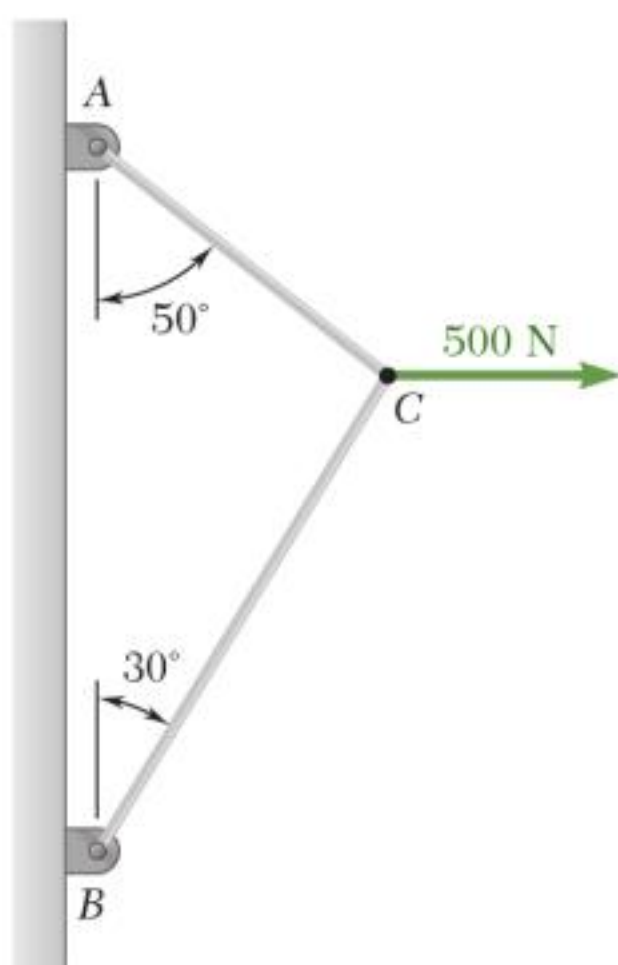


Figura P2.44

2.45 Dois cabos estão ligados em C e são carregados como mostra a figura. Sabendo que $P = 500$ N e $\alpha = 60^\circ$, determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

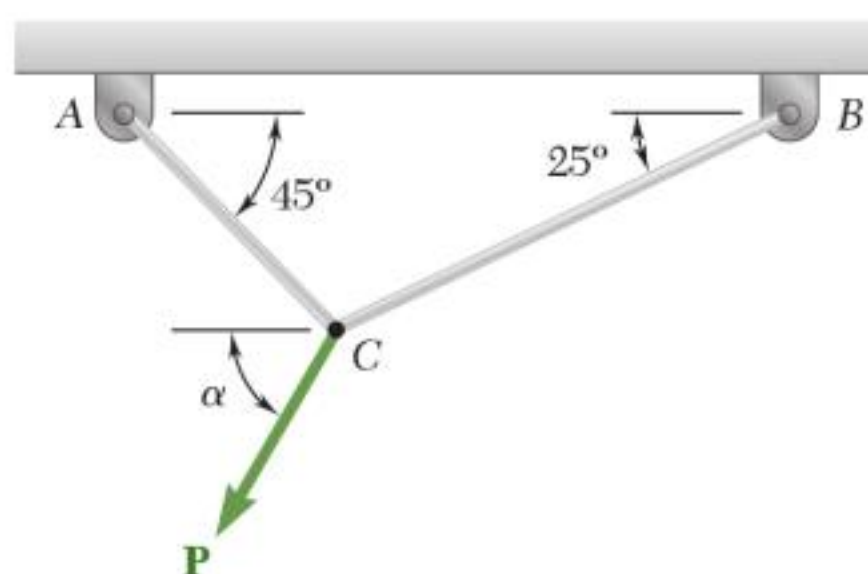


Figura P2.45

2.46 Dois cabos estão ligados em C e são carregados como mostra a figura. Determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

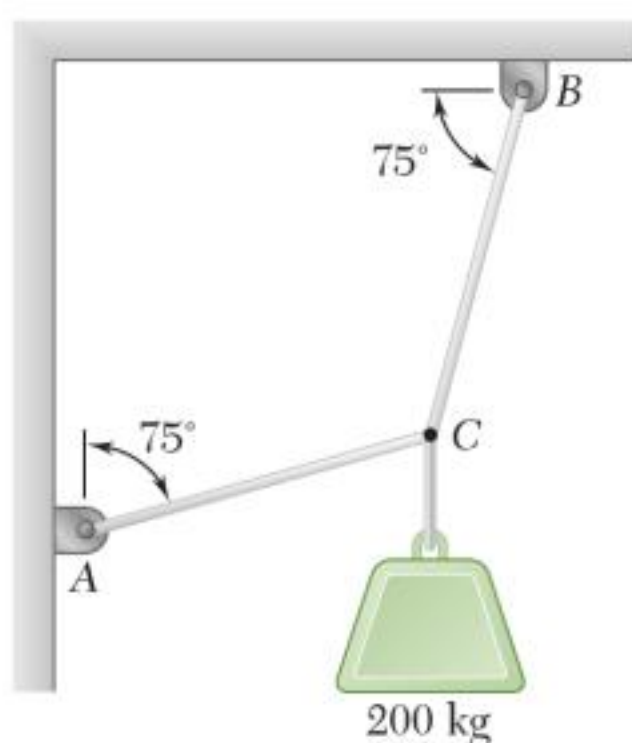


Figura P2.46

- 2.47** Sabendo que $\alpha = 20^\circ$, determine a tração (a) no cabo AC e (b) na corda BC.

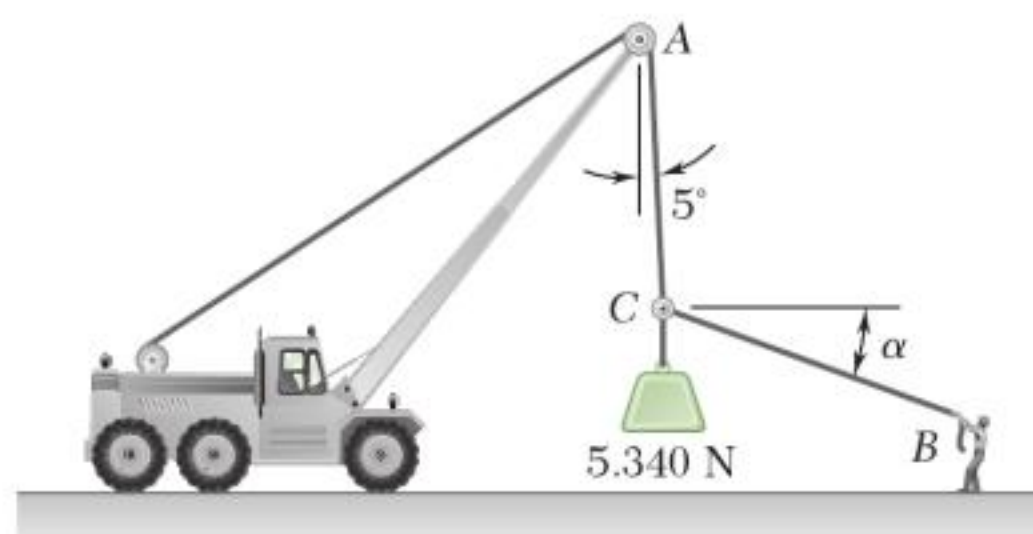


Figura P2.47

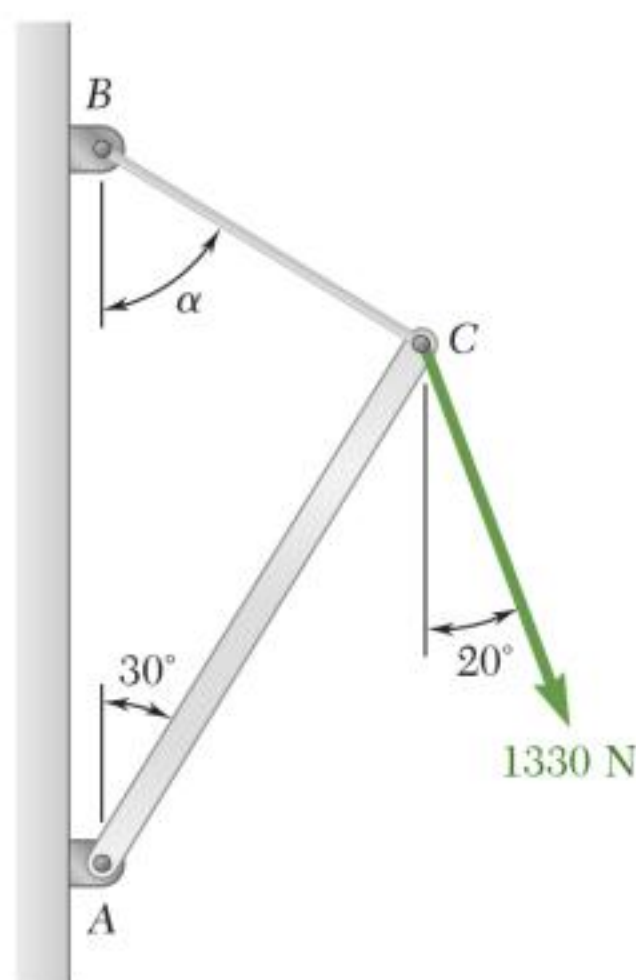


Figura P2.48

- 2.48** Sabendo que $\alpha = 55^\circ$ e que a haste AC exerce no pino C uma força dirigida ao longo da linha AC, determine (a) a intensidade dessa força e (b) a tração no cabo BC.
- 2.49** Duas forças **P** e **Q** são aplicadas tal como mostra a figura a uma conexão de uma aeronave. Sabendo que a conexão está em equilíbrio e que $P = 2.220 \text{ N}$ e $Q = 2.890 \text{ N}$, determine as intensidades das forças exercidas nas barras A e B.

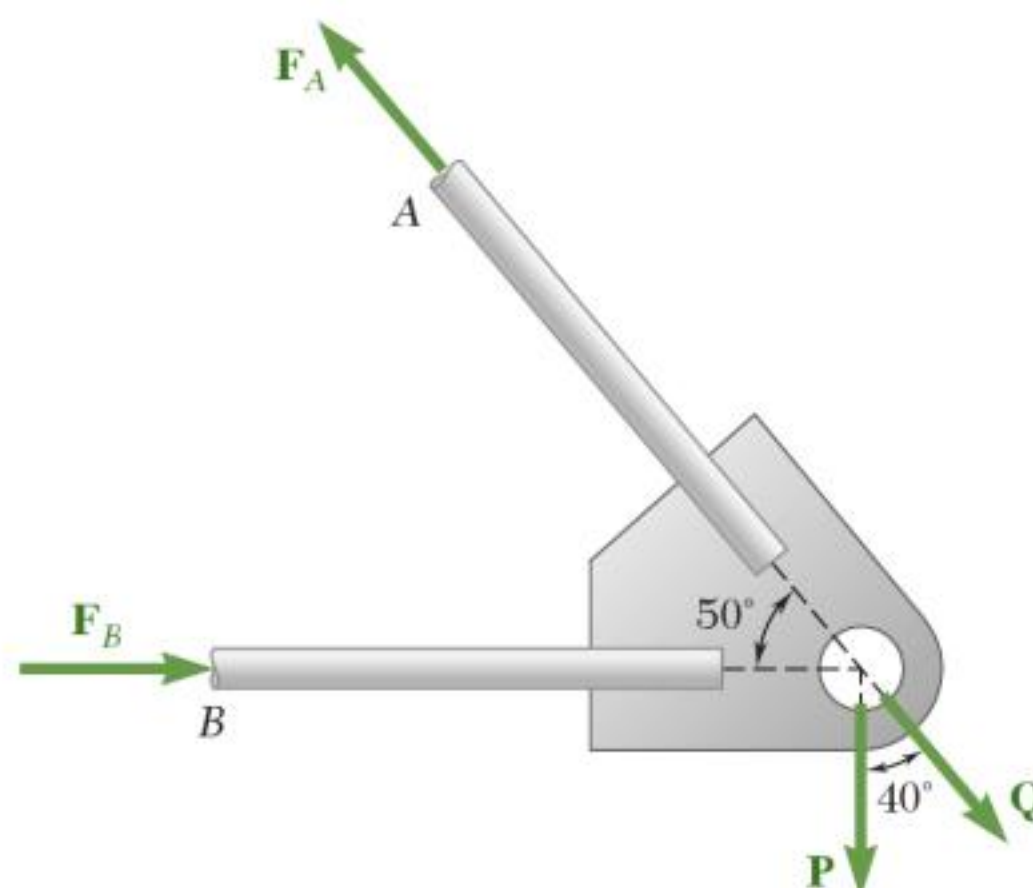


Figura P2.49 e P2.50

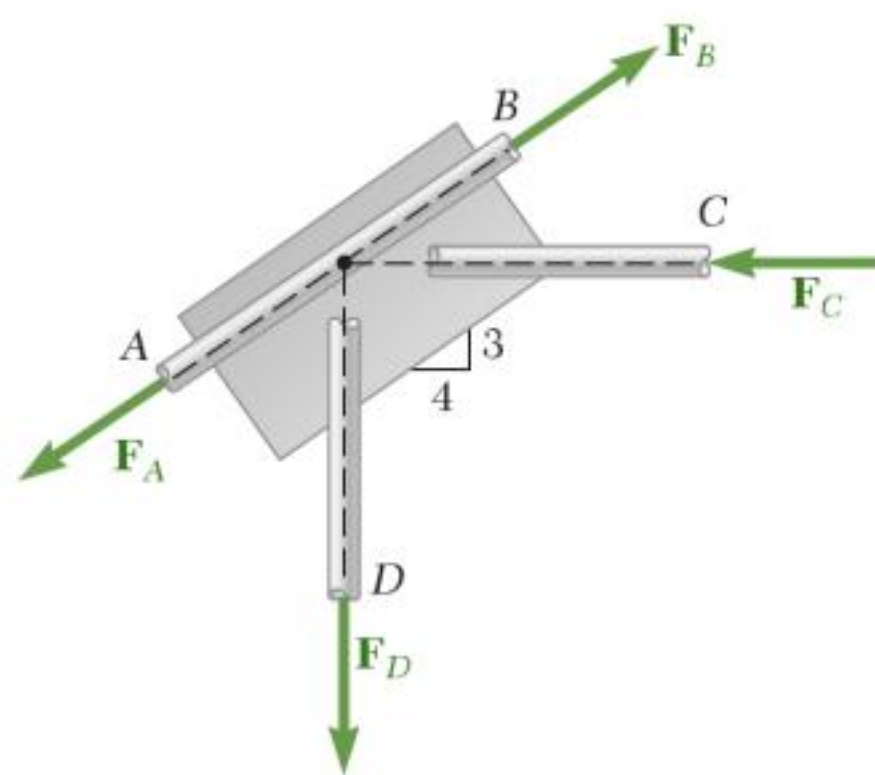


Figura P2.51 e P2.52

- 2.50** Duas forças **P** e **Q** são aplicadas tal como mostra a figura a uma conexão de uma aeronave. Sabendo que a conexão está em equilíbrio e as intensidades das forças exercidas nas barras A e B são $F_A = 3330 \text{ N}$ e $F_B = 1.780 \text{ N}$, determine as intensidades das forças **P** e **Q**.
- 2.51** Uma conexão soldada está em equilíbrio sob a ação de quatro forças como mostra a figura. Sabendo que $F_A = 8 \text{ kN}$ e $F_B = 16 \text{ kN}$, determine as intensidades das outras duas forças.
- 2.52** Uma conexão soldada está em equilíbrio sob a ação de quatro forças como mostra a figura. Sabendo que $F_A = 5 \text{ kN}$ e $F_D = 6 \text{ kN}$, determine as intensidades das outras duas forças.

- 2.53** Dois cabos ligados em C estão carregados como mostra a figura. Sabendo que $Q = 266$ N, determine a tensão (a) no cabo AC , (b) no cabo BC .
- 2.54** Dois cabos ligados em C estão carregados como mostra a figura. Determine o valor de Q de forma que a tensão não exceda 226 N em nenhum dos cabos.
- 2.55** Um marinheiro foi resgatado usando uma cadeira de contramestre suspensa por uma roldana que pode se movimentar livremente suportada pelo cabo ACB e é puxada com velocidade constante pelo cabo CD . Sabendo que $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 10^\circ$ e que a cadeira de contramestre e o marinheiro juntos é 900 N, determine a tensão (a) suportada pelo cabo ACB , (b) pelo cabo de tração CD .

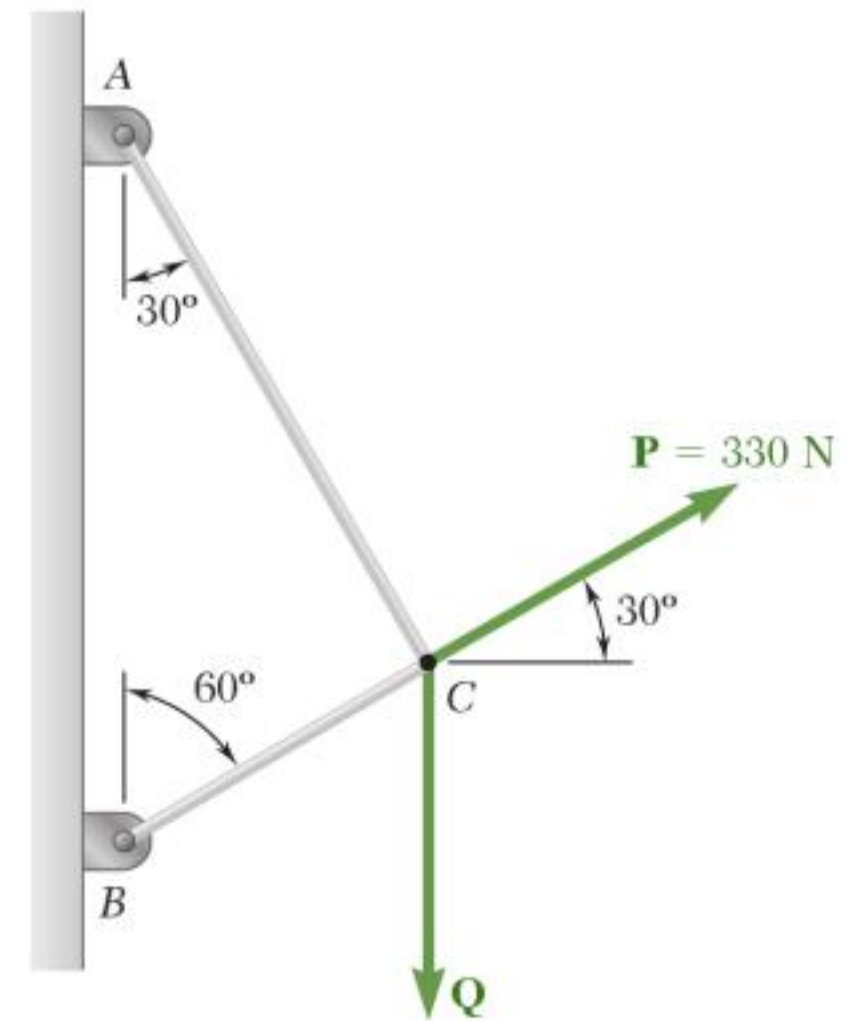


Figura P2.53 e P2.54

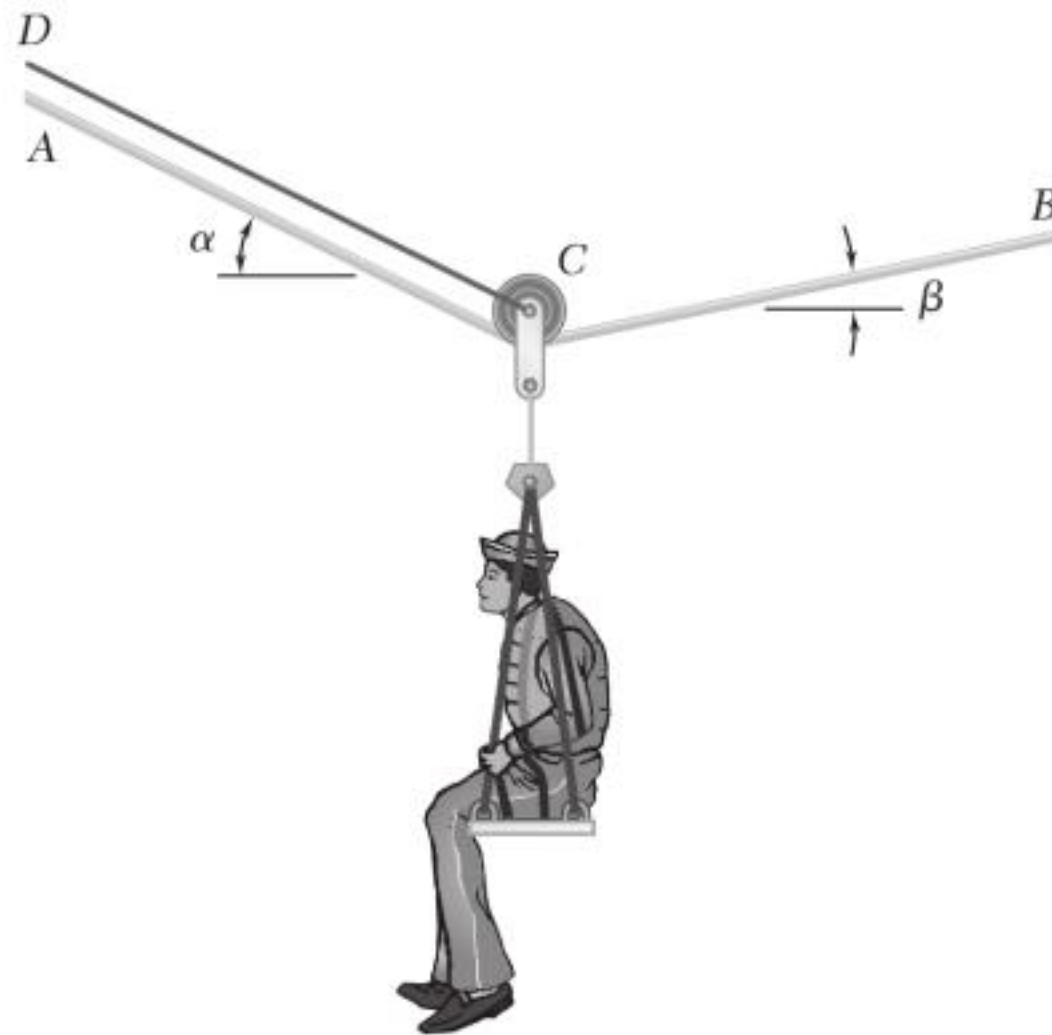


Figura P2.55 e P2.56

- 2.56** Um marinheiro foi resgatado usando uma cadeira de contramestre suspensa por uma roldana que pode se movimentar livremente suportada pelo cabo ACB e é puxada com velocidade constante pelo cabo CD . Sabendo que $\alpha = 25^\circ$ e $\beta = 15^\circ$ e que a tensão no cabo CD é 80 N, determine (a) o peso da cadeira de contramestre e do marinheiro, (b) a tensão suportada pelo cabo ACB .
- 2.57** Para os cabos do Problema 2.45, sabe-se que a máxima tensão admissível é de 600 N no cabo AC e 750 N no cabo BC . Determine (a) a máxima força P que pode ser aplicada em C , (b) o correspondente valor de α .
- 2.58** Para a situação descrita na Fig. P2.47, determine (a) o valor de α para que a tensão na corda BC seja a menor possível, (b) o valor correspondente dessa tensão.
- 2.59** Para a estrutura carregada do Problema 2.48, determine (a) o valor de α para que a tensão no cabo BC seja a menor possível, (b) o valor correspondente dessa tensão.
- 2.60** Sabendo que as porções AC e BC do cabo ACB devem ser iguais, determine o menor comprimento de cabo que pode ser usado para suportar a carga mostrada se a tração no cabo não puder exceder 870 N.

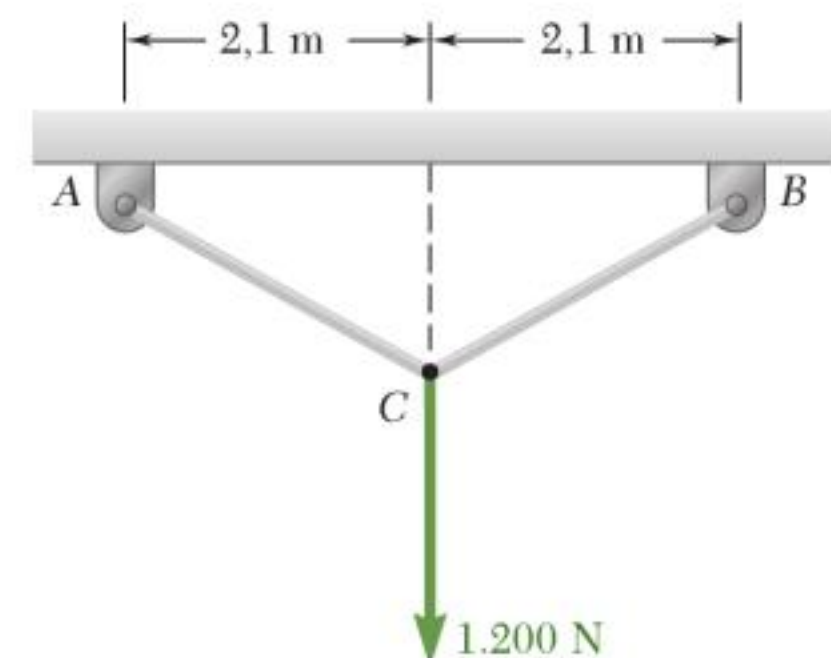


Figura P2.60

- 2.61** Dois cabos ligados em C são carregados como mostra a figura. Sabendo que a tração máxima admissível em cada cabo é de 800 N, determine (a) a maior intensidade da força \mathbf{P} que pode ser aplicada em C , (b) o correspondente valor de α .

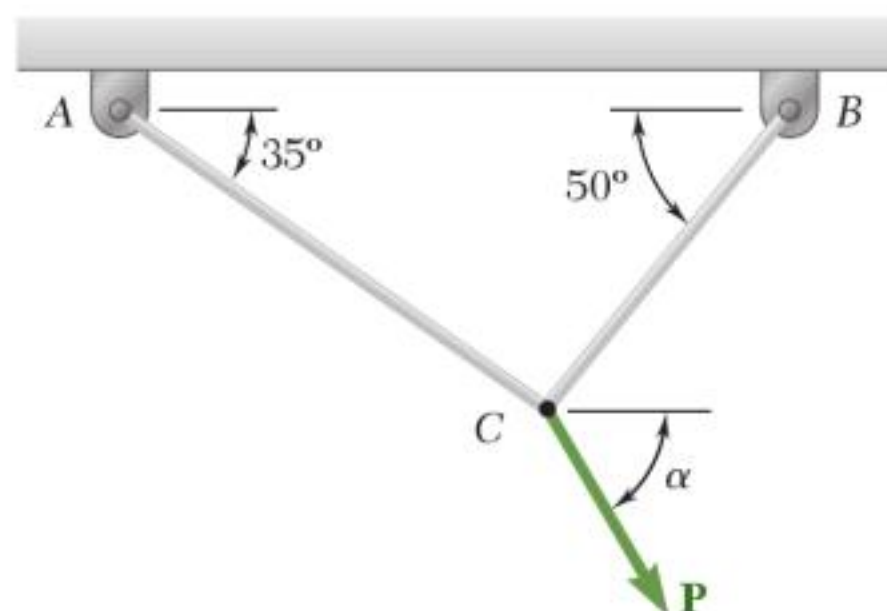


Figura P2.61 e P2.62

- 2.62** Dois cabos ligados em C são carregados como mostra a figura. Sabendo que a tração máxima admissível é 1.200 N no cabo AC e 600 N no cabo BC , determine (a) a maior intensidade da força \mathbf{P} que pode ser aplicada em C , (b) o correspondente valor de α .

- 2.63** O cursor A é ligado a uma carga de 220 N e pode deslizar sem atrito sobre a barra horizontal. Determine a intensidade da força \mathbf{P} para que haja equilíbrio do cursor quando (a) $x = 0,1$ m, (b) $x = 0,4$ m.

- 2.64** O cursor A é ligado a uma carga de 220 N e pode deslizar sem atrito sobre a barra horizontal. Determine a distância x para que o cursor esteja em equilíbrio quando $P = 210$ N.

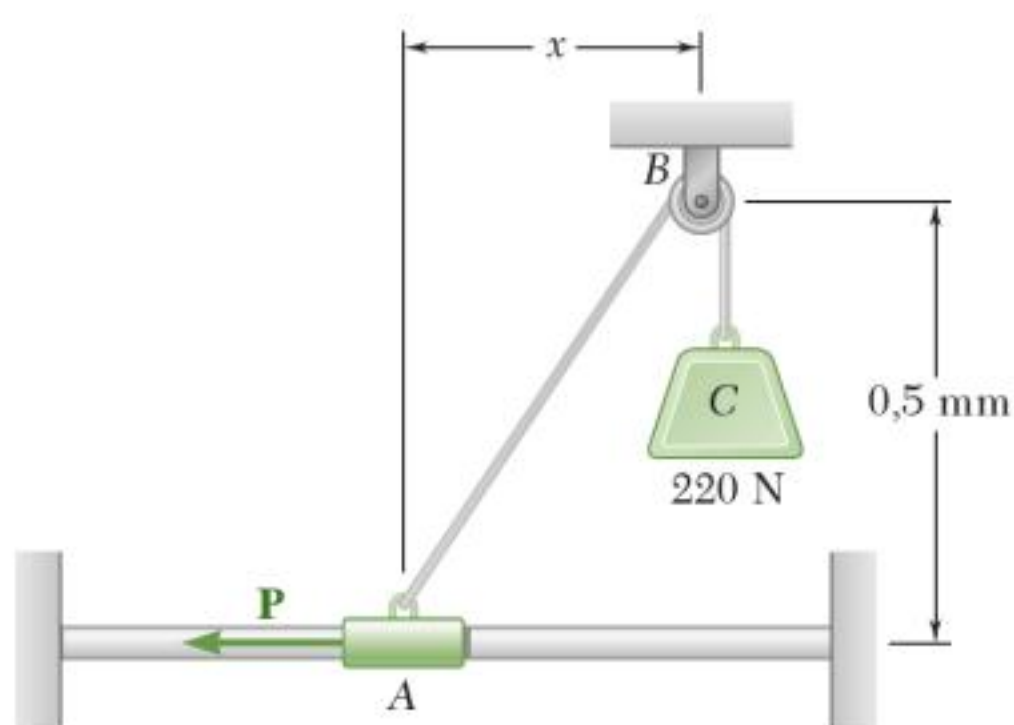


Figura P2.63 e P2.64

- 2.65** Um peso cuja massa é 160 kg é sustentado pelo sistema de corda e roldana mostrado na figura. Sabendo que $\beta = 20^\circ$, determine a intensidade, a direção e o sentido da força \mathbf{P} que deve ser exercida no lado livre da corda para se manter o equilíbrio. (Dica: A tensão na corda é a mesma em cada lado para uma roldana simples. Isto será provado no Cap. 4).

- 2.66** Um peso cuja massa é 160 kg é sustentado pelo sistema de corda e roldana mostrado na figura. Sabendo que $\alpha = 20^\circ$, determine (a) o ângulo β , (b) a intensidade que a força \mathbf{P} é exercida no lado livre da corda para se manter o equilíbrio. (Ver a dica do Problema 2.65.)

- 2.67** Um caixote de 2.670 N é sustentado por vários sistemas de corda e roldana como mostra a figura. Determine para cada caso a tração na corda. (Ver a dica do Problema 2.65.)

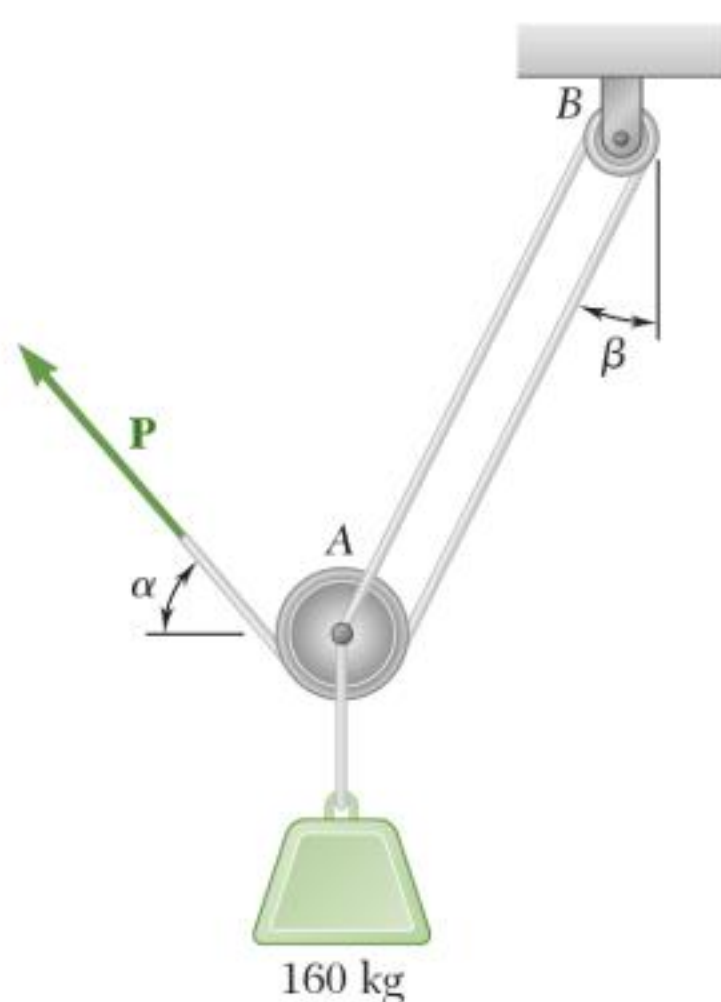


Figura P2.65 e P2.66

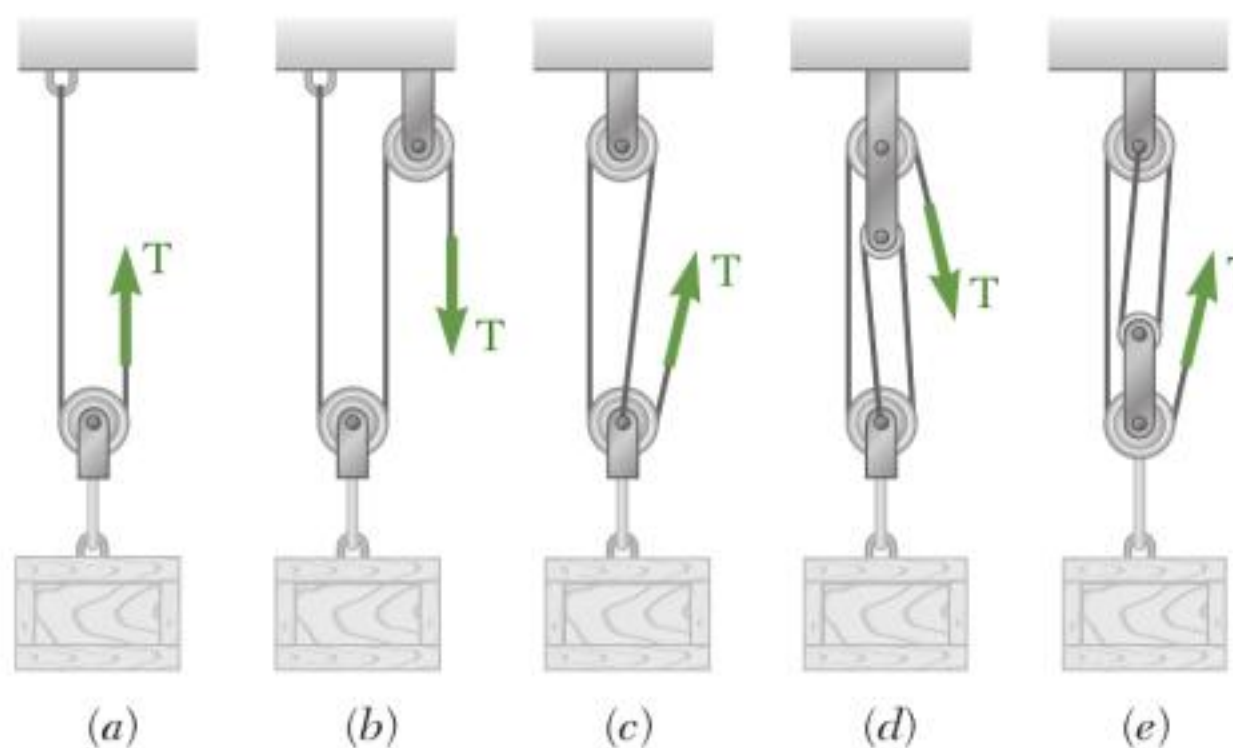


Figura P2.67

- 2.68** Solucione as partes *b* e *d* do Problema 2.67 considerando que o lado livre da corda está preso ao caixote.
- 2.69** Uma carga Q é aplicada à roldana C , que pode rolar no cabo ACB . A roldana é segura na posição mostrada por um segundo cabo CAD , que passa pela roldana A e sustenta uma carga P . Sabendo que $P = 750$ N, determine (a) a tração no cabo ACB , (b) a intensidade da carga Q .
- 2.70** Uma carga Q de 1.800 N é aplicada à roldana C , que pode rolar no cabo ACB . A roldana é segura na posição mostrada por um segundo cabo CAD , que passa pela roldana A e sustenta uma carga P . Determine (a) a tração no cabo ACB , (b) a intensidade da carga P .

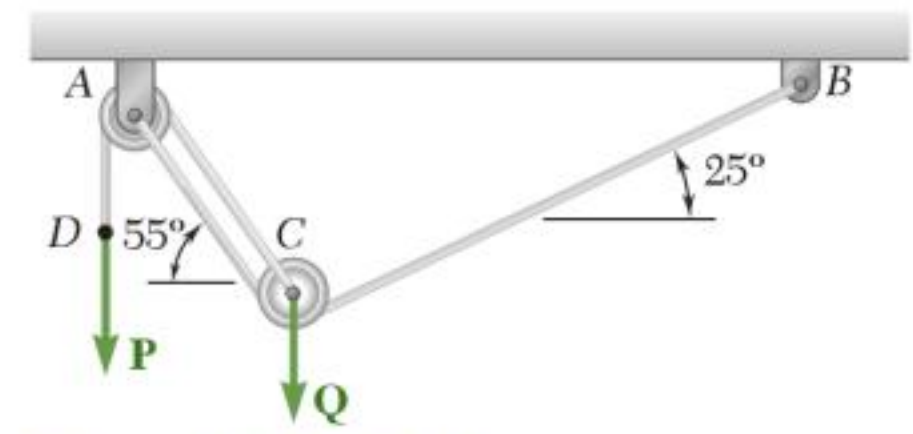


Figura P2.69 e P2.70

FORÇAS NO ESPAÇO

2.12 Componentes retangulares de uma força no espaço

Os problemas considerados na primeira parte deste capítulo envolveram somente duas dimensões; podem ser formulados e solucionados em um único plano. Nesta seção e nas seções restantes deste capítulo, vamos discutir problemas que envolvem as três dimensões do espaço.

Considere a força \mathbf{F} atuando na origem O do sistema de coordenadas retangulares x, y, z . Para definir a direção de \mathbf{F} , traçamos o plano vertical $OBAC$ contendo \mathbf{F} (Fig. 2.30a). Esse plano passa pelo eixo vertical y ; sua orientação é definida pelo ângulo ϕ que ele forma com o plano xy . A direção de \mathbf{F} no plano é definida pelo ângulo θ_y que \mathbf{F} forma com o eixo y . A força \mathbf{F} pode ser decomposta em um componente vertical \mathbf{F}_y e um componente horizontal \mathbf{F}_h ; essa operação, mostrada na Fig. 2.30b, é feita no plano $OBAC$ de acordo com as regras desenvolvidas na primeira parte do capítulo. Os componentes escalares correspondentes são:

$$F_y = F \cos \theta_y \quad F_h = F \sin \theta_y \quad (2.16)$$

Mas \mathbf{F}_h pode ser decomposta em dois componentes retangulares, \mathbf{F}_x , e \mathbf{F}_z ao longo dos eixos x e z , respectivamente. Essa operação, mostrada na Fig. 2.30c, é feita no plano xz . Obtemos as seguintes expressões para os componentes escalares correspondentes:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \\ F_z &= F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

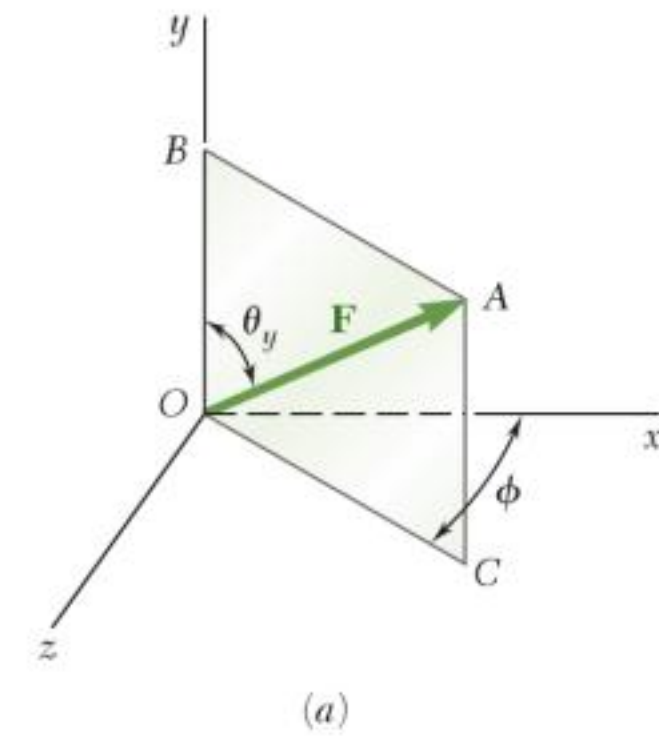
A força \mathbf{F} dada foi então decomposta em três componentes retangulares vetoriais \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y e \mathbf{F}_z , que estão dirigidos ao longo dos três eixos coordenados.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos OAB e OCD da Fig. 2.30, escrevemos:

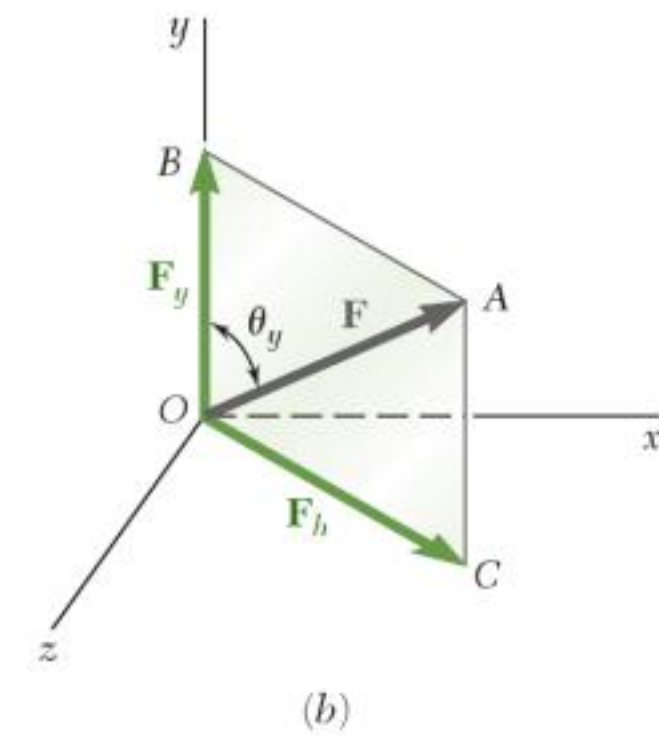
$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

Eliminando F_h^2 dessas duas equações e resolvendo para F , obtemos a seguinte relação entre a intensidade de \mathbf{F} e seus componentes retangulares escalares:

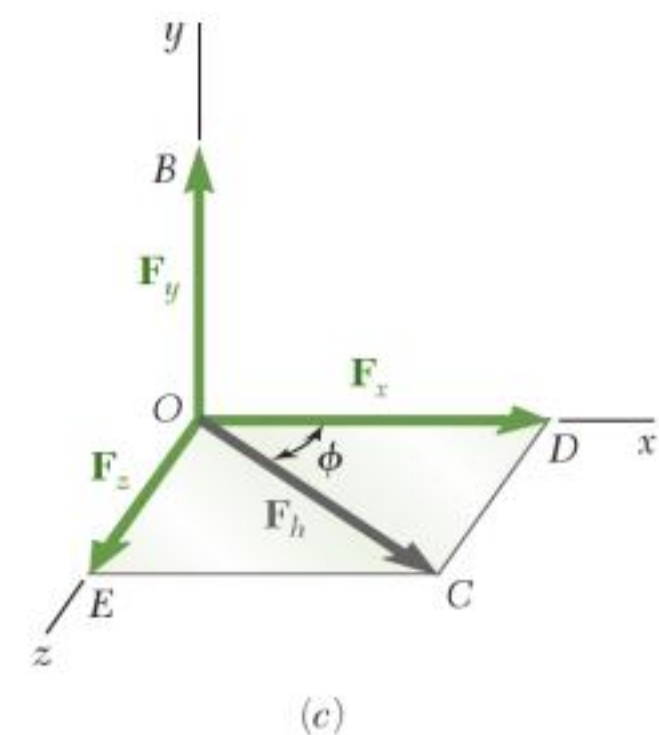
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2.30

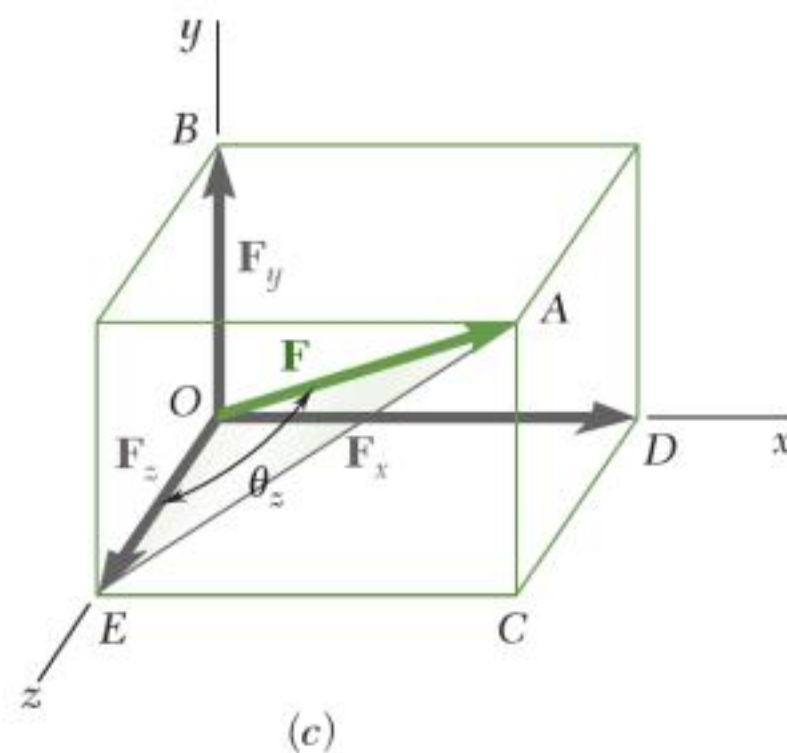
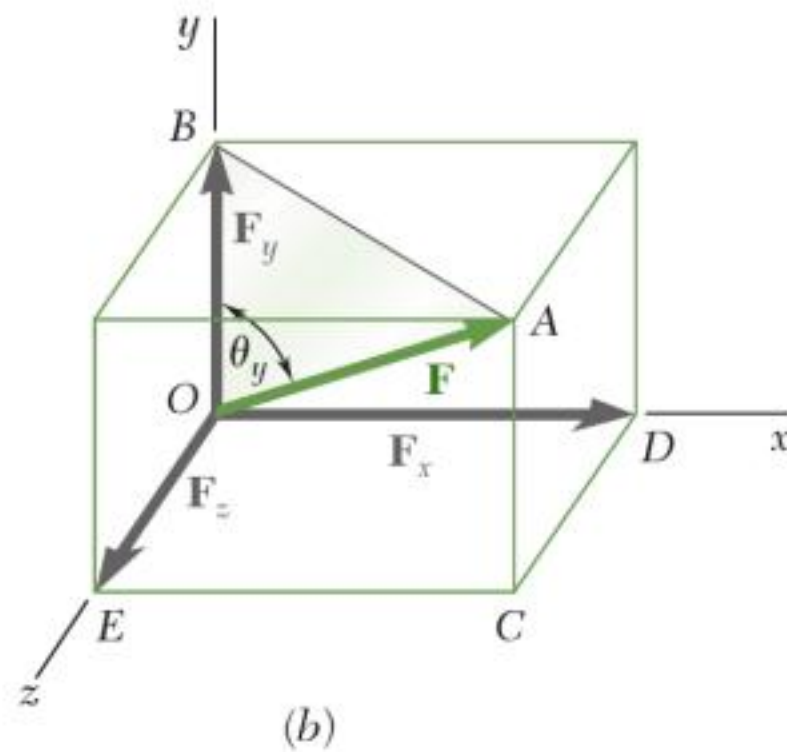
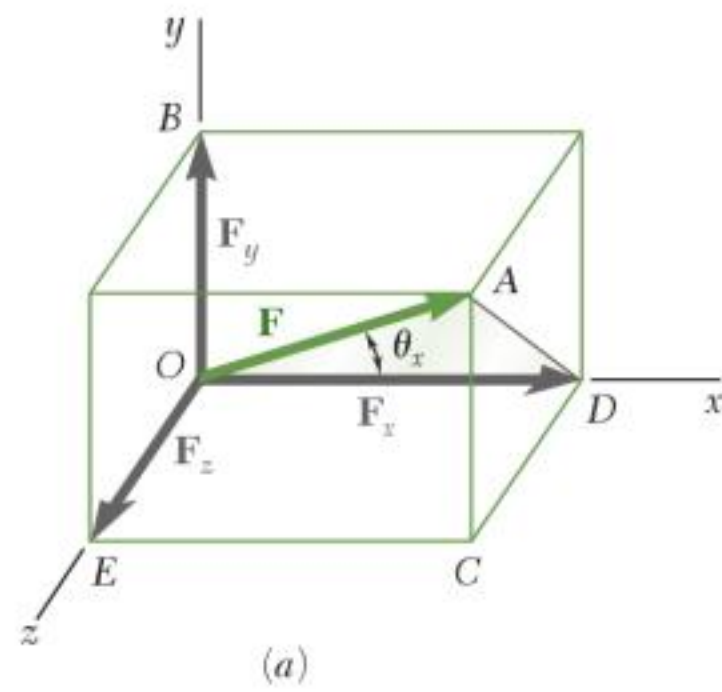


Figura 2.31

A relação existente entre a força \mathbf{F} e seus três componentes F_x , F_y e F_z é mais facilmente visualizada se uma “caixa” tendo F_x , F_y e F_z como arestas for desenhada tal como mostra a Fig. 2.31. A força \mathbf{F} é então representada pela diagonal OA dessa caixa. A Fig. 2.31b mostra o triângulo retângulo OAB usado para se deduzir a primeira das expressões (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. Nas Figs. 2.31a e c, foram também desenhados outros dois triângulos retângulos: OAD e OAE . Nota-se que esses triângulos ocupam na caixa posições comparáveis à do triângulo OAB . Representando por θ_x e θ_z , respectivamente, os ângulos que \mathbf{F} forma com os eixos x e z , podemos deduzir duas expressões similares a $F_y = F \cos \theta_y$. Escrevemos então:

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Os três ângulos θ_x , θ_y , θ_z definem a direção da força \mathbf{F} ; eles são mais comumente usados para essa finalidade do que os ângulos θ_y e ϕ apresentados no início desta seção. Os cossenos de θ_x , θ_y , θ_z são conhecidos como *cossenos diretores* da força \mathbf{F} .

Introduzindo os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , dirigidos respectivamente ao longo dos eixos x , y e z (Fig. 2.32), podemos expressar \mathbf{F} na forma:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

na qual os componentes escalares F_x , F_y e F_z são definidos pelas relações (2.19).

EXEMPLO 1 Uma força de 500 N forma ângulos de 60° , 45° e 120° , respectivamente, com os eixos x , y e z . Encontre os componentes F_x , F_y , F_z dessa força.

Substituindo $F = 500$ N, $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$, $\theta_z = 120^\circ$ nas fórmulas (2.19), escrevemos

$$\begin{aligned} F_x &= (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N} \\ F_y &= (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N} \\ F_z &= (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N} \end{aligned}$$

Aplicando na Eq. (2.20) os valores obtidos para os componentes escalares de \mathbf{F} , temos:

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

Assim como no caso de problemas bidimensionais, um sinal positivo indica que o componente tem o mesmo sentido que o eixo correspondente e um sinal negativo, que ele tem sentido oposto. ■

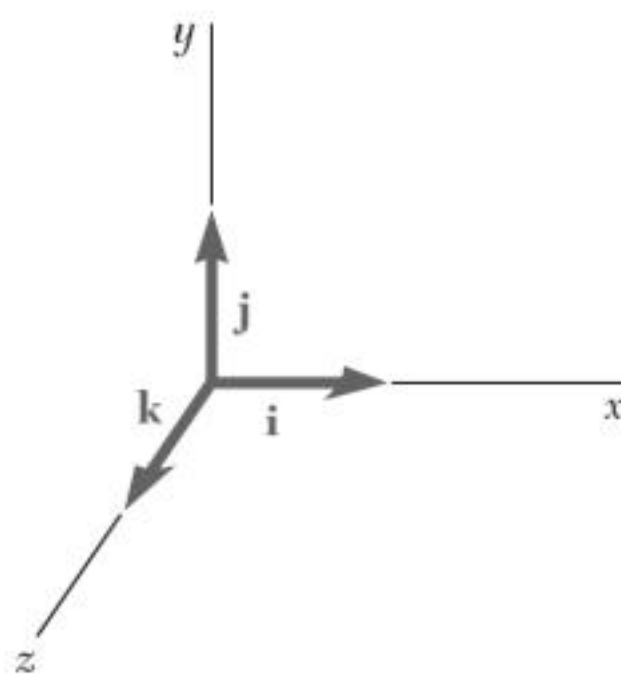


Figura 2.32

O ângulo que a força \mathbf{F} forma com um eixo deve ser medido a partir do lado positivo do eixo e será sempre entre 0 e 180° . Um ângulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que \mathbf{F} (cuja origem supõe-se que seja em O) está no mesmo lado do plano yz como o eixo x positivo; $\cos \theta_x$ e F_x serão, então, positivos. Um ângulo θ_x maior que 90° (obtusos) indica que \mathbf{F} está no outro lado do plano yz ; $\cos \theta_x$ e F_x serão, então, negativos. No Exemplo 1 os ângulos θ_x e θ_y são agudos, enquanto θ_z é obtuso: consequentemente, F_x e F_y são positivos, enquanto F_z é negativo.

Substituindo em (2.20) as expressões obtidas por F_x , F_y , F_z em (2.19), escrevemos

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

mostrando que a força \mathbf{F} pode ser expressa como o produto do escalar F pelo vetor:

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

Obviamente, o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor cuja intensidade é igual a 1 e cuja direção e sentido são os mesmos que os de \mathbf{F} (Fig. 2.33). O vetor $\boldsymbol{\lambda}$ é denominado *vetor unitário* ao longo da linha de ação de \mathbf{F} . A partir da Eq. (2.22), os componentes do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ são respectivamente iguais aos cossenos que orientam a linha de ação de \mathbf{F} :

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (2.23)$$

Deve-se observar que os valores dos três ângulos θ_x , θ_y , θ_z não são independentes. Lembrando que a soma dos quadrados dos componentes de um vetor é igual ao quadrado da sua intensidade, temos:

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

ou, substituindo os valores de λ_x , λ_y , λ_z a partir de (2.23),

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

No Exemplo 1, por exemplo, quando os valores $\theta_x = 60^\circ$ e $\theta_y = 45^\circ$ foram selecionados, o valor de θ_z *deve* ser igual a 60° ou 120° , para poder satisfazer a identidade (2.24).

Quando os componentes F_x , F_y , F_z de uma força \mathbf{F} são dados, a intensidade F da força é obtida de (2.18). *Podem-se, então, resolver as relações (2.19) para os cossenos diretores

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

e determinar os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que caracterizam a direção de \mathbf{F} .

EXEMPLO 2 A força \mathbf{F} tem os componentes $F_x = 90 \text{ N}$, $F_y = -135 \text{ N}$, $F_z = 270 \text{ N}$. Determine sua intensidade F e os ângulos θ_x , θ_y , θ_z que essa força forma com eixos coordenados.

Da fórmula (2.18), obtemos:*

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(90 \text{ N})^2 + (-135 \text{ N})^2 + (270 \text{ N})^2} \\ &= \sqrt{99.225 \text{ N}} = 315 \text{ N} \end{aligned}$$

* Com uma calculadora programada para converter coordenadas retangulares em coordenadas polares, será mais fácil calcular F pelo seguinte procedimento: primeiro, determine F_h a partir de seus dois componentes retangulares F_x e F_z (Fig. 2.30c); depois, determine F a partir de seus dois componentes retangulares F_h e F_y (Fig. 2.30b). A verdadeira ordem em que os três componentes F_x , F_y , e F_z são considerados é irrelevante.

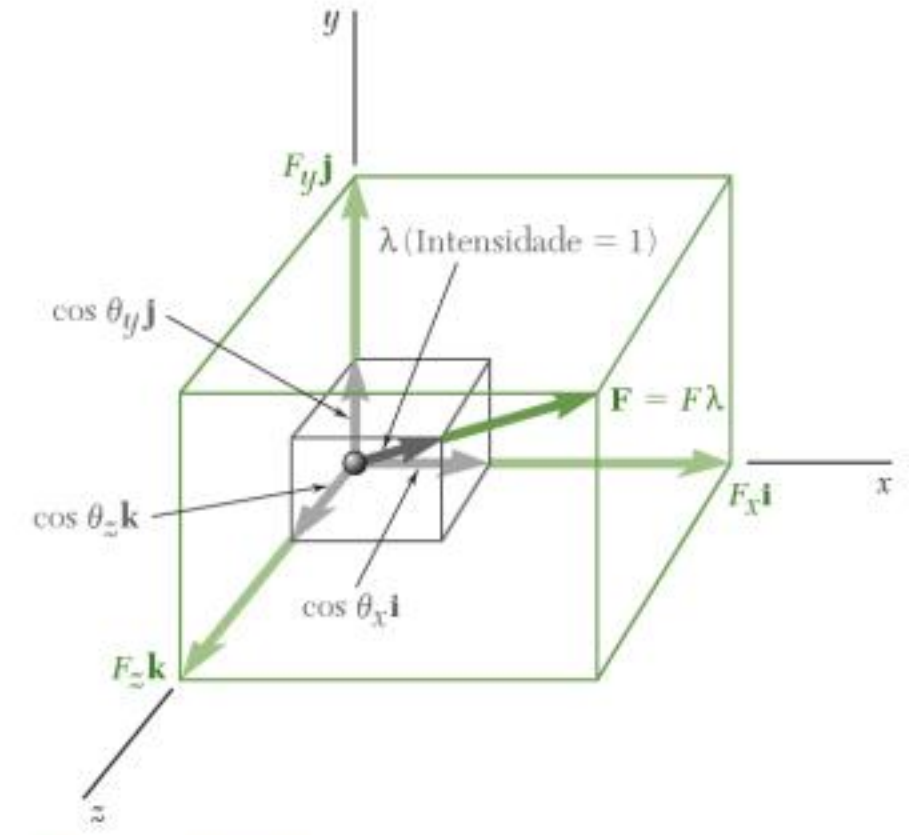


Figura 2.33

Substituindo os valores dos componentes e a intensidade de \mathbf{F} nas Eqs. (2.25), temos:

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{90 \text{ N}}{315 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-135 \text{ N}}{315 \text{ N}} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{270 \text{ N}}{315 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco cosseno, obtemos:

$$\theta_x = 73,4^\circ \quad \theta_y = 115,4^\circ \quad \theta_z = 31,0^\circ$$

Esses cálculos podem ser feitos facilmente com uma calculadora. ■

2.13 Força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação

Em muitas aplicações, a direção de uma força \mathbf{F} é definida pela coordenada de dois pontos, $M(x_1, y_1, z_1)$ e $N(x_2, y_2, z_2)$, localizados em sua linha de ação (Fig. 2.34). Considere o vetor \overrightarrow{MN} ligando M e N e de mesmo sentido que \mathbf{F} . Representando seus componentes escalares por d_x , d_y e d_z , respectivamente, temos:

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

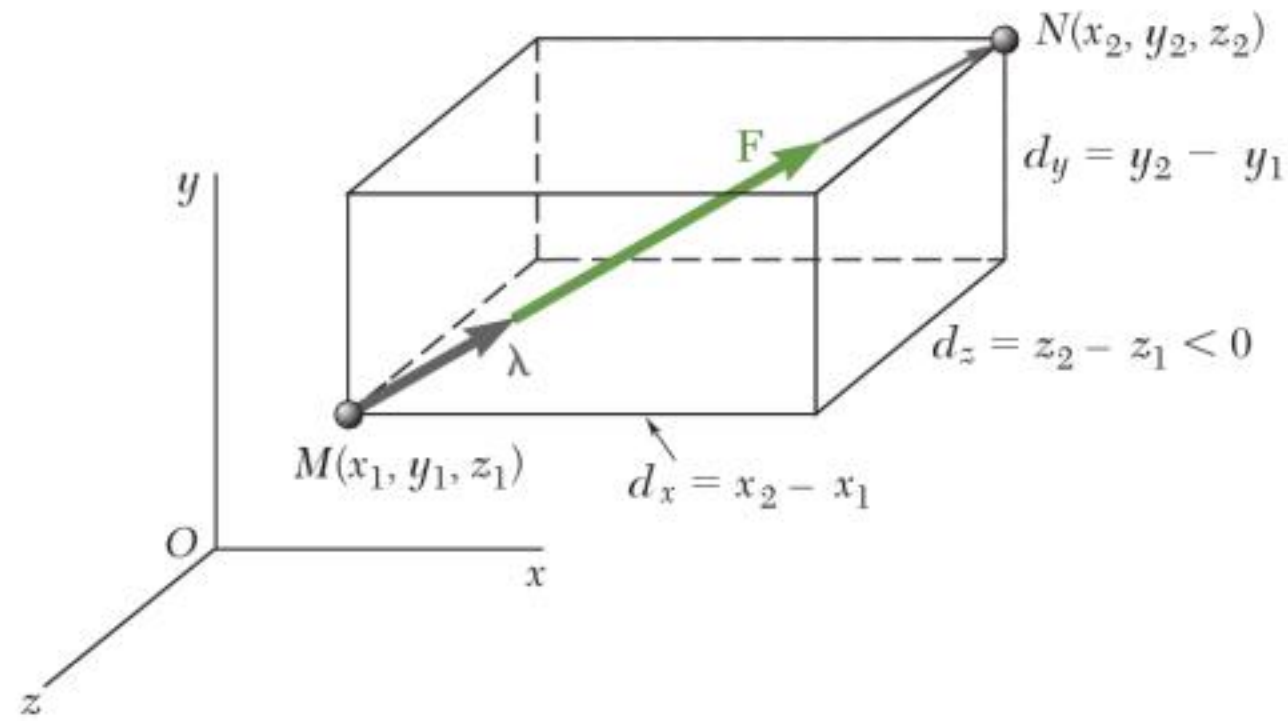


Figura 2.34

O vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo da linha de ação de \mathbf{F} (i.e., ao longo da linha MN) pode ser obtido dividindo-se o vetor \overrightarrow{MN} por sua intensidade MN . Substituindo por \overrightarrow{MN} de (2.26) e observando que MN é igual à distância d de M a N , resultará:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Lembrando que \mathbf{F} é igual ao produto de F e $\boldsymbol{\lambda}$, temos:

$$\mathbf{F} = F \boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

do qual segue-se que os componentes escalares de \mathbf{F} são, respectivamente:

$$F_x = \frac{F d_x}{d} \quad F_y = \frac{F d_y}{d} \quad F_z = \frac{F d_z}{d} \quad (2.29)$$

As relações de (2.29) simplificam consideravelmente a determinação dos componentes de uma força \mathbf{F} de uma dada intensidade F quando a linha de ação de \mathbf{F} é definida por dois pontos M e N . Subtraindo as coordenadas de M das coordenadas de N , primeiro determinamos os componentes do vetor \overrightarrow{MN} e a distância d de M a N :

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Substituindo F e d_x , d_y , d_z e d nas relações de (2.29), obtemos os componentes F_x , F_y e F_z da força.

Os ângulos θ_x , θ_y , θ_z que \mathbf{F} forma com os eixos coordenados podem então ser obtidos das Eqs. (2.25). Comparando as Eqs. (2.22) e (2.27), podemos também escrever

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (2.30)$$

e determinar os ângulos θ_x , θ_y , θ_z diretamente dos componentes e da intensidade do vetor \overrightarrow{MN} .

2.14 Adição de forças concorrentes no espaço

A resultante \mathbf{R} de duas ou mais forças no espaço será determinada somando-se seus componentes retangulares. Métodos gráficos ou trigonométricos geralmente não são práticos no caso de forças no espaço.

O método que será apresentado a seguir é similar àquele usado na Seção 2.8, para forças coplanares. Fazendo

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

decompomos cada força em seus componentes retangulares e escrevemos:

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} &= \Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} + (\Sigma F_z) \mathbf{k} \end{aligned}$$

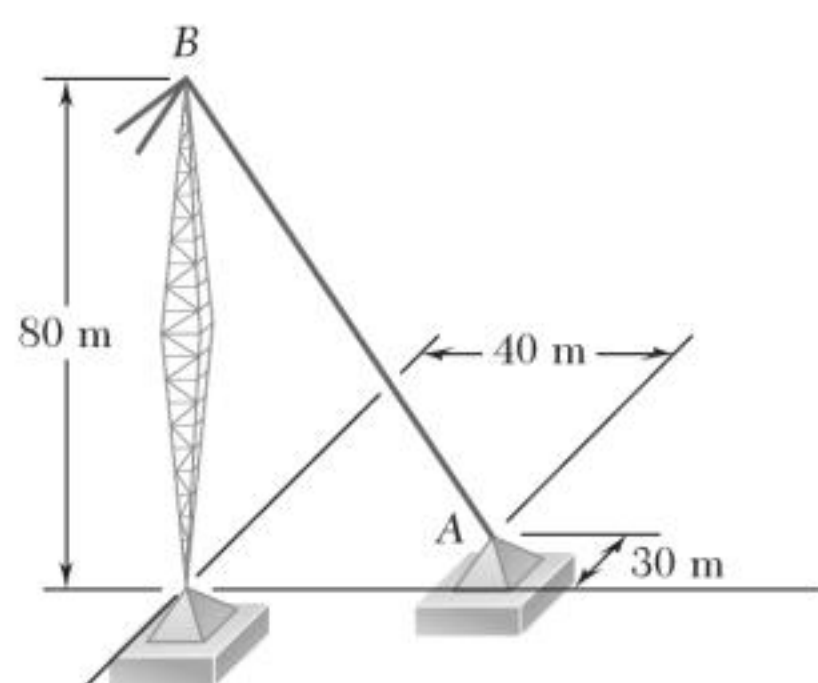
de onde se conclui que

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

A intensidade da resultante e os ângulos θ_x , θ_y , θ_z que a resultante forma com os eixos coordenados são obtidos por meio do método discutido na Seção 2.12. Escrevemos:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.32)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.33)$$



PROBLEMA RESOLVIDO 2.7

Um cabo de sustentação de uma torre está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é 2.500 N. Determine (a) os componentes F_x , F_y , F_z da força que atua sobre o parafuso e (b) os ângulos θ_x , θ_y , θ_z que definem a direção da força.

SOLUÇÃO

a. Componentes da força. A linha de ação da força que atua no parafuso passa por A e B, e a força é dirigida de A para B. Os componentes de vetor \overrightarrow{AB} , que tem a mesma direção da força, são:

$$d_x = -40 \text{ m} \quad d_y = +80 \text{ m} \quad d_z = +30 \text{ m}$$

A distância total de A até B é:

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94,3 \text{ m}$$

Representando por \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos:

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduzindo o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, escrevemos:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2.500 \text{ N}}{94,3 \text{ m}} \overrightarrow{AB}$$

Substituindo a expressão encontrada para \overrightarrow{AB} , obtemos:

$$\mathbf{F} = \frac{2.500 \text{ N}}{94,3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1.060 \text{ N})\mathbf{i} + (2.120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Então, os componentes de \mathbf{F} são:

$$F_x = -1.060 \text{ N} \quad F_y = +2.120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

b. Direção da força. Usando as Eqs. (2.25), escrevemos

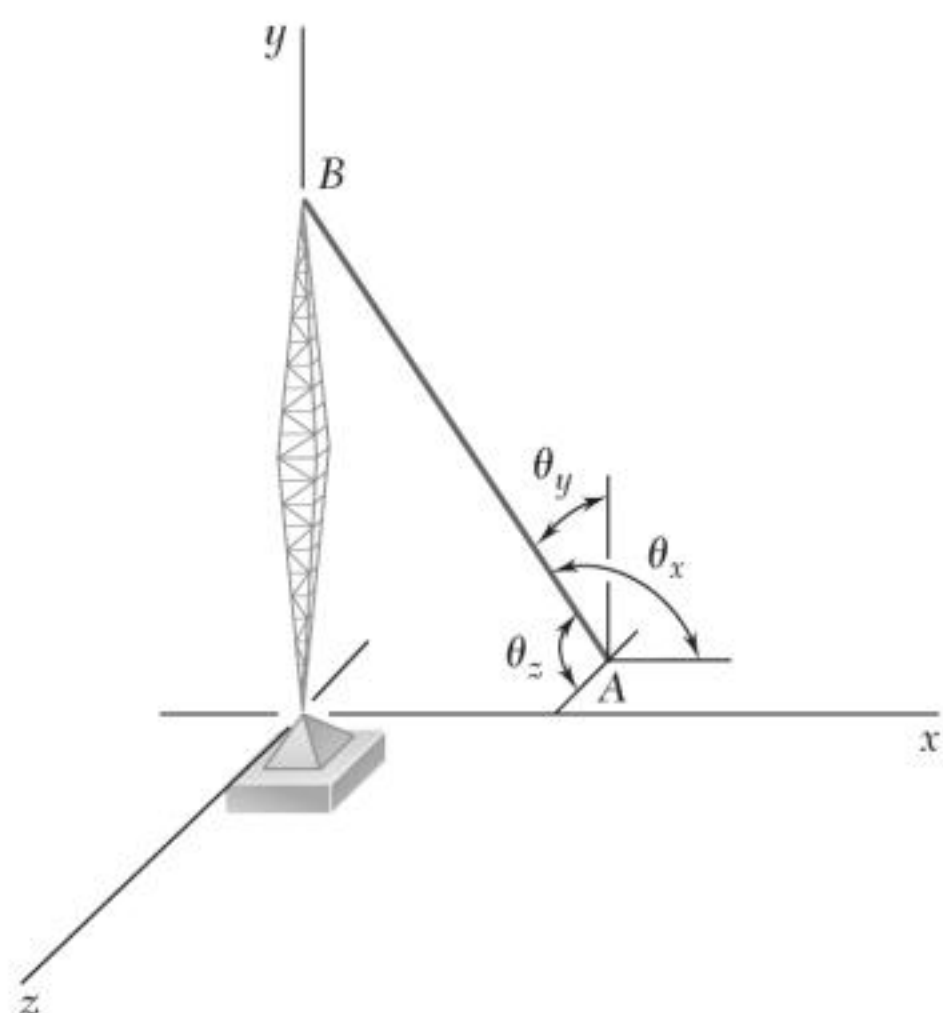
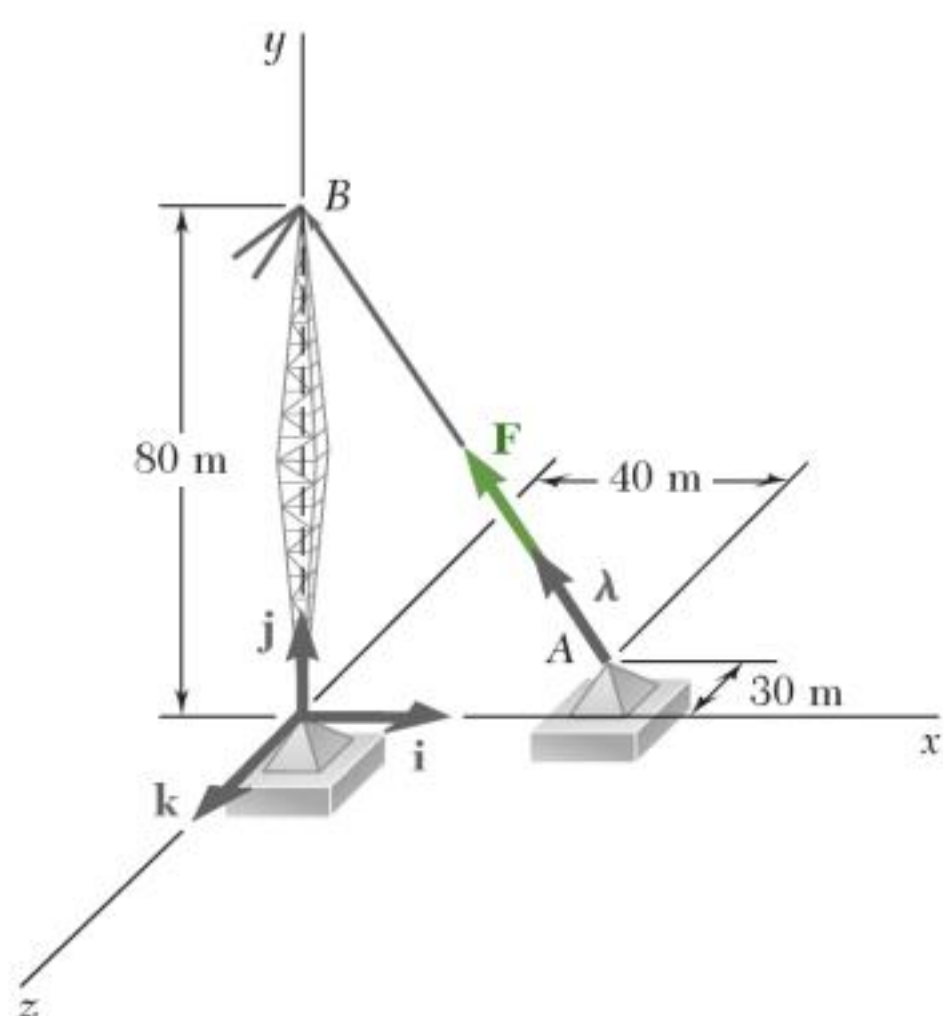
$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1.060 \text{ N}}{2.500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2.120 \text{ N}}{2.500 \text{ N}}$$

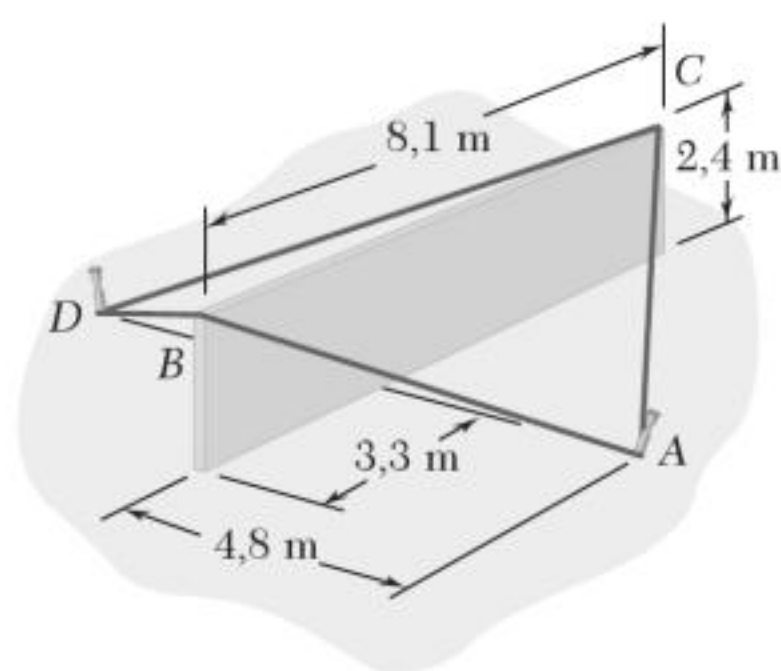
$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2.500 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco cosseno, obtemos

$$\theta_x = 115,1^\circ \quad \theta_y = 32,0^\circ \quad \theta_z = 71,5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

(Nota: este resultado poderia ter sido obtido usando-se os componentes e a intensidade do vetor \overrightarrow{AB} em vez os da força \mathbf{F} .)





PROBLEMA RESOLVIDO 2.8

Uma seção de um muro de concreto pré-moldado é temporariamente segura pelos cabos mostrados na figura. Sabendo que a tração é 3.780 N no cabo AB e 5.400 N no cabo AC, determine a intensidade e a direção da resultante das forças exercidas pelos cabos AB e AC na estaca A.

SOLUÇÃO

Componentes das forças. A força exercida por cada cabo na estaca A será decomposta em componentes x , y e z . Primeiro determinamos os componentes e a intensidade dos vetores \vec{AB} e \vec{AC} medindo-os a partir de A em direção à seção do muro. Representando \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= -(4,8 \text{ m})\mathbf{i} + (2,4 \text{ m})\mathbf{j} + (3,3 \text{ m})\mathbf{k} & AB &= 6,3 \text{ m} \\ \vec{AC} &= -(4,8 \text{ m})\mathbf{i} + (2,4 \text{ m})\mathbf{j} - (4,8 \text{ m})\mathbf{k} & AC &= 7,2 \text{ m}\end{aligned}$$

Representando por λ_{AB} o vetor unitário ao longo de AB, temos:

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{3.780 \text{ N}}{6,3 \text{ m}}\vec{AB}$$

Substituindo a expressão encontrada para \vec{AB} , obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{AB} &= \frac{3.780 \text{ N}}{6,3 \text{ m}}[-(4,8 \text{ m})\mathbf{i} + (2,4 \text{ m})\mathbf{j} + (3,3 \text{ m})\mathbf{k}] \\ \mathbf{T}_{AB} &= -(2.880 \text{ N})\mathbf{i} + (1.440 \text{ N})\mathbf{j} + (1.980 \text{ N})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Sendo λ_{AC} o vetor unitário ao longo do AC, obtemos, de modo similar:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC}\lambda_{AC} = T_{AC}\frac{\vec{AC}}{AC} = \frac{5.400 \text{ N}}{7,2 \text{ m}}\vec{AC} \\ \mathbf{T}_{AC} &= -(3.600 \text{ N})\mathbf{i} + (1.800 \text{ N})\mathbf{j} - (1.620 \text{ N})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Resultante das forças. A resultante \mathbf{R} das forças exercidas pelos dois cabos é:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(5.480 \text{ N})\mathbf{i} + (3.240 \text{ N})\mathbf{j} - (1.620 \text{ N})\mathbf{k}$$

A intensidade e a direção da resultante são, agora, determinadas por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-5.480)^2 + (3.240)^2 + (-1.620)^2} \\ R = 7.425 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Das Eqs. (2.33), obtemos:

$$\begin{aligned}\cos \theta_x &= \frac{R_x}{R} = \frac{-5.480 \text{ N}}{7.425 \text{ N}} & \cos \theta_y &= \frac{R_y}{R} = \frac{3.240 \text{ N}}{7.425 \text{ N}} \\ \cos \theta_z &= \frac{R_z}{R} = \frac{-1.620 \text{ N}}{7.425 \text{ N}}\end{aligned}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco cosseno, obtemos:

$$\theta_x = 150,8^\circ \quad \theta_y = 64,1^\circ \quad \theta_z = 102,6^\circ \quad \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vimos anteriormente que, quando uma partícula está em *equilíbrio*, a resultante das forças que atuam sobre a partícula deve ser nula. Ao expressar esse fato no caso do equilíbrio de uma *partícula no espaço tridimensional*, você obterá três relações entre as forças atuantes sobre a partícula. Essas relações podem ser usadas para a determinação de três incógnitas – geralmente as intensidades das três forças.

A solução consistirá nos seguintes passos:

1. Desenhe um diagrama de corpo livre da partícula. Esse diagrama mostra a partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Indique no diagrama as intensidades das forças conhecidas, bem como quaisquer ângulos ou dimensões que definam a direção de uma força. Qualquer intensidade ou ângulo desconhecido deve ser representado por um símbolo apropriado. Nada mais deve ser incluído em seu diagrama de corpo livre.

2. Decomponha cada uma das forças em componentes retangulares. Seguindo o método adotado na lição anterior, você irá determinar para cada força \mathbf{F} o vetor unitário λ que define a direção daquela força, e expressar \mathbf{F} como o produto da sua intensidade F pelo vetor unitário λ . Você obterá uma expressão da forma

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

na qual d, d_x, d_y, d_z são as dimensões obtidas do diagrama de corpo livre da partícula. Se uma força é conhecida tanto em intensidade como em direção, então \mathbf{F} é conhecida, e a expressão obtida para ela fica inteiramente definida; caso contrário, F é uma das três incógnitas que devem ser determinadas.

3. Faça a resultante, ou soma, das forças exercidas sobre a partícula igual a zero. Você obterá uma equação vetorial que consiste em termos que contêm os vetores unitários \mathbf{i}, \mathbf{j} ou \mathbf{k} . Você irá agrupar os termos que contenham o mesmo vetor unitário e fatorar esse vetor. Para que a equação vetorial seja satisfeita, o coeficiente de cada vetor unitário deve ser igual a zero. Logo, tornando cada coeficiente igual a zero, serão obtidas três equações escalares que poderá resolver para um máximo de três incógnitas [Problema Resolvido 2.9].

PROBLEMAS

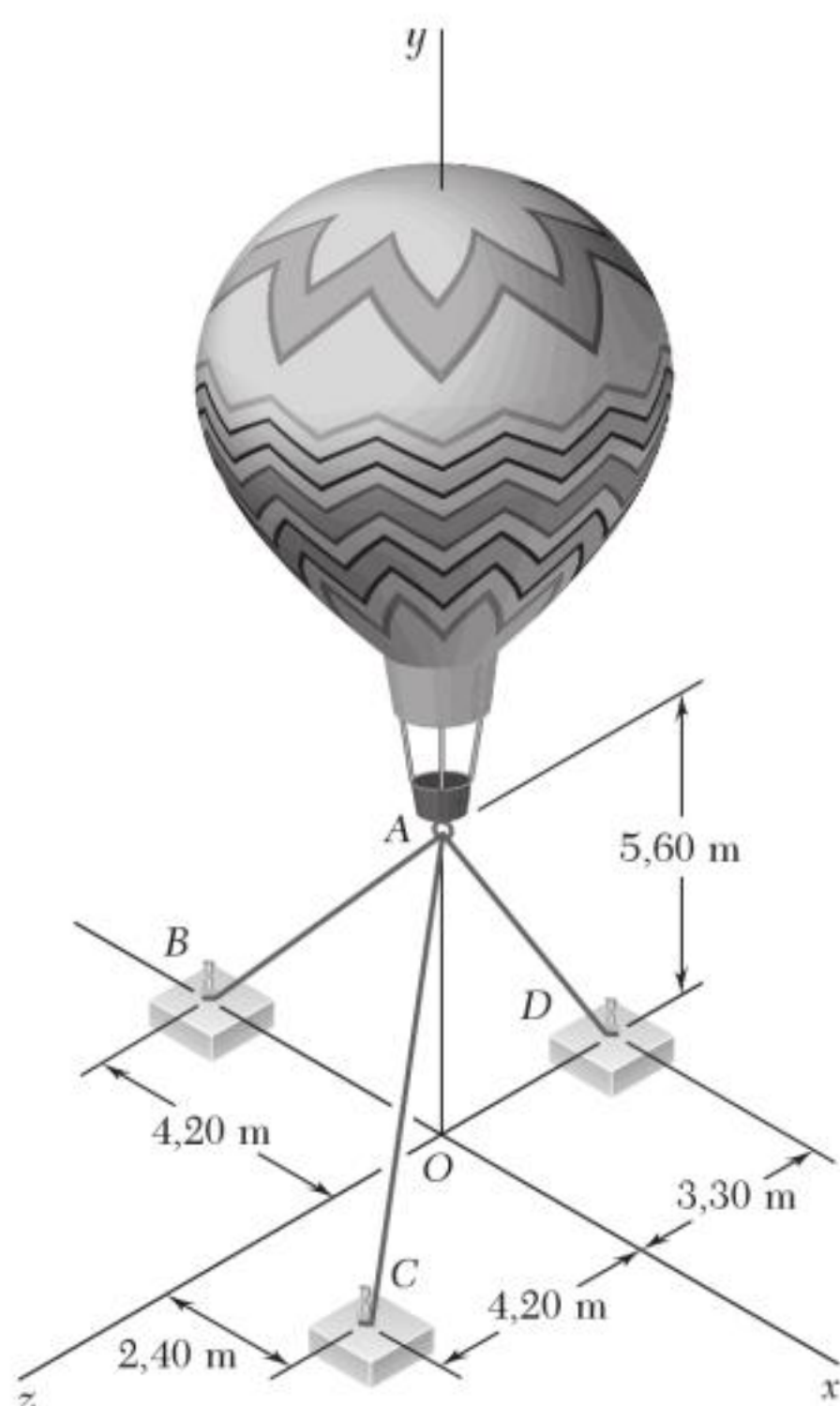


Figura P2.99, P2.100, P2.101 e P2.102

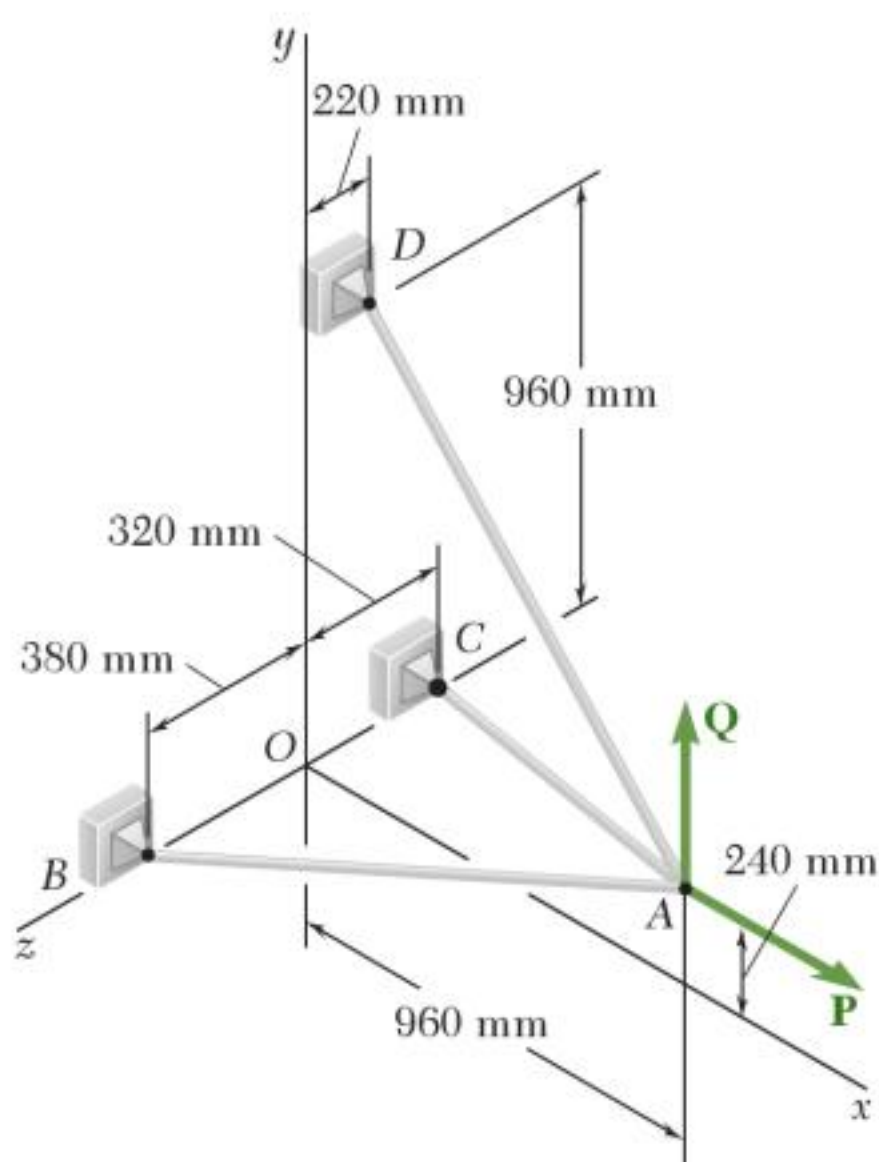


Figura P2.107 e P2.108

2.99 Três cabos são usados para amarrar um balão, como mostra a figura. Determine a força vertical P exercida pelo balão em A, sabendo que a tração no cabo AB é 259 N.

2.100 Três cabos são usados para amarrar um balão, como mostra a figura. Determine a força vertical P exercida pelo balão em A, sabendo que a tração no cabo AC é 444 N.

2.101 Três cabos são usados para amarrar um balão, como mostra a figura. Determine a força vertical P exercida pelo balão em A, sabendo que a tração no cabo AD é 481 N.

2.102 Três cabos são usados para amarrar um balão, tal como mostra a figura. Sabendo que o balão exerce uma força vertical de 800 N em A, determine a tensão em cada cabo.

2.103 Um caixote é sustentado por três cabos, como mostrado na figura. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo AB é 3.330 N.

2.104 Um caixote é sustentado por três cabos como mostrado na figura. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo AD é 2.740 N.

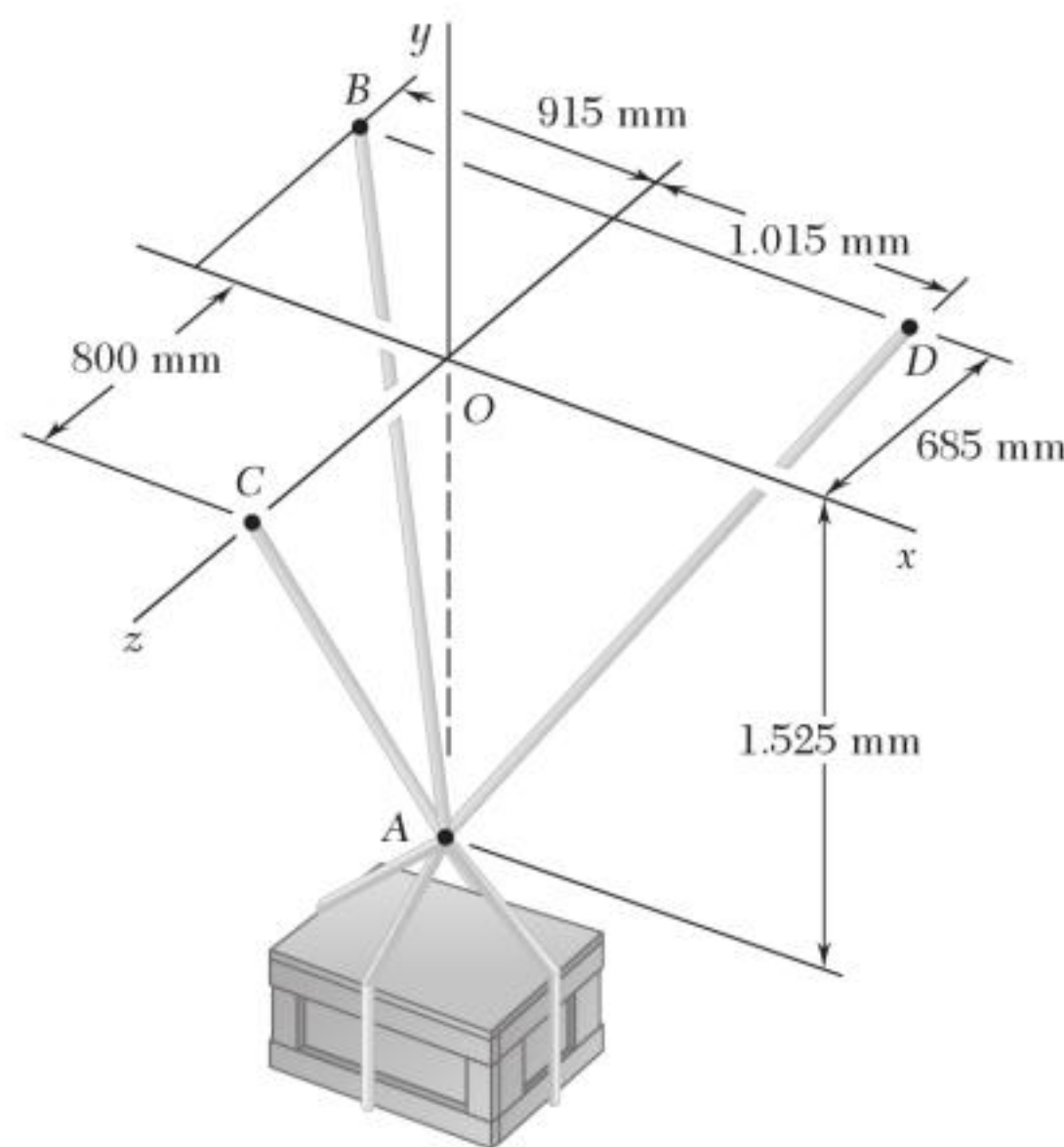


Figura P2.103, P2.104, P2.105 e P2.106

2.105 Um caixote é sustentado por três cabos como mostrado na figura. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo AC é 2.420 N.

2.106 O peso de 7.116 N do caixote é suportado por três cabos como mostrado na figura. Determine a tensão em cada cabo.

2.107 Três cabos estão conectados em A, onde são aplicadas as forças P e Q , como mostra a figura. Sabendo que $Q = 0$, encontre o valor de P para que a tensão no cabo AD seja 305 N.

2.108 Três cabos estão conectados em A, onde são aplicadas as forças P e Q , como mostra a ilustração. Sabendo que $P = 1.200$ N, encontre o valor de Q para que o cabo AD fique esticado.

- 2.109** Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ligados a um pino em A e ancorados por parafusos em B , C e D . Se a tensão no cabo AB é de 2.800 N , determine a força vertical \mathbf{P} exercida pela torre no pino em A .

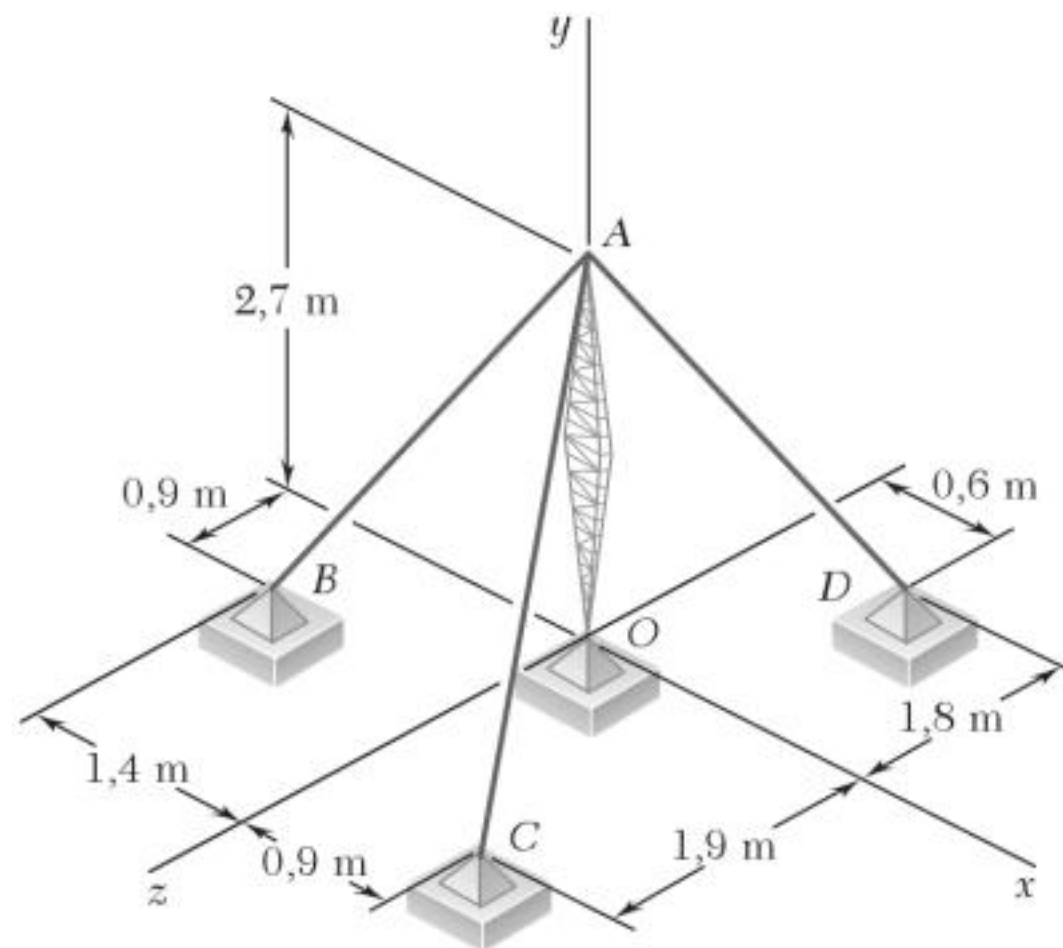


Figura P2.109 e P2.110

- 2.110** Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ligados a um pino em A e ancorados por parafusos em B , C e D . Se a tensão no cabo AC é de 4.092 N , determine a força vertical \mathbf{P} exercida pela torre no pino em A .
- 2.111** Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo AC é 60 N , determine o peso da placa.

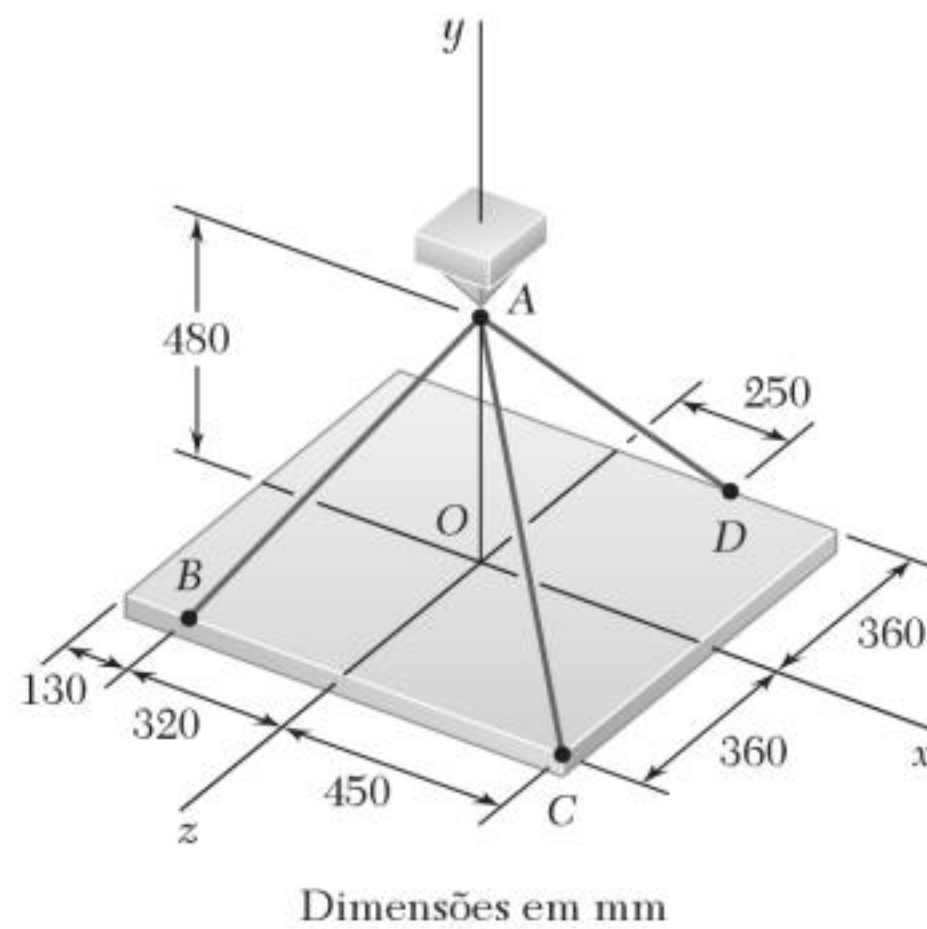


Figura P2.111 e P2.112

- 2.112** Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo AD é 520 N , determine o peso da placa.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

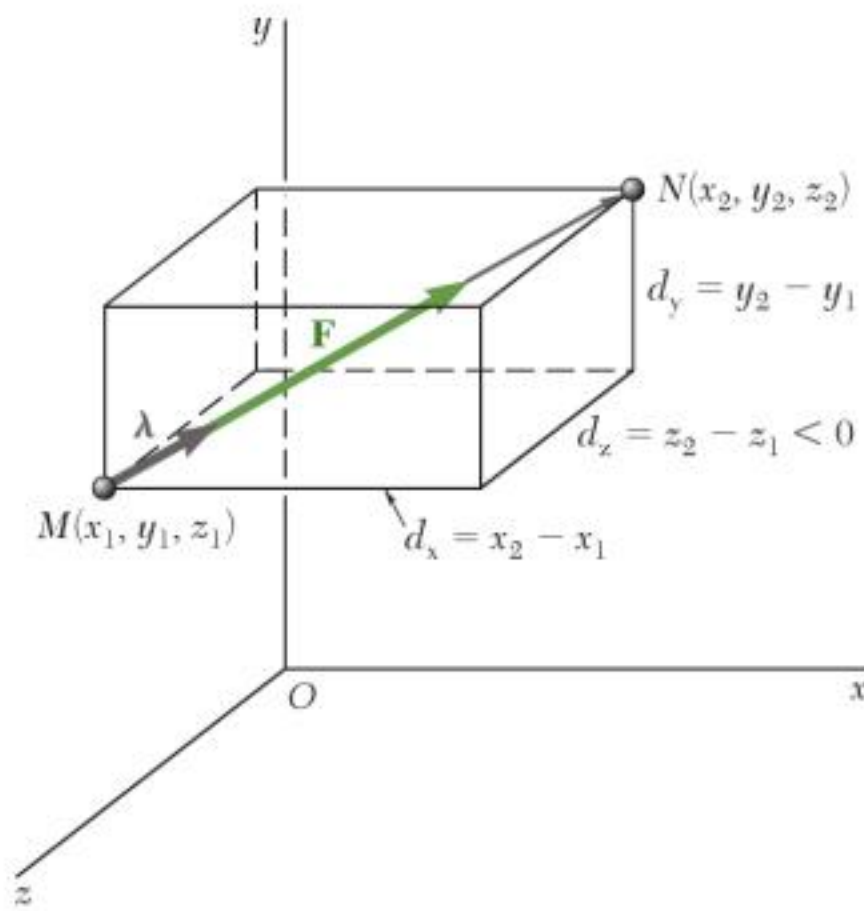


Figura 2.40

Resultante de força no espaço

Equilíbrio de uma partícula

Diagrama de corpo livre

Equilíbrio no espaço

primeiro, expressamos o vetor \overrightarrow{MN} que liga os pontos M e N em termos de seus componentes d_x, d_y, d_z (Fig. 2.40); escrevemos:

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

Em seguida, determinamos o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo da linha de ação de \mathbf{F} dividindo \overrightarrow{MN} por sua intensidade $MN = d$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Lembrando que \mathbf{F} é igual ao produto de F por $\boldsymbol{\lambda}$, temos

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de onde se segue [Problemas Resolvidos 2.7 e 2.8] que os componentes escalares de \mathbf{F} são, respectivamente

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Quando duas ou mais forças atuam sobre uma partícula no espaço tridimensional, podem-se obter os componentes retangulares de sua resultante \mathbf{R} pela adição algébrica dos componentes correspondentes das forças dadas [Seção 2.14]. Temos:

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

A intensidade, a direção e o sentido de \mathbf{R} podem, então, ser determinados a partir de relações similares às das Eqs. (2.18) e (2.25) [Problema Resolvido 2.8].

Diz-se que a partícula está em *equilíbrio* quando a resultante de todas as forças que atuam sobre ela é nula [Seção 2.9]. A partícula, então, permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá a uma velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento) [Seção 2.10].

Para resolver um problema que envolva uma partícula em equilíbrio, primeiro devemos traçar um *diagrama de corpo livre* da partícula, mostrando todas as forças que atuam sobre ela [Seção 2.11]. Se *apenas três forças coplanares* atuam sobre a partícula, pode-se desenhar um *triângulo de forças* para expressar que a partícula está em equilíbrio. Usando-se métodos gráficos ou trigonometria, pode-se resolver esse triângulo para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.4]. Se *mais que três forças coplanares* estão envolvidas, devem-se usar as equações de equilíbrio.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.6].

Quando uma partícula está em *equilíbrio no espaço tridimensional* [Seção 2.15], devem-se usar as três equações de equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo três incógnitas [Problema Resolvido 2.9].

PROBLEMAS DE REVISÃO

- 2.127** A direção e sentido das forças de 330 N podem variar, mas o ângulo entre elas é sempre 50° . Determine o valor de α para que a resultante das forças atuantes em A seja na horizontal e para a esquerda.
- 2.128** Uma estaca é puxada do solo por meio de duas cordas como mostra a figura. Sabendo que a intensidade, direção e sentido da força exercida em uma das cordas, determine a intensidade, a direção e o sentido que a força **P** deveria exercer com a outra corda se a resultante dessas duas forças é uma força vertical de 178 N.

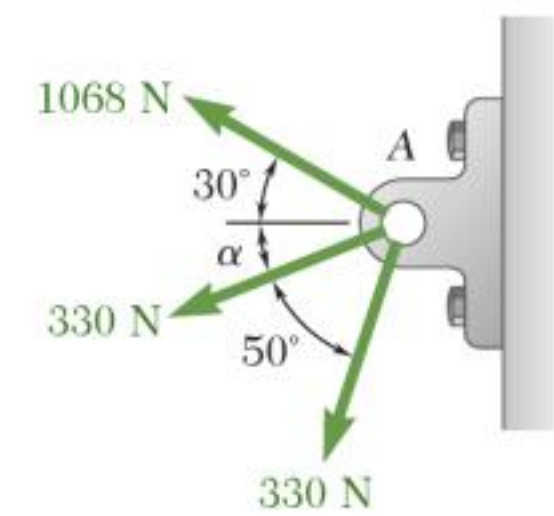


Figura P2.127

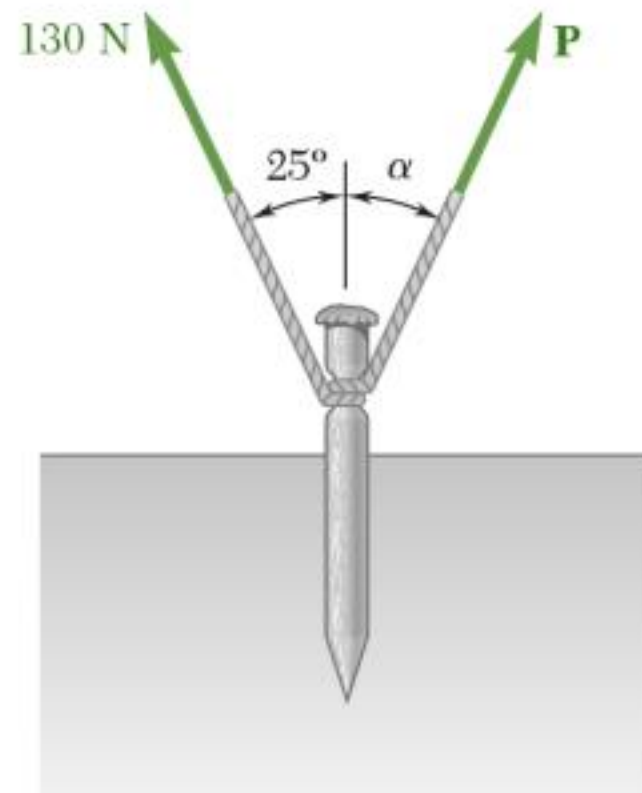


Figura P2.128

- 2.129** O elemento *BD* exerce sobre o elemento *ABC* uma força **P** dirigida ao longo da linha *BD*. Sabendo que **P** deve ter um componente vertical de 1.068 N, determine (a) a intensidade da força **P**, (b) sua componente horizontal.
- 2.130** Dois cabos estão ligados juntos a *C* e carregados como mostra a figura. Determine a tensão (a) no cabo *AC*, (b) no cabo *BC*.

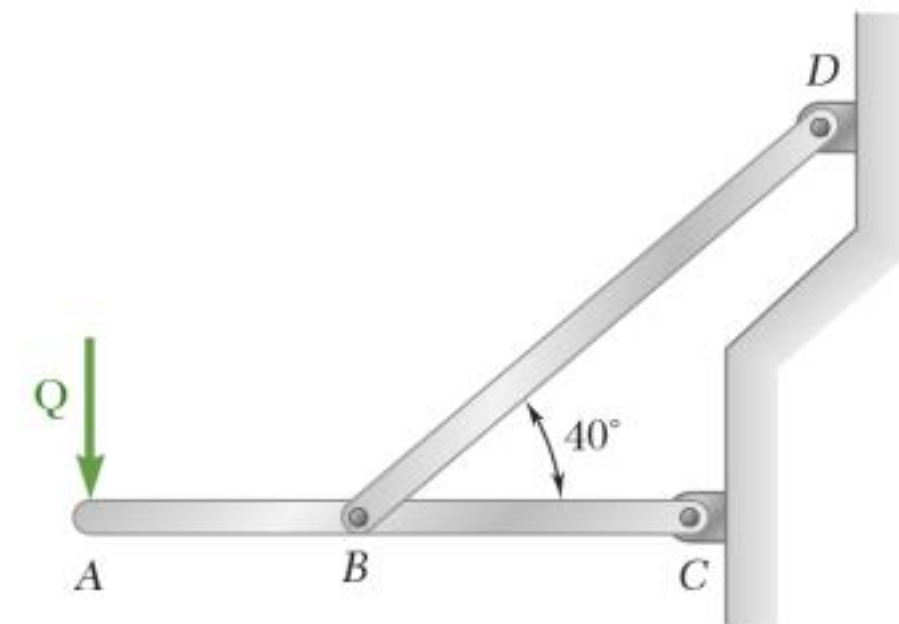


Figura P2.129

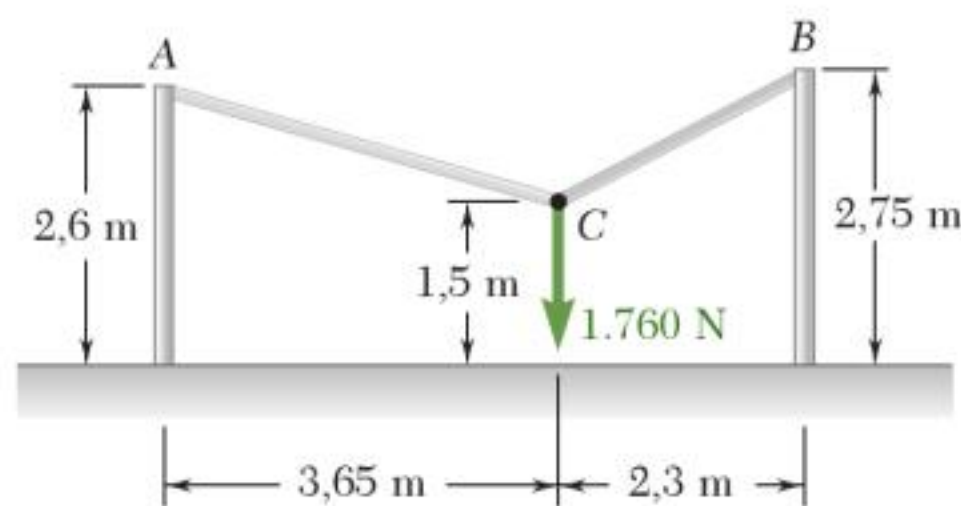


Figura P2.130

- 2.131** Dois cabos estão ligados juntos em *C* e carregados como mostra a figura. Sabendo que $P = 360$ N, determine a tensão (a) no cabo *AC*, (b) no cabo *BC*.
- 2.132** Dois cabos estão ligados juntos a *C* e carregados como mostra a figura. Determine a faixa da carga *P* para que ambos os cabos permaneçam esticados.

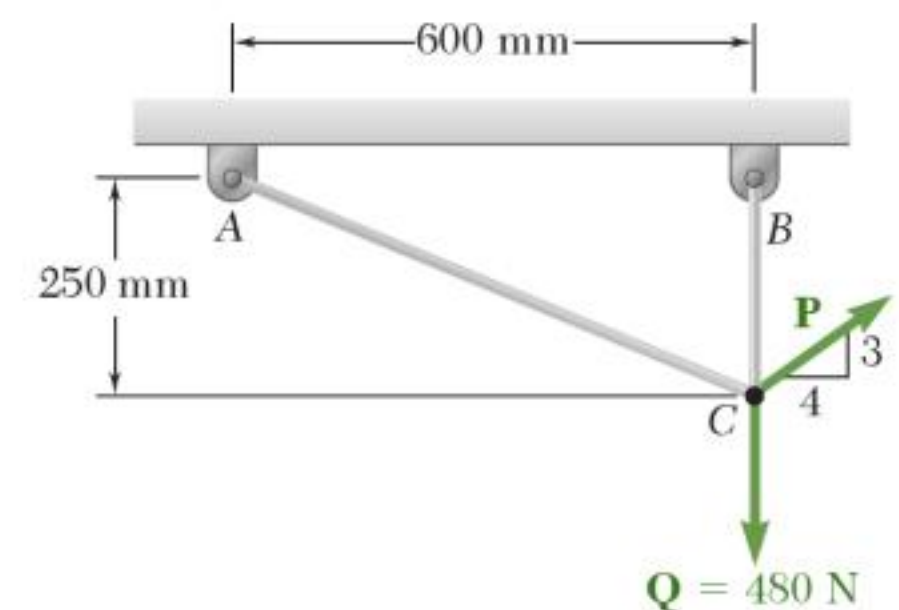


Figura P2.131 e P2.132

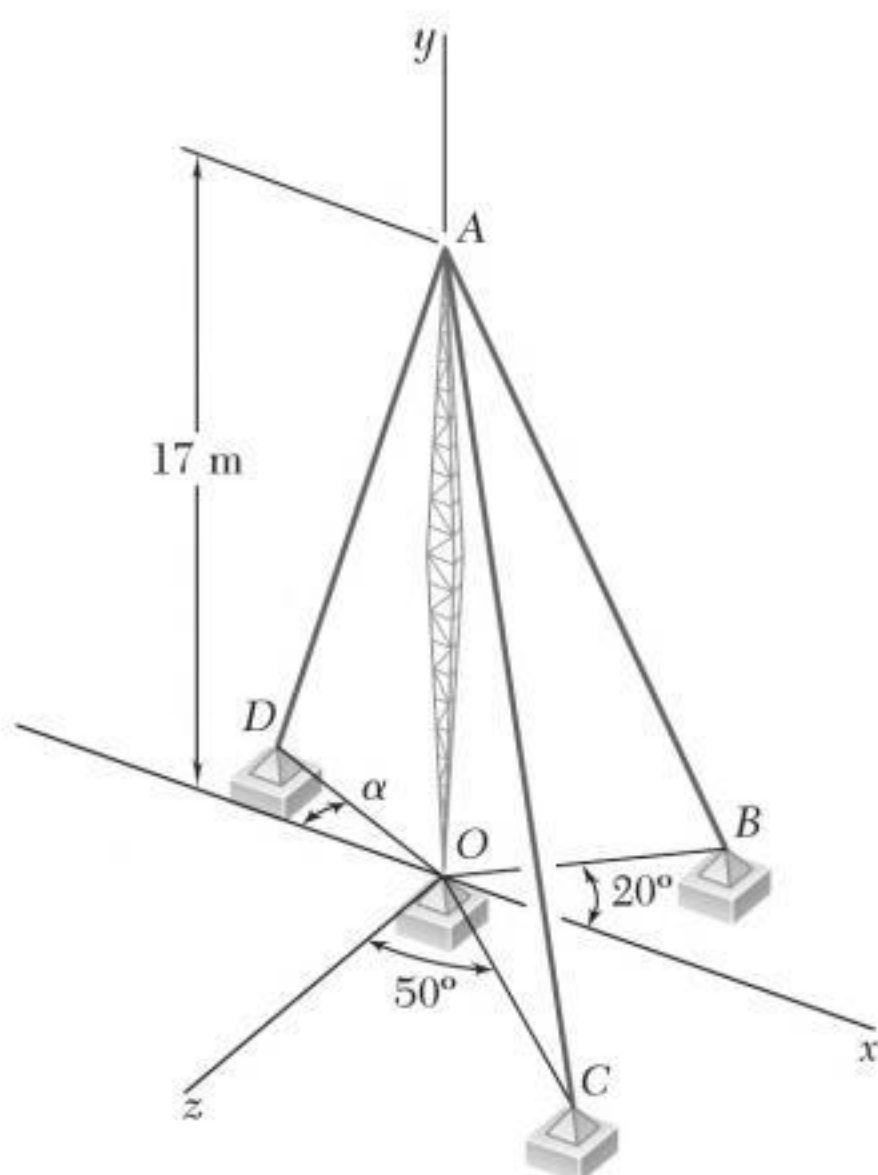


Figura P2.134

2.133 Uma força atua na origem de um sistema de coordenadas definidas pelos ângulos $\theta_x = 69,3^\circ$ e $\theta_z = 57,9^\circ$. Sabendo que a componente y da força é -774 N, determine (a) o ângulo θ_y , (b) os outros componentes da força e suas intensidades.

2.134 O comprimento do cabo AB é 20 m e a tensão neste cabo é 17.350 N. Determine (a) as componentes x , y e z da força exercida pelo cabo na âncora B , (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z , definindo a direção e sentido da força.

2.135 No sentido de mover um caminhão acidentado, dois cabos foram fixados em A e puxados pelos guinchos B e C como mostrado na figura. Sabendo que a tração é 10 kN no cabo AB e $7,5$ kN no cabo AC , determine a intensidade, direção e sentido da resultante das forças exercidas em A pelos dois cabos.

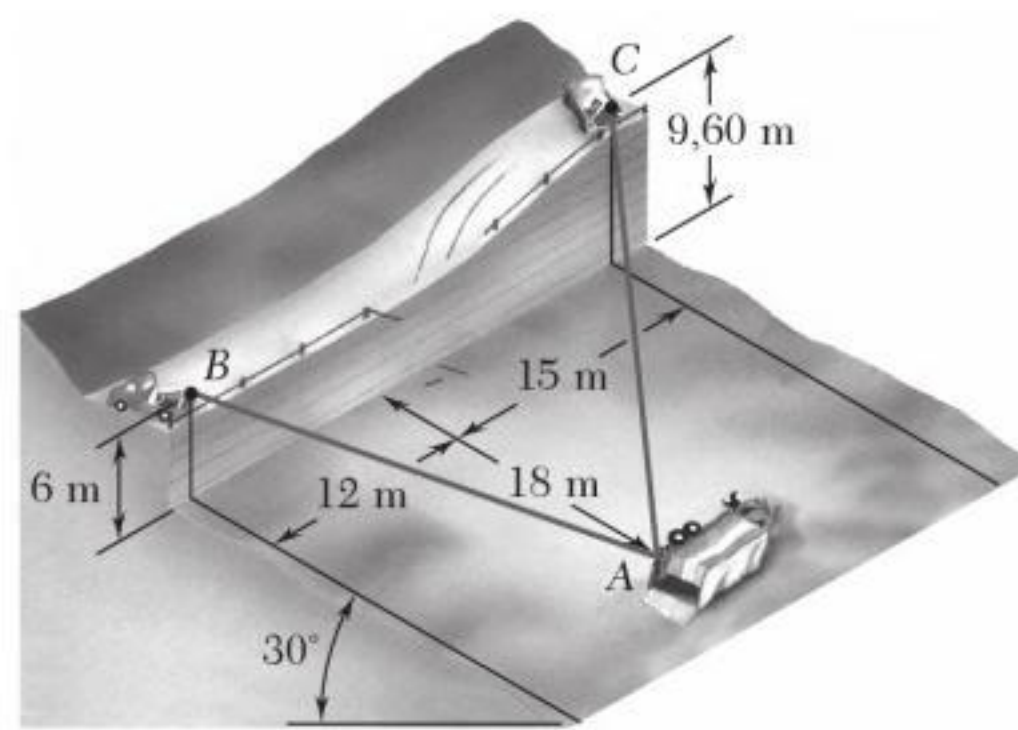


Figura P2.135

2.136 Um recipiente de peso $W = 1.165$ N é suspenso por três cabos como mostrado na figura. Determine a tensão em cada cabo.

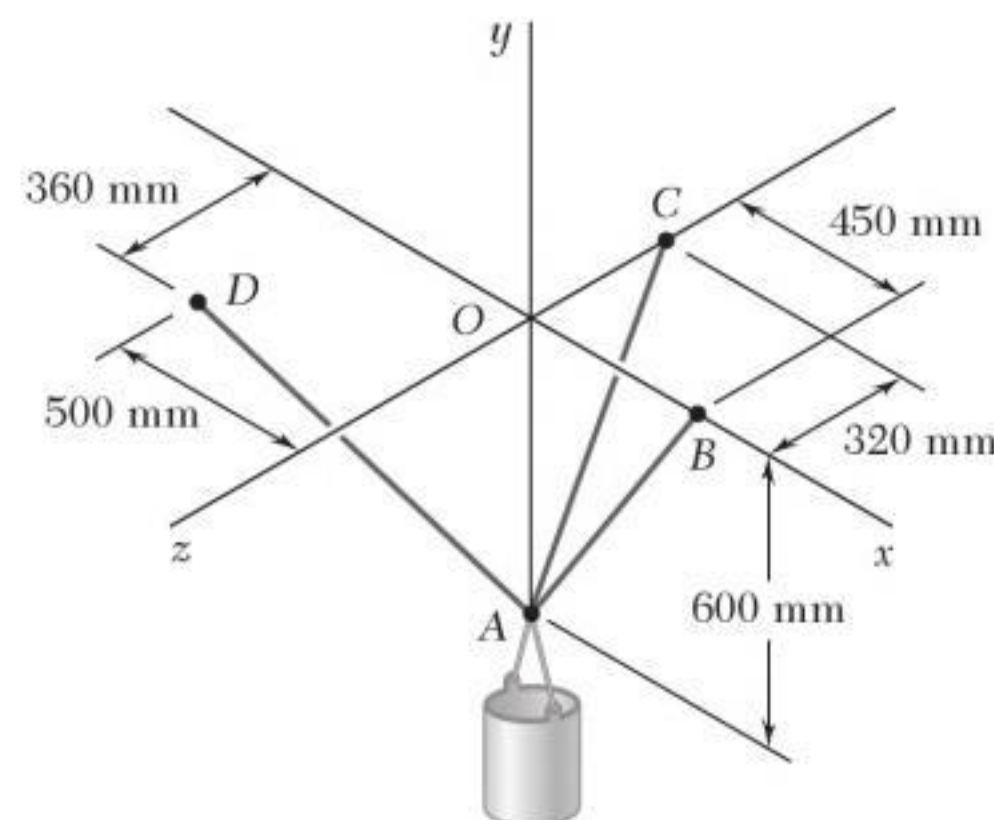


Figura P2.136

- 2.137** Os cursores A e B são conectados por um fio de comprimento de 525 mm e podem deslizar livremente, sem atrito, sobre as hastes. Se a força $\mathbf{P} = (341 \text{ N})\mathbf{j}$ é aplicada ao colar A , determine (a) a tensão no fio quando $y = 155 \text{ mm}$, (b) a intensidade da força \mathbf{Q} requerida para manter o equilíbrio do sistema.

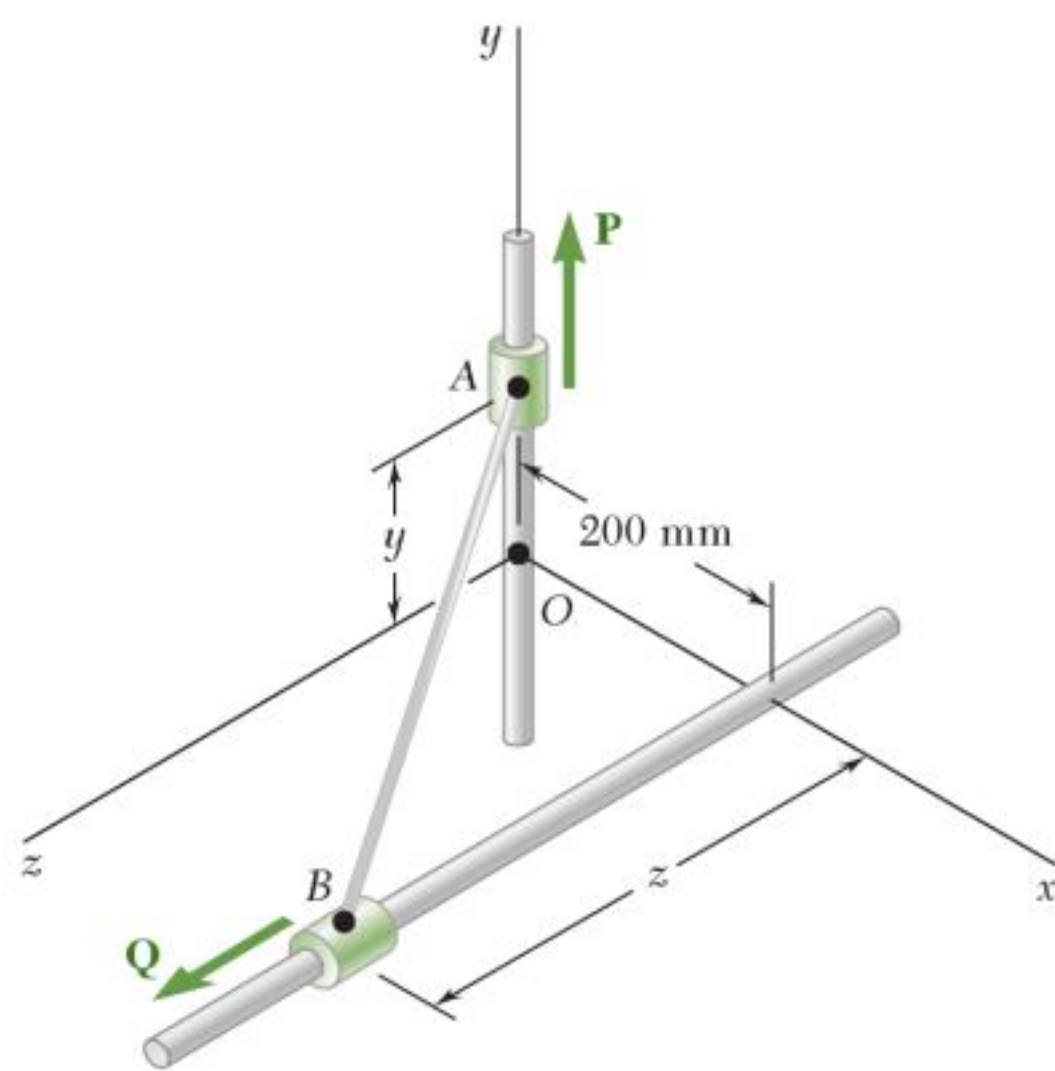


Figura P2.137

- 2.138** Resolver o Problema 2.137 adotando $y = 275 \text{ mm}$.

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

2.C1 Usando um aplicativo computacional, determine a intensidade e a direção da resultante de n forças coplanares aplicadas em um ponto A . Use esse aplicativo para resolver os Problemas 2.32, 2.33, 2.34 e 2.38.

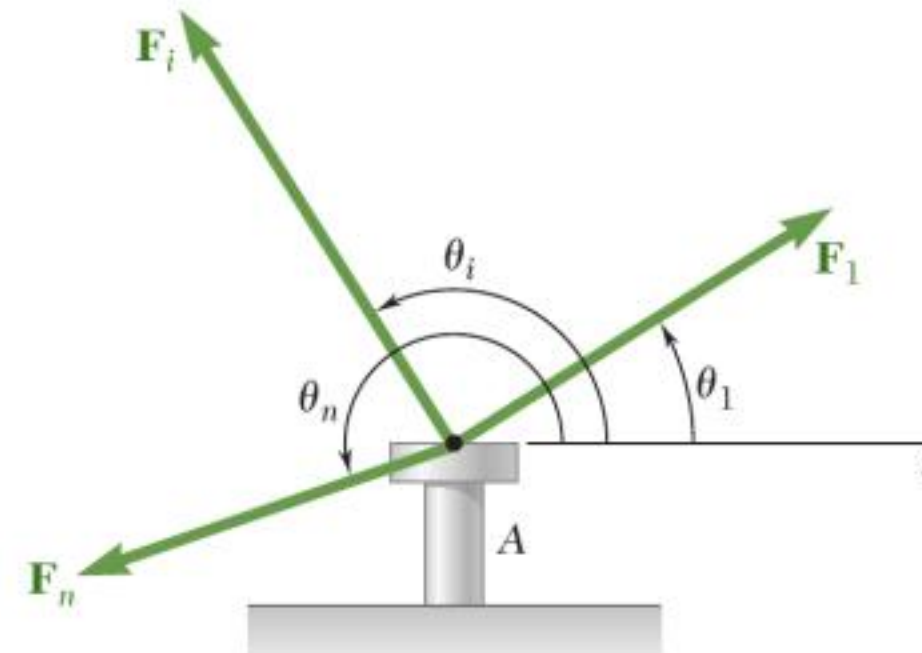


Figura P2.C1

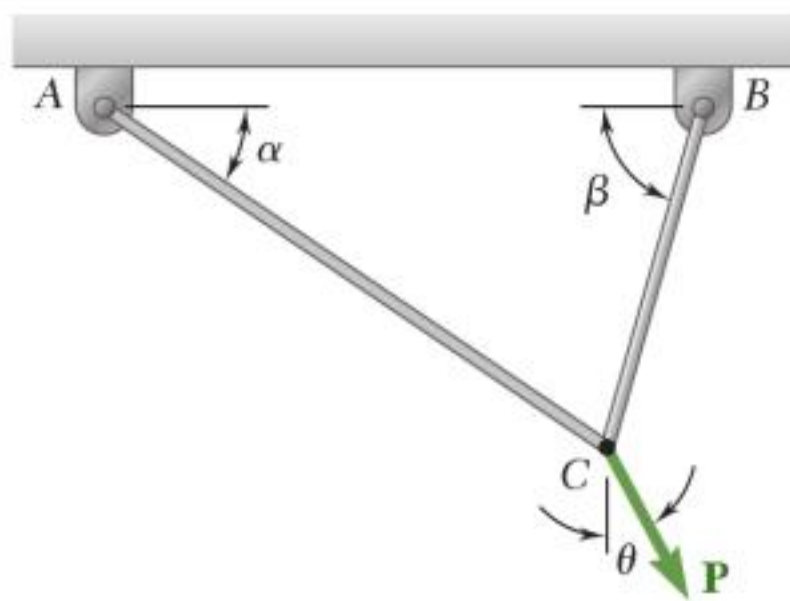


Figura P2.C2

2.C2 Uma carga P é sustentada por dois cabos, como mostra a figura. Usando um programa de computador, determine a tração em cada cabo em função de P para valores de θ variando de $\theta_1 = \beta - 90^\circ$ até $\theta_2 = 90^\circ - \alpha$, usando dados incrementais $\Delta\theta$. Usando esse programa, determine para os três conjuntos de valores numéricos (a) a tensão em cada cabo para valores de θ variando de θ_1 a θ_2 , (b) o valor de θ para que a tensão nos dois cabos seja a menor possível, (c) o valor correspondente da tensão.

- (1) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $P = 1.780 \text{ N}$, $\Delta\theta = 5^\circ$
- (2) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $P = 2.668 \text{ N}$, $\Delta\theta = 10^\circ$
- (3) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $P = 1.110 \text{ N}$, $\Delta\theta = 5^\circ$

2.C3 Um acrobata está caminhando em uma corda-bamba de comprimento $L = 20,1 \text{ m}$, fixada nos suportes A e B a uma distância de $20,0 \text{ m}$ entre si. O peso combinado do acrobata e de sua vara de equilíbrio é de 800 N , e o atrito entre suas sapatilhas e a corda é grande o suficiente para impedi-lo de escorregar. Desprezando o peso da corda e qualquer deformação elástica, use um aplicativo computacional para determinar a deflexão y e as forças de tração nas porções AC e BC da corda para valores de x entre $0,5 \text{ m}$ e $10,0 \text{ m}$, usando incrementos de $0,5 \text{ m}$. A partir dos resultados obtidos, determine (a) a máxima deflexão da corda, (b) a máxima força de tração na corda, (c) os valores mínimos das forças de tração nas porções AC e BC da corda.

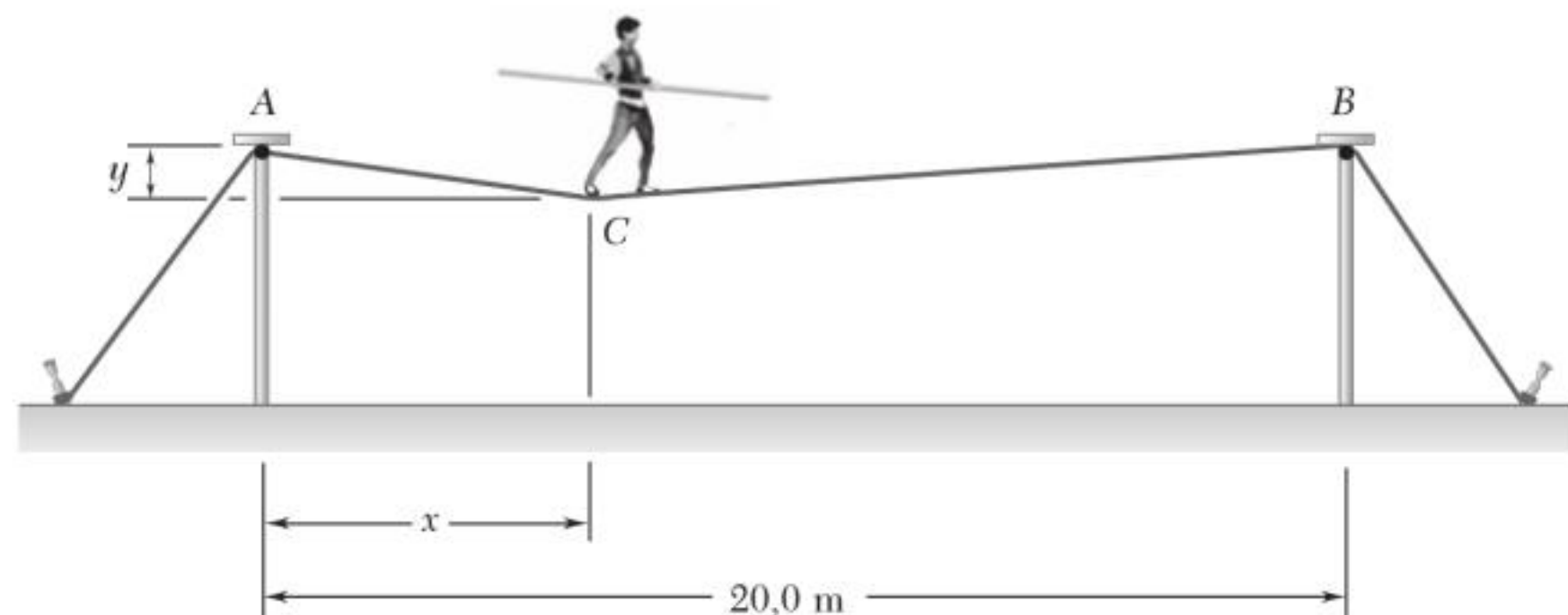


Figura P2.C3

2.C4 Desenvolva um programa de computador que possa ser usado para determinar a intensidade e direção da resultante de n forças \mathbf{F}_i , onde $i = 1, 2, \dots, n$, que são aplicadas no ponto A_0 de coordenadas x_0, y_0 e z_0 , sabendo que a linha de ação de \mathbf{F}_i passa através do ponto A_i de coordenadas x_i, y_i e z_i . Use esse programa para resolver os Problemas 2.93, 2.94, 2.95 e 2.135.

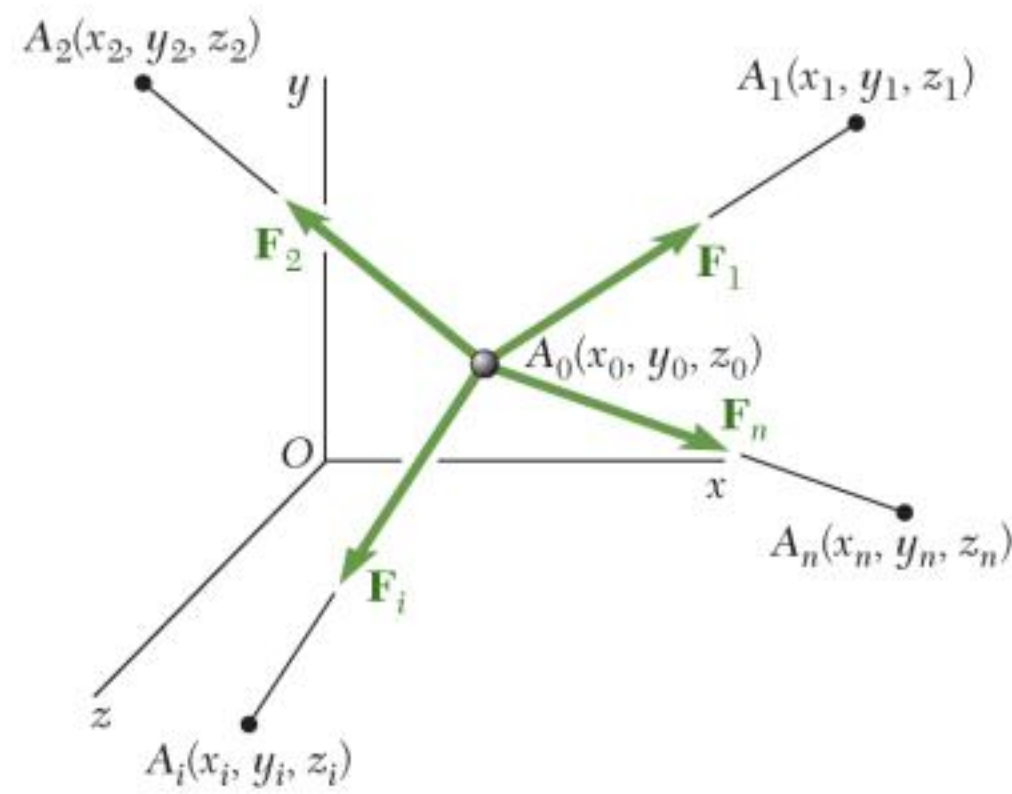


Figura P2.C4

2.C5 Três cabos são fixados respectivamente aos pontos A_1, A_2 e A_3 e conectados ao ponto A_0 , no qual é aplicada uma carga \mathbf{P} como mostrado na figura. Desenvolva um programa de computador que possa ser usado para determinar a tensão de cada um dos cabos. Use este programa para resolver os Problemas 2.102, 2.106, 2.107 e 2.115.

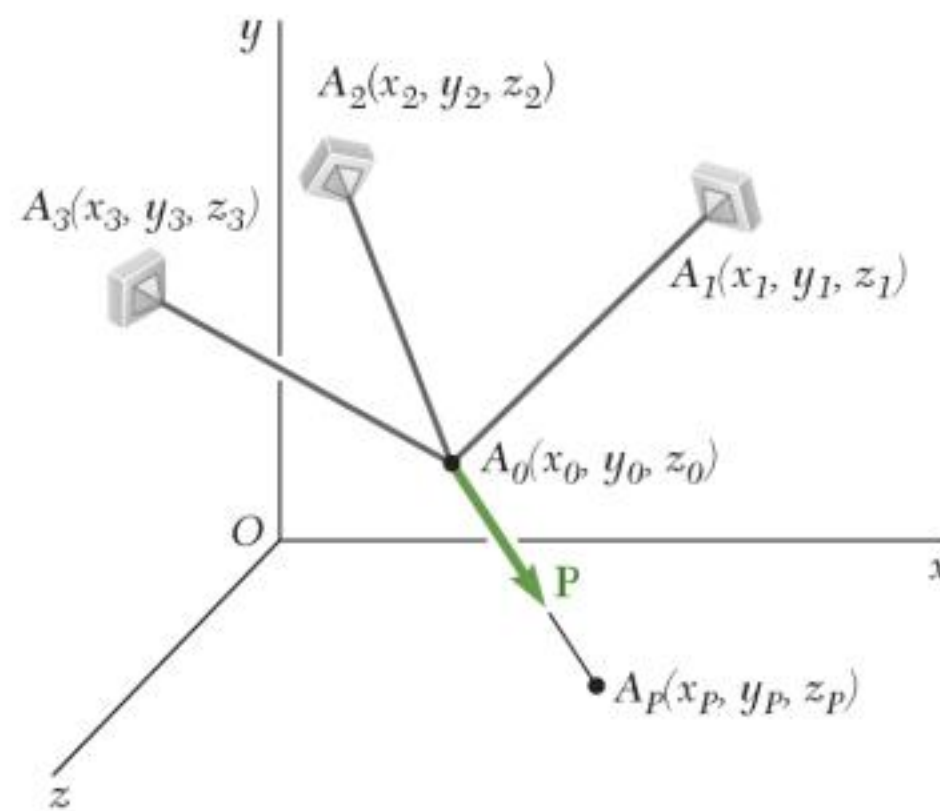


Figura P2.C5

O encouraçado USS *New Jersey* é manobrado por quatro rebocadores no porto naval de Bremerton. Neste capítulo, mostraremos que as forças exercidas pelos quatro rebocadores sobre o navio poderiam ser substituídas por uma única força equivalente exercida por um rebocador potente.



CAPÍTULO 3

Corpos rígidos: sistemas equivalentes de forças



3

Corpos rígidos: sistemas equivalentes de forças

- 3.1 Introdução
- 3.2 Forças externas e forças internas
- 3.3 Princípio da transmissibilidade e forças equivalentes
- 3.4 Produto vetorial de dois vetores
- 3.5 Produtos vetoriais expressos em termos de componentes retangulares
- 3.6 Momento de uma força em relação a um ponto
- 3.7 Teorema de Varignon
- 3.8 Componentes retangulares do momento de uma força
- 3.9 Produto escalar de dois vetores
- 3.10 Produto triplo misto de três vetores
- 3.11 Momento de uma força em relação a um dado eixo
- 3.12 Momento de um binário
- 3.13 Binários equivalentes
- 3.14 Adição de binários
- 3.15 Binários podem ser representados por vetores
- 3.16 Substituição de uma dada força por uma força em o e um binário
- 3.17 Redução de um sistema de forças a uma força e um binário
- 3.18 Sistemas equivalentes de forças
- 3.19 Sistemas equipolentes de vetores
- 3.20 Casos particulares de redução de um sistema de forças
- 3.21 Redução de um sistema de forças a um tissor

3.1 Introdução

No capítulo anterior, admitiu-se que cada corpo considerado poderia ser tratado como uma única partícula. Tal ponto de vista, porém, nem sempre é possível, e um corpo, em geral, deve ser tratado como uma combinação de um grande número de partículas. O tamanho do corpo terá de ser levado em conta, bem como o fato de que as forças atuarão sobre partículas diferentes e, portanto, terão diferentes pontos de aplicação.

Na maior parte dos casos, os corpos considerados em mecânica elementar são *rígidos*, sendo um *corpo rígido* aquele que não se deforma. No entanto, as estruturas e máquinas reais nunca são absolutamente rígidas e se deformam sob a ação das cargas a que estão sujeitas. Essas deformações, contudo, geralmente são pequenas e não afetam de modo apreciável as condições de equilíbrio ou movimento da estrutura em consideração. São importantes, por outro lado, na medida em que a resistência da estrutura a falhas é levada em consideração, e são estudadas em mecânica dos materiais.

Neste capítulo, você estudará o efeito de forças exercidas sobre um corpo rígido e aprenderá a substituir um dado sistema de forças por um sistema equivalente mais simples. Essa análise terá por base o pressuposto fundamental: o efeito de uma dada força sobre um corpo rígido permanece inalterado se essa força for deslocada ao longo da sua linha de ação (*princípio da transmissibilidade*). Por conseguinte, forças que atuam sobre um corpo rígido podem ser representadas por *vetores deslizantes*, como indicamos anteriormente na Seção 2.3.

Dois conceitos importantes associados ao efeito de uma força sobre um corpo rígido são o *momento de uma força em relação a um ponto* (Seção 3.6) e o *momento de uma força em relação a um eixo* (Seção 3.11). Uma vez que a determinação dessas grandezas envolve o cálculo de produtos vetoriais e produtos escalares de dois vetores, os fundamentos de álgebra vetorial serão apresentados neste capítulo e aplicados na solução de problemas que envolvam forças que atuam sobre corpos rígidos.

Outro conceito importante apresentado neste capítulo é o de *binário*, ou seja, a combinação de duas forças de mesma intensidade, linhas de ação paralelas e sentido oposto (Seção 3.12). Como você verá, qualquer sistema de forças que atuam sobre um corpo rígido pode ser substituído por um sistema equivalente que consista em uma força que atua em um dado ponto e um binário. Esse sistema básico é denominado *sistema força-binário*. No caso de forças paralelas, coplanares ou concorrentes, o sistema força-binário equivalente pode ainda ser reduzido a uma única força, denominada *resultante* do sistema, ou a um único binário, denominado *binário resultante* do sistema.

3.2 Forças externas e forças internas

As forças que atuam sobre corpos rígidos podem ser separadas em dois grupos: (1) *forças externas* e (2) *forças internas*:

1. As *forças externas* representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido em consideração. São inteiramente responsáveis pelo comportamento externo do corpo rígido. As forças externas vão causar o movimento do corpo ou garantir que ele permaneça em repouso. Neste capítulo e nos Caps. 4 e 5, vamos nos preocupar apenas com forças externas.

2. As *forças internas* são as forças que mantêm juntas as partículas que formam o corpo rígido. Se o corpo rígido é composto estruturalmente de várias partes, as forças que mantêm juntas as partes componentes também são definidas como forças internas. As forças internas serão estudadas nos Caps. 6 e 7.

Como exemplo de forças externas, consideremos as forças atuantes sobre um caminhão enguiçado que três pessoas puxam para frente por meio de uma corda amarrada no para-choque dianteiro (Fig. 3.1). As forças externas que atuam sobre o caminhão estão mostradas em um *diagrama de corpo livre* (Fig. 3.2). Consideremos primeiro o *peso* do caminhão. Embora ele englobe o efeito da atração da Terra sobre cada uma das partículas que compõem o caminhão, o peso pode ser representado por uma única força \mathbf{W} . O *ponto de aplicação* desta força, isto é, o ponto onde a força atua, é definido como sendo o *centro de gravidade* do caminhão. Veremos no Cap. 5 como determinar os centros de gravidade. O peso \mathbf{W} tende a mover o caminhão verticalmente para baixo. De fato, ele realmente faria o caminhão mover-se para baixo, isto é, cair, não fosse a presença do solo. O solo opõe-se ao movimento descendente do caminhão por meio das reações \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 . Essas forças são exercidas *pelo solo sobre o caminhão* e, portanto, devem ser incluídas entre as forças externas que agem sobre o caminhão.

As pessoas que puxam a corda exercem uma força \mathbf{F} . O ponto de aplicação de \mathbf{F} está sobre o para-choque dianteiro. A força \mathbf{F} tende a mover o caminhão para frente em linha reta e realmente, o fará, já que não há forças externas opondo-se a esse movimento. (Para simplificar, desprezamos aqui a resistência de rolamento.) Esse movimento do caminhão para frente, durante o qual cada linha reta mantém sua orientação original (o assoalho do caminhão permanece na horizontal e a carroceria permanece na vertical) é conhecido como *translação*. Outras forças podem causar no caminhão um tipo diferente de movimento. Por exemplo, a força exercida por um macaco colocado sob o eixo dianteiro faria o caminhão girar em torno do eixo traseiro. Tal movimento denomina-se *rotação*. Logo, pode-se concluir que cada uma das *forças externas* que atuam sobre um *corpo rígido* pode, caso não seja contrabalançada, imprimir ao corpo rígido um movimento de translação ou de rotação, ou ambos.



Figura 3.1

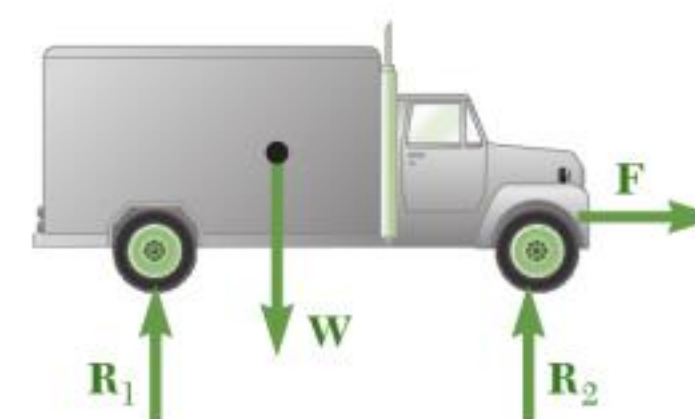


Figura 3.2

3.3 Princípio da transmissibilidade e forças equivalentes

O *princípio da transmissibilidade* estabelece que as condições de equilíbrio ou movimento de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força \mathbf{F} que atue em um dado ponto do corpo rígido for substituída por uma força \mathbf{F}' de intensidade, direção e sentido iguais, mas atuando em um ponto diferente, *desde que essas duas forças tenham igual linha de ação* (Fig. 3.3). As duas forças \mathbf{F} e \mathbf{F}' têm o mesmo efeito sobre o corpo rígido, e diz-se que são *equivalentes*. O princípio da transmissibilidade, que estabelece que a ação de uma força pode ser *transmitida* ao longo da sua linha de ação, está baseado em evidência experimental; Esse princípio *não pode* ser deduzido das propriedades estabelecidas até aqui neste texto e, portanto, deve ser aceito como uma lei experimental. Todavia, como veremos na Seção 16.5, o princípio da transmissibilidade pode ser deduzido do estudo da dinâmica dos corpos rígidos, mas, para esse estudo, é necessária a introdução da segunda e da terceira leis de Newton,

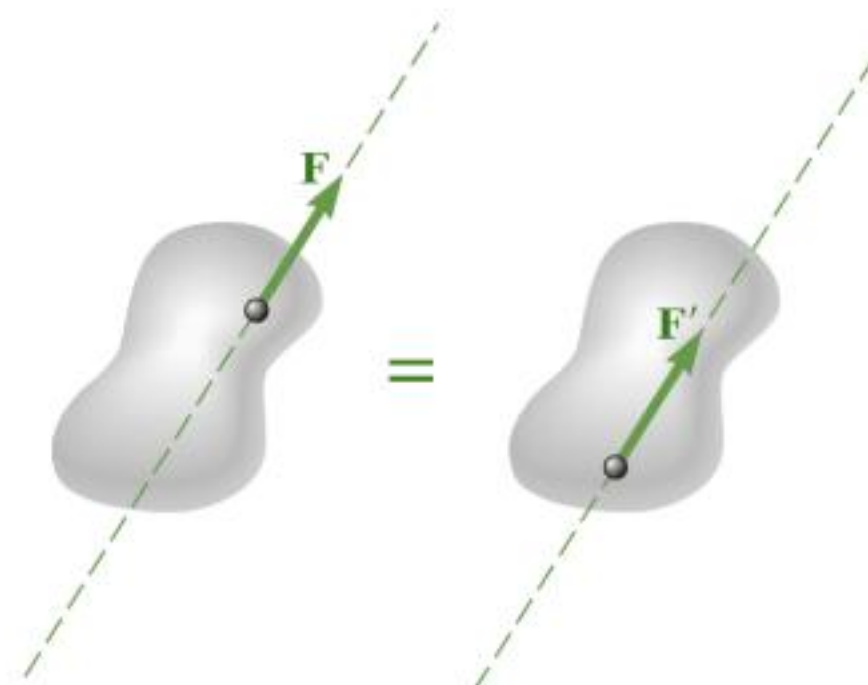


Figura 3.3

bem como de uma gama de outros conceitos. Logo, nosso estudo da estática dos corpos rígidos será baseado nos três princípios apresentados até agora, ou seja, a lei do paralelogramo de adição, a primeira lei de Newton e o princípio da transmissibilidade.

No Cap. 2, indicamos que as forças atuantes sobre uma partícula podem ser representadas por vetores. Esses vetores tinham um ponto de aplicação bem definido, a saber, a própria partícula e, portanto, eram vetores fixos. No caso de forças que atuam sobre um corpo rígido, porém, o ponto de aplicação da força não importa desde que a linha de ação permaneça inalterada. Logo, forças que atuam sobre um corpo rígido devem ser representadas por um tipo diferente de vetor, denominado *vetor deslizante*, pois as forças são livres para deslizar ao longo de suas linhas de ação. Devemos notar que todas as propriedades a ser deduzidas nas próximas seções para as forças que atuam sobre um corpo rígido serão válidas de modo mais geral para qualquer sistema de vetores deslizantes. Todavia, a fim de manter nossa exposição mais intuitiva, iremos obtê-las em termos de forças físicas em vez de vetores deslizantes matemáticos.

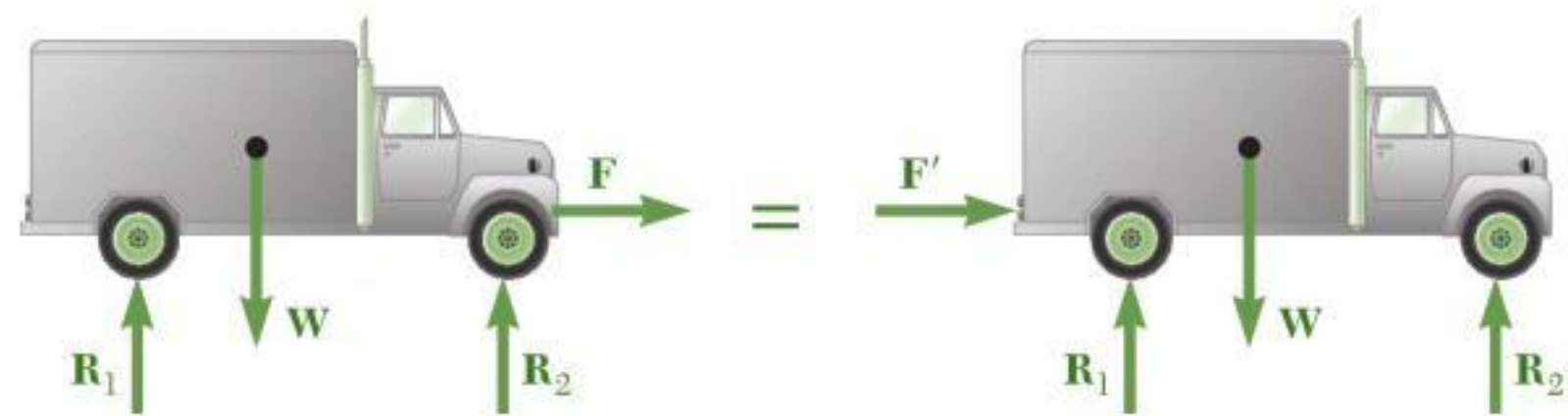


Figura 3.4

Retornando ao exemplo do caminhão, observemos primeiro que a linha de ação da força \mathbf{F} é uma linha horizontal que passa através do para-choque dianteiro e traseiro (Fig. 3.4). Aplicando o princípio da transmissibilidade, podemos então substituir \mathbf{F} por uma *força equivalente* \mathbf{F}' que atua sobre o para-choque traseiro. Em outras palavras, as condições de movimento não são afetadas e todas as outras forças externas que atuam sobre o caminhão (\mathbf{W} , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2) permanecem inalteradas se as pessoas empurrarem pelo para-choque traseiro em vez de puxar pelo para-choque dianteiro do caminhão.

Contudo, o princípio da transmissibilidade e o conceito de forças equivalentes têm limitações. Considere, por exemplo, uma barra curta AB sujeita a forças axiais iguais e opostas \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , como mostra a Fig. 3.5a. De acordo com o princípio da transmissibilidade, a força \mathbf{P}_2 pode ser substituída por uma força \mathbf{P}'_2 com a mesma intensidade, a mesma linha

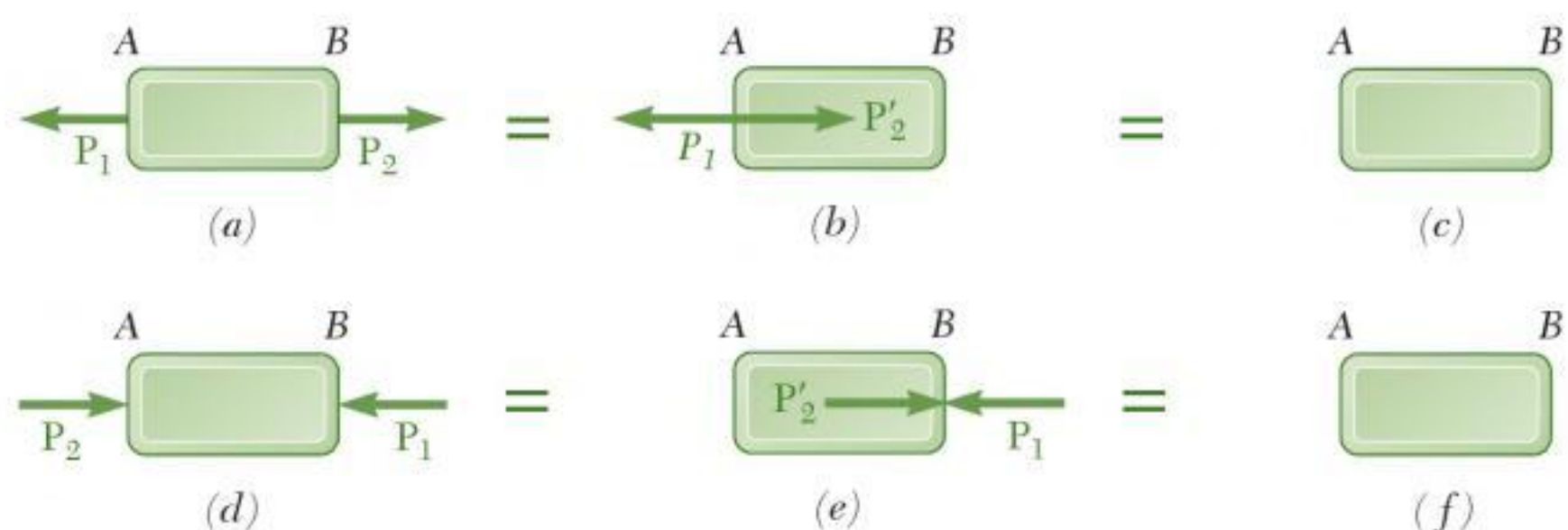


Figura 3.5

de ação e o mesmo sentido, mas atuando em A em vez de B (Fig. 3.5b). As forças \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 que atuam sobre a mesma partícula podem ser adicionadas de acordo com as regras do Cap. 2 e, como essas forças são iguais e opostas, sua soma é igual a zero. Logo, em termos do comportamento externo da barra, o sistema original de forças mostrado na Fig. 3.5a é equivalente a nenhuma força aplicada (Fig. 3.5c).

Considere agora as duas forças iguais e opostas \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 atuando sobre a barra AB , como mostra a Fig. 3.5d. A força \mathbf{P}_2 pode ser substituída por uma força \mathbf{P}'_2 de igual intensidade, igual linha de ação e sentido, mas atuando em B em vez de em A (Fig. 3.5e). As forças \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}'_2 podem então ser adicionadas e sua soma é de novo zero (Fig. 3.5f). Logo, do ponto de vista da mecânica dos corpos rígidos, os sistemas mostrados na Fig. 3.5a e d são equivalentes. Mas as *forças internas* e as *deformações* produzidas pelos dois sistemas são nitidamente diferentes. A barra da Fig. 3.5a está sob *tração* e, não sendo absolutamente rígida, irá aumentar ligeiramente de comprimento; a barra da Fig. 3.5d está sob *compressão* e, não sendo absolutamente rígida, irá diminuir ligeiramente de comprimento. Portanto, o princípio da transmissibilidade, embora possa ser usado livremente na determinação das condições de movimento ou de equilíbrio de corpos rígidos e no cálculo das forças externas que atuam sobre esses corpos, deve ser evitado ou, pelo menos, utilizado com cuidado na determinação de forças internas e deformações.

3.4 Produto vetorial de dois vetores

A fim de compreendermos melhor o efeito de uma força sobre um corpo rígido, vamos apresentar agora um novo conceito, o conceito de *momento de uma força em relação a um ponto*. Esse conceito será mais bem compreendido e aplicado de maneira mais eficaz se antes acrescentarmos às ferramentas matemáticas de que dispomos o *produto vetorial* de dois vetores.

O produto vetorial de dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} é definido como o vetor \mathbf{V} que satisfaz às seguintes condições.

1. A linha de ação de \mathbf{V} é perpendicular ao plano que contém \mathbf{P} e \mathbf{Q} (Fig. 3.6a).
2. A intensidade de \mathbf{V} é o produto das intensidades de \mathbf{P} e \mathbf{Q} e do seno do ângulo θ formado por \mathbf{P} e \mathbf{Q} (cujo valor será sempre menor ou igual a 180°); temos então:

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

3. A direção e o sentido de \mathbf{V} são obtidos pela regra *da mão direita*. Feche a mão direita e posicione-a de modo que seus dedos se curvem no mesmo sentido da rotação em θ que leva o vetor \mathbf{P} a alinhar-se com o vetor \mathbf{Q} ; seu polegar irá então indicar a direção e o sentido do vetor \mathbf{V} (Fig. 3.6b). Observe que, se não tiverem um ponto comum de aplicação, \mathbf{P} e \mathbf{Q} deverão primeiro ser redesenhados com as origens no mesmo ponto. Os três vetores \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{V} – tomados nesta ordem – formam uma *tríade orientada diretamente*.^{*}

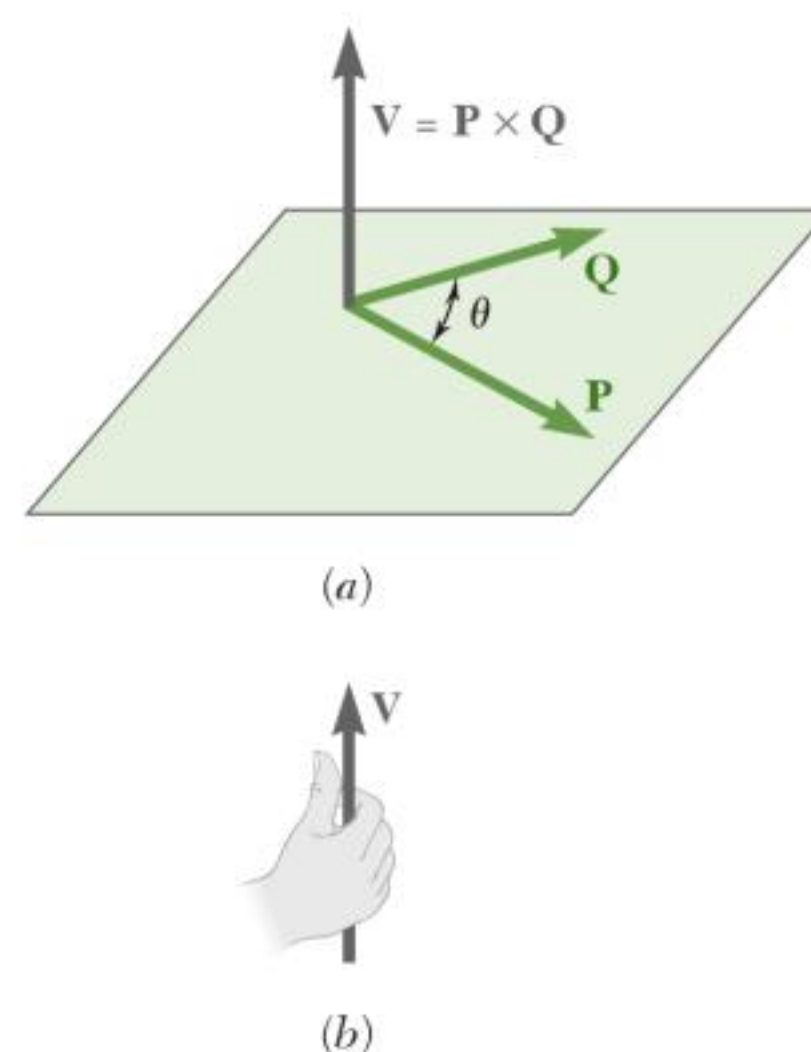


Figura 3.6

^{*} Devemos observar que os eixos x , y e z usados no Cap. 2 formam um sistema de eixos ortogonais orientado diretamente e que os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} definidos na Seção 2.12 formam uma tríade ortogonal orientada diretamente.

Conforme mencionamos anteriormente, o vetor \mathbf{V} que satisfaz essas três condições (que o definem univocamente) é citado como o produto vetorial de \mathbf{P} e \mathbf{Q} ; esse vetor é representado pela expressão matemática

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

Por causa da notação que usamos o produto vetorial dos vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} é chamado de *produto vetorial* de \mathbf{P} e \mathbf{Q} .

Tem-se da Eq. (3.1) que, quando dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} têm a mesma direção e sentidos iguais ou opostos, seu produto vetorial é nulo. No caso geral em que o ângulo θ formado pelos dois vetores não é 0° nem 180° , é possível fornecer uma interpretação geométrica simples da Eq. (3.1): a intensidade V do produto vetorial de \mathbf{P} e \mathbf{Q} é igual à área do paralelogramo que tem \mathbf{P} e \mathbf{Q} como lados (Fig. 3.7). Logo, o produto vetorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ ficará inalterado se substituirmos \mathbf{Q} por um vetor \mathbf{Q}' coplanar com \mathbf{P} e \mathbf{Q} e tal que a linha que une as pontas de \mathbf{Q} e \mathbf{Q}' seja paralela a \mathbf{P} . Escrevemos

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \quad (3.3)$$

Da terceira condição usada para definir o produto vetorial \mathbf{V} de \mathbf{P} e \mathbf{Q} , ou seja, a condição que estabelece que \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{V} devam formar uma tríade orientada diretamente, conclui-se que os produtos vetoriais *não são comutativos*, ou seja, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ não é igual a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De fato, podemos constatar facilmente que $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ é representado pelo vetor $-\mathbf{V}$, que é igual e oposto a \mathbf{V} . Escrevemos então

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

EXEMPLO Vamos calcular o produto vetorial $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$, onde o vetor \mathbf{P} tem intensidade 6 e está no plano zx a um ângulo de 30° com o eixo x , e onde o vetor \mathbf{Q} é de intensidade 4 e está sobre o eixo x (Fig. 3.8).

Segue-se diretamente da definição de produto vetorial que o vetor \mathbf{V} deve estar ao longo do eixo y , deve ter a intensidade

$$V = PQ \sin \theta = (6)(4) \sin 30^\circ = 12$$

e deve estar direcionado para cima. ■

Vimos que propriedade comutativa não se aplica aos produtos vetoriais. Podemos nos perguntar se a propriedade *distributiva* vale, ou seja, se a relação

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \quad (3.5)$$

é válida. A resposta é *sim*. Muitos leitores provavelmente estarão propensos a aceitar sem demonstração formal uma resposta que eles intuitivamente julgam correta. Entretanto, como toda a estrutura tanto da álgebra vetorial como da estática depende da relação (3.5), devemos despende um tempo em deduzi-la.

Sem perder o caráter geral da operação, podemos admitir que \mathbf{P} esteja dirigido ao longo do eixo y (Fig. 3.9a). \mathbf{Q} represente a soma de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 , traçamos então perpendiculares a partir das pontas de \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 até o plano zx , definindo desse modo os vetores \mathbf{Q}' , \mathbf{Q}'_1 e \mathbf{Q}'_2 . Esses vetores serão chamados, respectivamente, de *projeções* de \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 sobre o plano zx . Retomando a propriedade expressa pela Eq. (3.3), notamos que

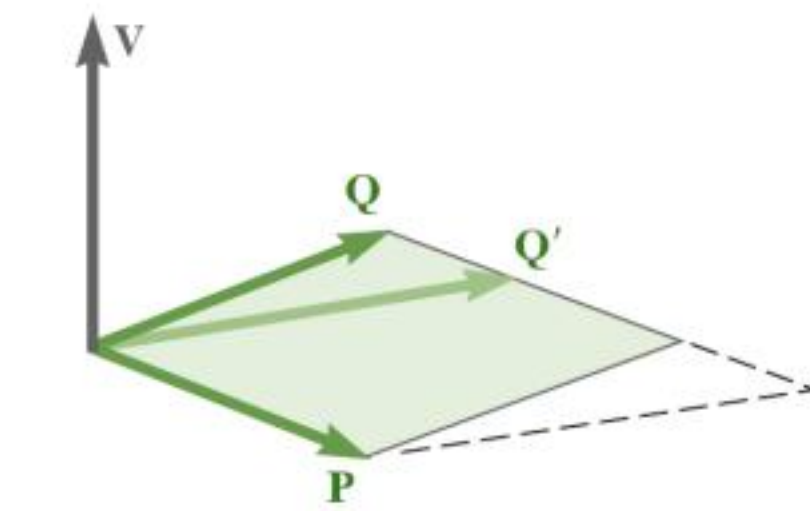


Figura 3.7

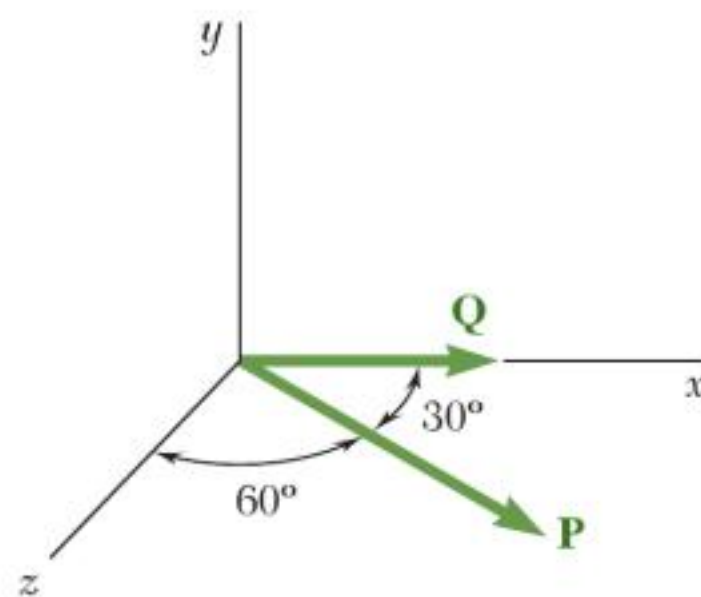


Figura 3.8

o primeiro membro da Eq. (3.5) pode ser substituído por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$; análogamente, os produtos vetoriais $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$ podem ser substituídos, respectivamente, por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1$ e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2$. Logo, a relação a ser demonstrada pode ser escrita na forma

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2 \quad (3.5')$$

Observamos agora que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ pode ser obtido a partir de \mathbf{Q}' , multiplicando-se este vetor pelo escalar P e girando-o 90° no sentido anti-horário no plano zx (Fig. 3.9b); os outros dois produtos vetoriais na Eq. (3.5') podem ser obtidos da mesma forma a partir de \mathbf{Q}'_1 e \mathbf{Q}'_2 ,

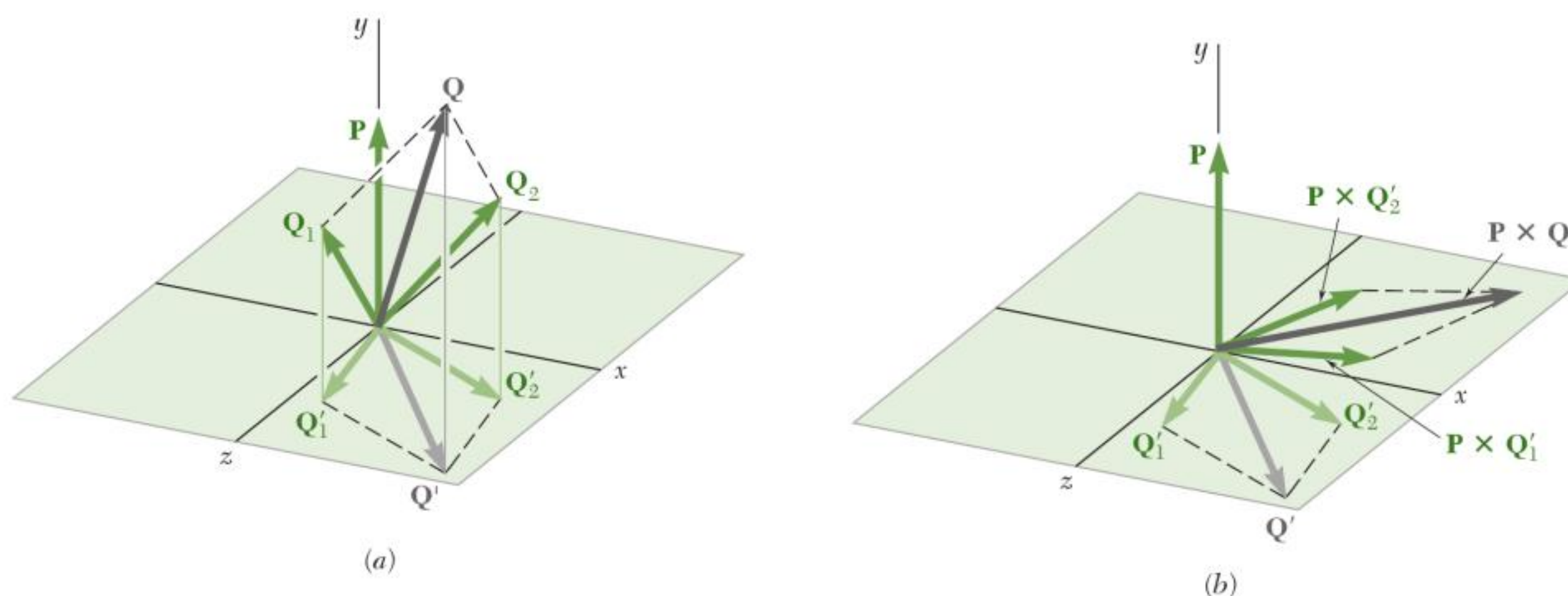


Figura 3.9

respectivamente. Agora, como a projeção de um paralelogramo sobre um plano arbitrário é um paralelogramo, a projeção \mathbf{Q}' da soma \mathbf{Q} de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 deve ser a soma das projeções \mathbf{Q}'_1 e \mathbf{Q}'_2 de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 sobre o mesmo plano (Fig. 3.9a). Esta relação entre os vetores \mathbf{Q}' , \mathbf{Q}'_1 e \mathbf{Q}'_2 ainda será válida depois que os três vetores tenham sido multiplicados pelo escalar P e girados 90° (Fig. 3.9b). Logo, a relação (3.5') está demonstrada, e podemos agora estar seguros de que a propriedade distributiva vale para os produtos vetoriais.

Uma terceira propriedade, a propriedade associativa, não se aplica aos produtos vetoriais; em geral, temos

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \quad (3.6)$$

3.5 Produtos vetoriais expressos em termos de componentes retangulares

Vamos determinar agora o produto vetorial de dois vetores unitários quaisquer entre \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , definidos no Cap. 2. Considere primeiro o produto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (Fig. 3.10a). Como ambos os vetores têm intensidade igual a 1, e como formam um ângulo reto entre si, seu produto vetorial também será um vetor unitário. Esse vetor unitário será \mathbf{k} , pois os vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são mutuamente perpendiculares e formam uma tríade orientada diretamente. Por outro lado, resulta da regra da mão direita, mencionada na Seção 3.4 – Produto vetorial de dois vetores, que o produto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ será

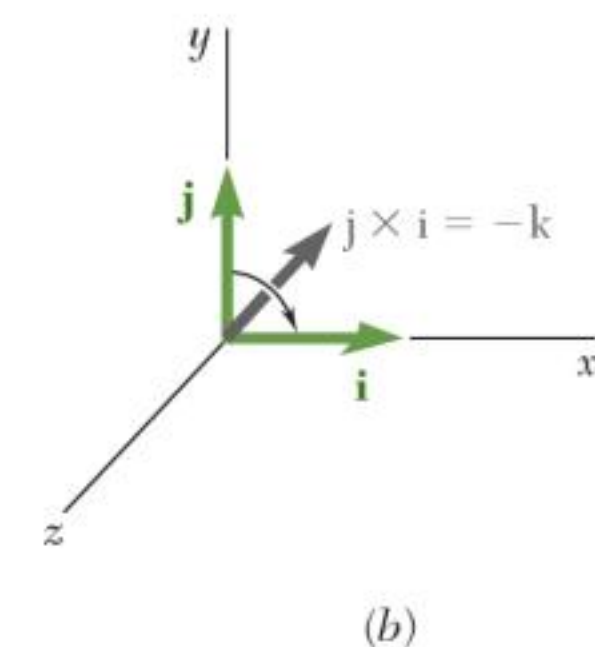
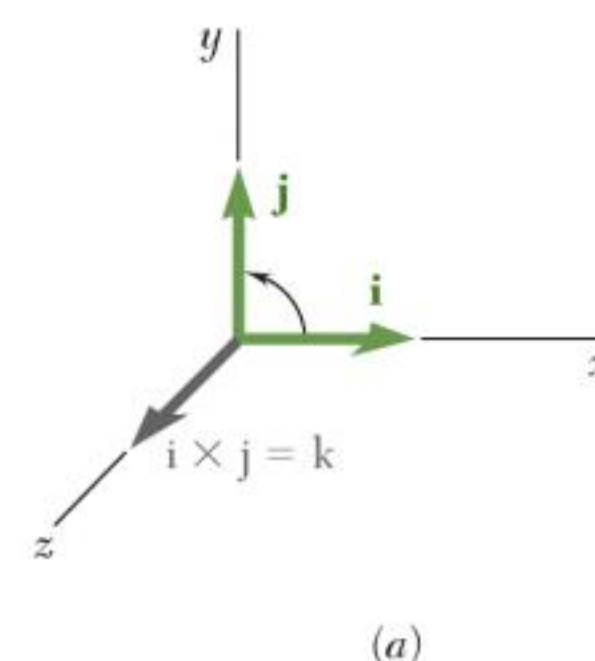


Figura 3.10

igual a $-\mathbf{k}$ (Fig. 3.10b). Finalmente, deve-se observar que o produto vetorial de um vetor unitário por si próprio, tal como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, é igual a zero, pois ambos os vetores têm a mesma direção. Os produtos vetoriais dos vários pares possíveis de vetores unitários são

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} \quad (3.7)$$

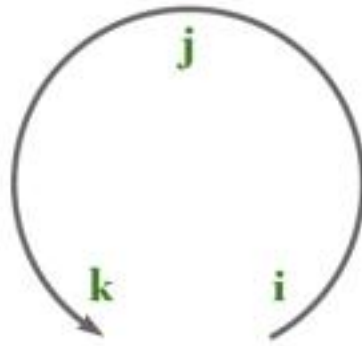


Figura 3.11

Arranjando as três letras que representam os vetores unitários em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.11), podemos simplificar a determinação do sinal do produto vetorial de dois vetores unitários. O produto vetorial de dois vetores unitários será positivo se ambos seguirem um ao outro em ordem anti-horária e será negativo se seguirem um ao outro em ordem horária.

Podemos agora expressar o produto vetorial \mathbf{V} de dois vetores dados \mathbf{P} e \mathbf{Q} em termos dos componentes retangulares desses vetores. Decompondo \mathbf{P} e \mathbf{Q} , escrevemos primeiro

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Usando a propriedade distributiva, expressamos \mathbf{V} como uma soma de produtos vetoriais, tais como $P_x \mathbf{i} \times Q_y \mathbf{j}$. Uma vez que cada uma das expressões obtidas é igual ao produto vetorial de dois vetores unitários, tais como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicado pelo produto de dois escalares, tais como $P_x Q_y$, e retomando as identidades (3.7), obtemos, após a fatoração de \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} ,

$$\mathbf{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

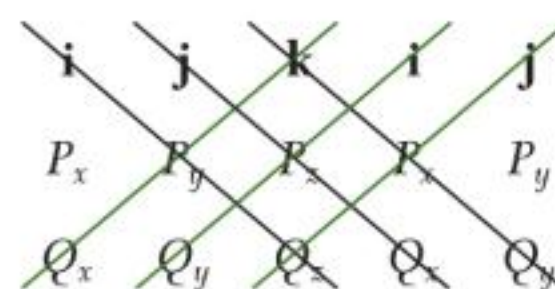
Os componentes retangulares do produto vetorial \mathbf{V} são determinados então como

$$\begin{array}{l} V_x = P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y = P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z = P_x Q_y - P_y Q_x \end{array} \quad (3.9)$$

Retornando à Eq. (3.8), observamos que o segundo elemento representa a expansão de um determinante. O produto vetorial \mathbf{V} pode então ser representado na seguinte forma, mais fácil de memorizar.*

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

* Qualquer determinante que consista em três linhas e três colunas pode ser calculado repetindo-se a primeira e a segunda colunas e formando-se os produtos ao longo de cada linha diagonal. A soma dos produtos obtidos ao longo das linhas é então subtraída da soma dos produtos obtidos ao longo das linhas em preto.



3.6 Momento de uma força em relação a um ponto

Vamos considerar agora uma força \mathbf{F} que atua sobre um corpo rígido (Fig. 3.12a). Como sabemos, a força \mathbf{F} é representada por um vetor que define sua intensidade, sua direção e seu sentido. Entretanto, o efeito da força sobre o corpo rígido depende também do seu ponto de aplicação A . A posição de A pode ser convenientemente definida pelo vetor \mathbf{r} que liga o ponto de referência fixo O com A ; esse vetor é conhecido como *vetor posição* de A .^o O vetor posição \mathbf{r} e a força \mathbf{F} definem o plano mostrado na Fig. 3.12a.

Vamos definir o *momento de \mathbf{F} em relação a O* como o produto vetorial de \mathbf{r} e \mathbf{F} :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

De acordo com a definição de produto vetorial dada na Seção 3.4, o momento \mathbf{M}_O deve ser perpendicular ao plano que contém O e a força \mathbf{F} . O sentido de \mathbf{M}_O é definido pelo sentido da rotação que faz o vetor \mathbf{r} ficar alinhado com o vetor \mathbf{F} ; essa rotação será vista como *anti-horária* por um observador localizado na ponta de \mathbf{M}_O . Outro modo de se definir o sentido de \mathbf{M}_O é fornecido por uma variação da regra da mão direita: feche a mão direita e a posicione de modo que seus dedos fiquem curvados no sentido da rotação que \mathbf{F} imprimiria ao corpo rígido em relação a um eixo fixo dirigido ao longo da linha de ação de \mathbf{M}_O ; seu polegar irá indicar o sentido do momento \mathbf{M}_O (Fig. 3.12b).

Finalmente, representando por θ o ângulo formado entre as linhas de ação do vetor posição \mathbf{r} e a força \mathbf{F} , concluímos que a intensidade do momento de \mathbf{F} em relação a O é

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

onde d representa a distância perpendicular de O até a linha de ação de \mathbf{F} . Como a tendência de uma força \mathbf{F} de fazer um corpo rígido girar em torno de um eixo fixo perpendicular à força depende da distância de \mathbf{F} desse eixo bem como da intensidade de \mathbf{F} , notamos que *a intensidade de \mathbf{M}_O mede a tendência de uma força \mathbf{F} de fazer o corpo rígido girarem torno de um eixo fixo dirigido ao longo de \mathbf{M}_O* .

No Sistema Internacional de Unidades, no qual a força é expressa em newtons (N) e a distância em metros (m), o momento de uma força é expresso em newton-metros (N · m). No sistema usual de unidades dos EUA, onde a força é expressa em libras e a distância em pés ou polegadas, o momento de uma força é expresso em lb · ft ou lb · in.

Podemos observar que, embora o momento \mathbf{M}_O de uma força em relação a um ponto dependa da intensidade, da linha de ação e do sentido da força, ele *não* depende da posição real do ponto de aplicação da força ao longo da sua linha de ação. De modo inverso, o momento \mathbf{M}_O de uma força \mathbf{F} não caracteriza a posição do ponto de aplicação de \mathbf{F} .

Todavia, como veremos agora, o momento \mathbf{M}_O de uma força \mathbf{F} de intensidade, direção e sentido conhecidos *define completamente a linha*

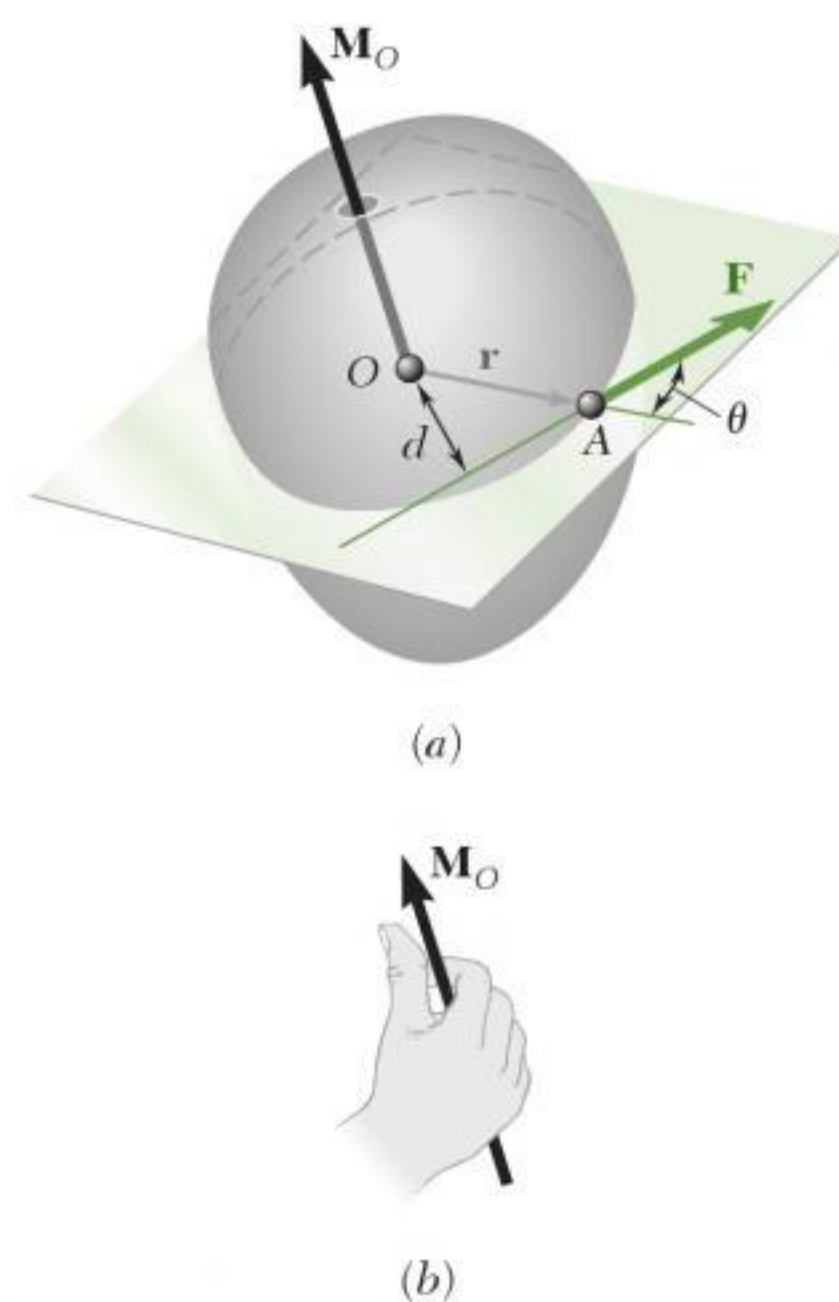


Figura 3.12

^o Podemos facilmente verificar que os vetores posição obedecem à lei da adição de vetores e, portanto, são vetores verdadeiros. Considere, por exemplo, os vetores posição \mathbf{r} e \mathbf{r}' de A com relação a dois pontos de referência O e O' e o vetor posição \mathbf{s} de O com relação a O' (Fig. 3.40a, Seção 3.16). Verificamos que o vetor posição $\mathbf{r}' = \vec{O'A}$ pode ser obtido dos vetores posição $\mathbf{s} = \vec{OO'}$ e $\mathbf{r} = \vec{OA}$, aplicando-se a regra do triângulo para adição de vetores.

de ação de \mathbf{F} . De fato, a linha de ação de \mathbf{F} deve estar em um plano que contenha O e ser perpendicular ao momento \mathbf{M}_O ; sua distância d de O deve ser igual ao quociente M_O / F das intensidades de \mathbf{M}_O e \mathbf{F} ; e o sentido de \mathbf{M}_O determina se a linha de ação de \mathbf{F} deve ser traçada de um lado ou de outro do ponto O .

Lembremos, da Seção 3.3, que o princípio da transmissibilidade estabelece que duas forças \mathbf{F} e \mathbf{F}' são equivalentes (isto é, têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido) se tiverem a mesma intensidade, a mesma linha de ação e o mesmo sentido. Esse princípio pode agora ser reescrito da seguinte maneira: *duas forças \mathbf{F} e \mathbf{F}' são equivalentes se, e somente se, forem iguais* (isto é, se tiverem a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido) *e têm momentos iguais em relação a um dado ponto O* . Logo, as condições necessárias e suficientes para que duas forças \mathbf{F} e \mathbf{F}' sejam equivalentes são

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \quad (3.13)$$

Devemos observar, a partir desse enunciado, que, se as relações (3.13) valem para um dado ponto O , irão valer para qualquer outro ponto.

Problemas envolvendo apenas duas dimensões. Muitas aplicações lidam com estruturas bidimensionais, ou seja, estruturas que têm comprimento e largura, mas profundidade desprezível e estão sujeitas a forças contidas no plano da estrutura. Estruturas bidimensionais e as forças que atuam sobre elas podem ser diretamente representadas em uma folha de papel ou em um quadro negro. Sua análise, portanto, é consideravelmente mais simples que a das estruturas e forças tridimensionais.

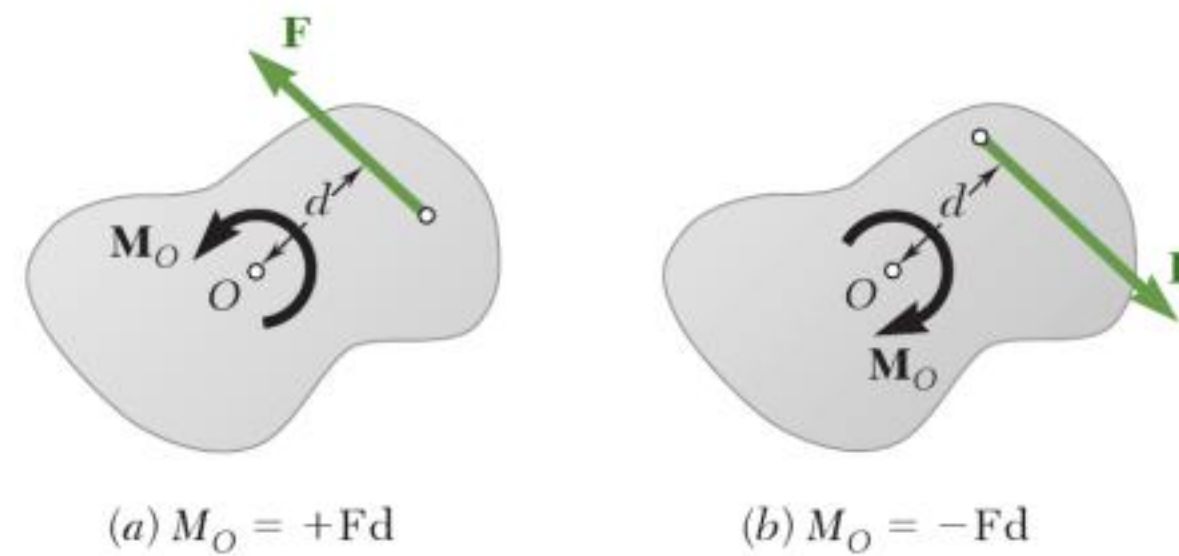


Figura 3.13

Considere, por exemplo, uma placa rígida sujeita a uma força \mathbf{F} (Fig. 3.13). O momento de \mathbf{F} em relação a um ponto O escolhido no plano da figura é representado por um vetor \mathbf{M}_O de intensidade Fd , perpendicular ao plano. No caso da Fig. 3.13a, o vetor \mathbf{M}_O aponta *para fora* do papel, enquanto no caso da Fig. 3.13b ele aponta *para dentro* do papel. Olhando para a figura, observamos, no primeiro caso, que \mathbf{F} tende a girar a placa no sentido anti-horário e, no segundo caso, que ela tende a girar a placa no sentido horário. Logo, é natural referir-se ao sentido do momento de \mathbf{F} em relação a O na Fig. 3.13a como anti-horário \curvearrowright , e na Fig. 3.13b como horário \curvearrowleft .

Como o momento de uma força \mathbf{F} que atua no plano da figura deve ser perpendicular a esse plano, precisamos especificar apenas a *intensidade* e o *sentido* do momento de \mathbf{F} em relação a O . Isso pode ser feito atribuindo-se à intensidade M_O do momento um sinal positivo ou negativo conforme o vetor \mathbf{M}_O aponte para fora ou para dentro do papel.

3.7 Teorema de Varignon

A propriedade distributiva dos produtos vetoriais pode ser usada para determinar o momento da resultante de várias *forças concorrentes*. Se várias forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$, são aplicadas ao mesmo ponto A (Fig. 3.14) e se representarmos por \mathbf{r} o vetor posição de A , segue-se imediatamente da Eq. (3.5) da Seção 3.4 que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.14)$$

Em palavras, *o momento em relação a um dado ponto O da resultante de diversas forças concorrentes é igual à soma dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto O* . Esta propriedade, que foi originalmente estabelecida pelo matemático francês Pierre Varignon (1654–1722) bem antes da introdução da álgebra vetorial, é conhecida como *teorema de Varignon*.

A relação (3.14) torna possível a substituição da determinação direta do momento de uma força \mathbf{F} pela determinação dos momentos de duas ou mais forças componentes. Como você verá na próxima seção, \mathbf{F} geralmente será decomposta em componentes paralelos aos eixos de coordenadas. Todavia, pode ser mais rápido em algumas circunstâncias decompor \mathbf{F} em componentes que não sejam paralelos aos eixos de coordenadas (ver Problema Resolvido 3.3).

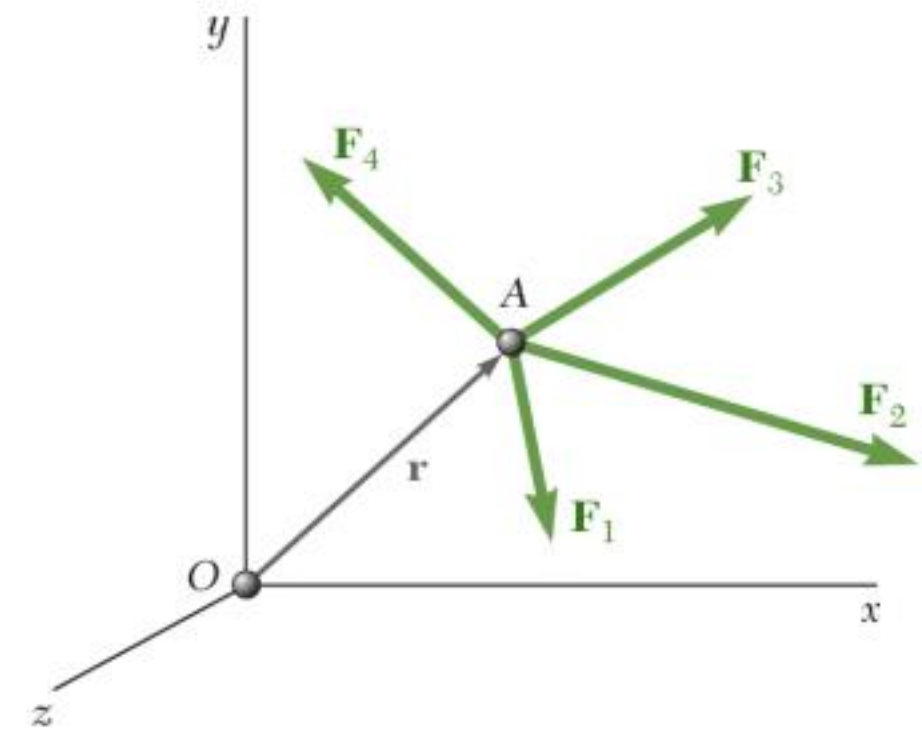


Figura 3.14

3.8 Componentes retangulares do momento de uma força

Em geral, a determinação do momento de uma força no espaço será consideravelmente simplificada se a força e o vetor posição do seu ponto de aplicação forem decompostos em componentes retangulares x , y e z . Considere, por exemplo, o momento \mathbf{M}_O em relação a O de uma força \mathbf{F} cujos componentes são F_x , F_y e F_z e que é aplicada a um ponto A de coordenadas x , y e z (Fig. 3.15). Observando que os componentes do vetor posição \mathbf{r} são respectivamente iguais às coordenadas x , y e z do ponto A , escrevemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.16)$$

Substituindo as expressões para \mathbf{r} e \mathbf{F} das Eqs. (3.15) e (3.16) em

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

e retomando os resultados obtidos na Seção 3.5, escrevemos o momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} em relação a O na seguinte forma

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \quad (3.17)$$

onde os componentes M_x , M_y e M_z são definidos pelas relações

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

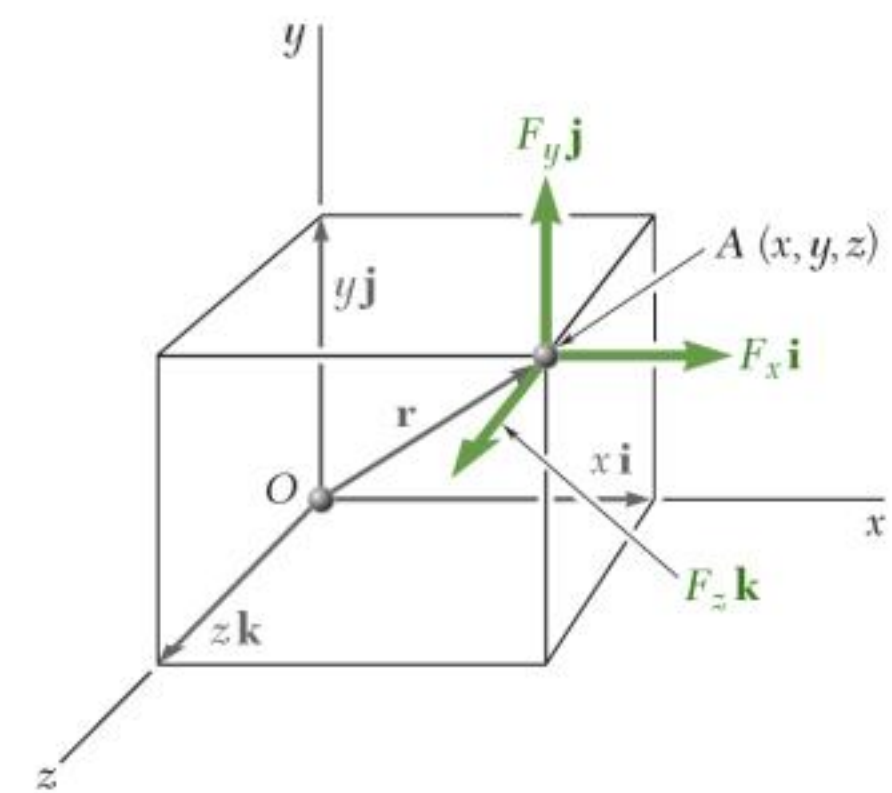


Figura 3.15

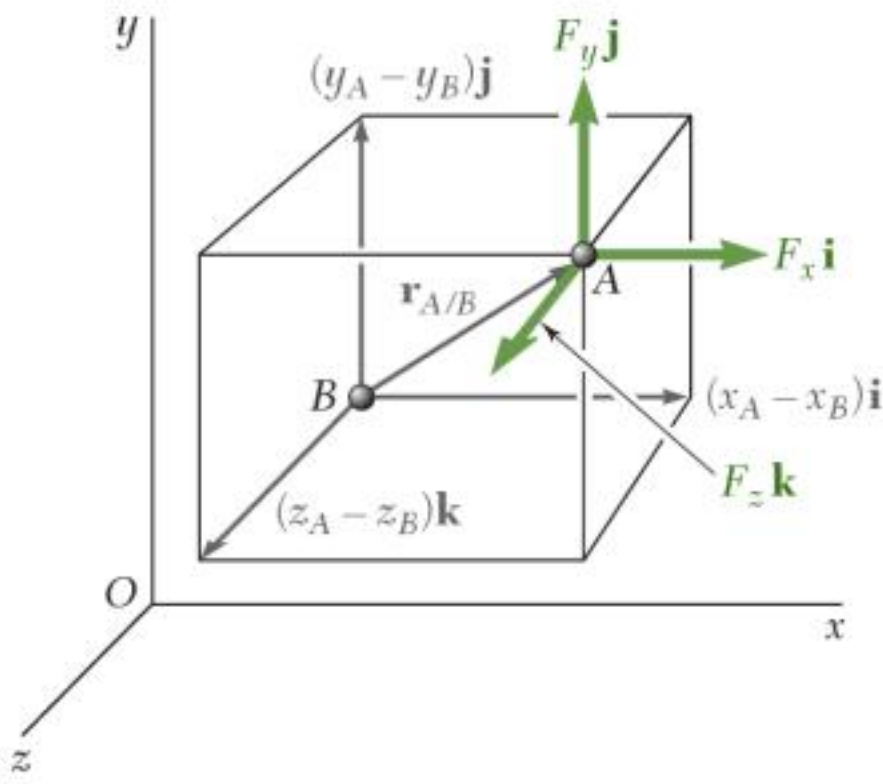


Figura 3.16

Como você verá na Seção 3.11, os componentes escalares M_x , M_y e M_z do momento \mathbf{M}_O medem a tendência da força \mathbf{F} de imprimir a um corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente. Substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.17), podemos também escrever \mathbf{M}_O na forma de um determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular o momento \mathbf{M}_B em relação a um ponto B arbitrário de uma força \mathbf{F} aplicada em A (Fig. 3.16), devemos substituir o vetor posição \mathbf{r} na Eq. (3.11) por um vetor traçado de B até A . Esse vetor é o *vetor posição de A com relação a B* e será representado por $\mathbf{r}_{A/B}$. Observando que $\mathbf{r}_{A/B}$ pode ser obtido subtraindo-se \mathbf{r}_B de \mathbf{r}_A , temos:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

ou, usando a forma de determinante

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

onde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ e $z_{A/B}$ representam os componentes do vetor $\mathbf{r}_{A/B}$

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

No caso de *problemas que envolvam apenas duas dimensões*, pode-se admitir que a força \mathbf{F} esteja no plano xy (Fig. 3.17). Tornando $z = 0$ e $F_z = 0$ na Eq. (3.19), obtemos:

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Verificamos que o momento de \mathbf{F} em relação a O é perpendicular ao plano da figura e é completamente definido pelo escalar:

$$\mathbf{M}_O = M_x = xF_y - yF_x \quad (3.21)$$

Conforme observamos anteriormente, um valor positivo de M_O indica que o vetor \mathbf{M}_O aponta para fora do papel (a força \mathbf{F} tende a girar o corpo no sentido anti-horário em torno de O) e um valor negativo indica que o vetor \mathbf{M}_O aponta para dentro do papel (a força \mathbf{F} tende a girar o corpo no sentido horário em torno de O).

Para calcular o momento em relação a B (x_B , y_B) de uma força situada no plano xy e aplicada em A (x_A , y_A) (Fig. 3.18), estabelecemos que $z_{A/B} = 0$ e $F_z = 0$ nas relações (3.21), e observamos que o vetor \mathbf{M}_B é perpendicular ao plano xy e é definido em intensidade e sentido pelo escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

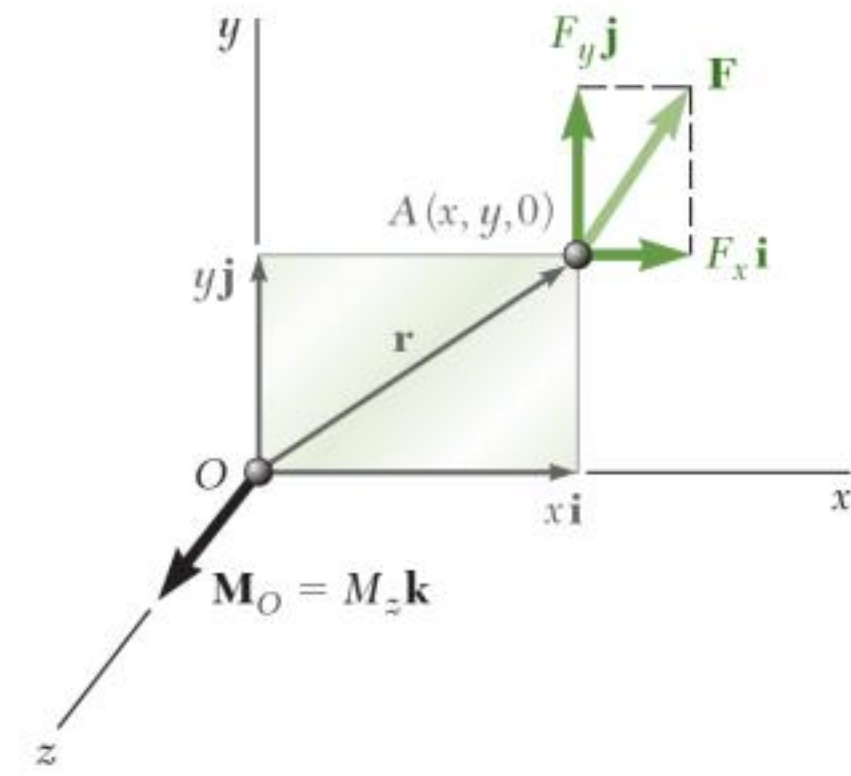


Figura 3.17

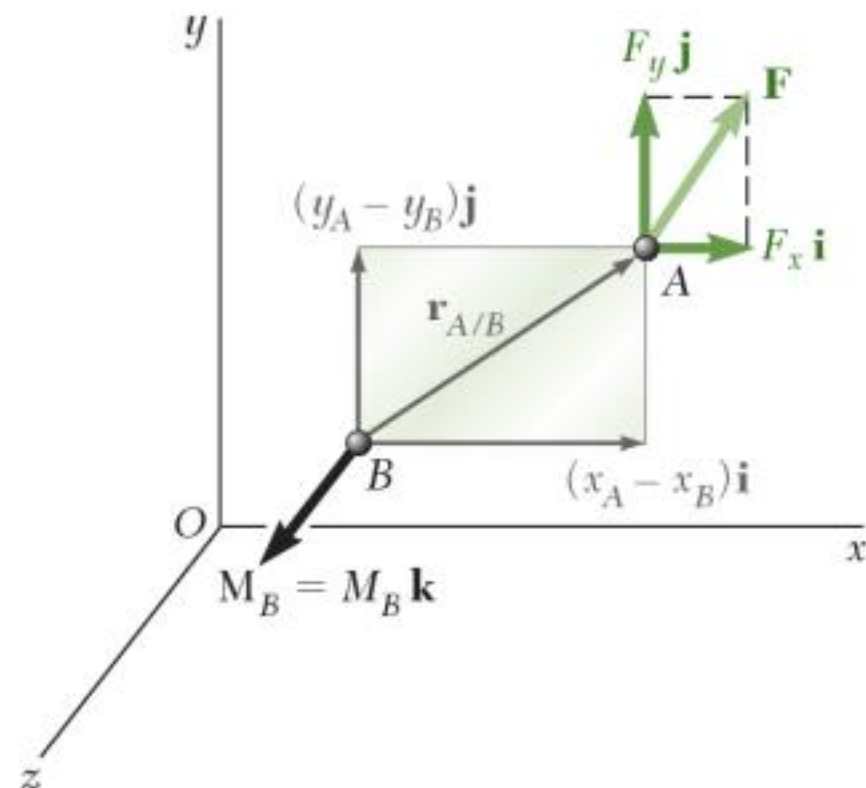
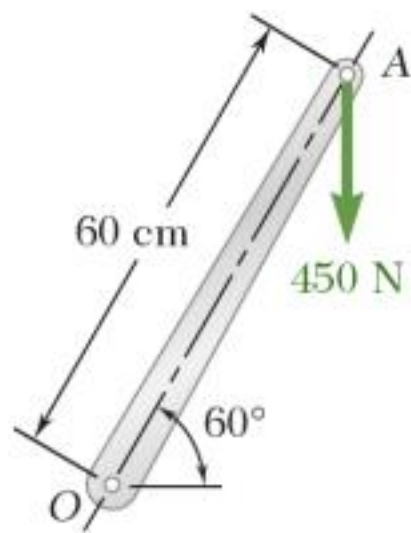


Figura 3.18



PROBLEMA RESOLVIDO 3.1

Uma força vertical de 450 N é aplicada na extremidade de um alavanca que está ligada a um eixo em O . Determine (a) o momento da força de 450 N em relação a O ; (b) a força horizontal aplicada em A que gera o mesmo momento em relação a O ; (c) a força mínima aplicada em A que gera o mesmo momento em relação a O ; (d) a que distância do eixo deve atuar uma força vertical de 1.080 N para gerar o mesmo momento em relação a O ; (e) se alguma das forças obtidas nas partes b, c e d é a força original.

SOLUÇÃO

a. Momento em relação a O . A distância perpendicular de O até a linha de ação da força de 450 N é:

$$d = (60 \text{ cm}) \cos 60^\circ = 30 \text{ cm}$$

A intensidade do momento da força de 450 N em relação a O é:

$$M_O = Fd = (450 \text{ N})(0,3 \text{ m}) = 135 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como a força tende a girar a alavanca no sentido horário em torno de O , o momento será representado pelo vetor \mathbf{M}_O perpendicular ao plano de figura e apontando para dentro do papel. Expressamos esse fato da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_O = 135 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

b. Força horizontal. Neste caso, temos:

$$d = (60 \text{ cm}) \sin 60^\circ = 52 \text{ cm}$$

Como o momento em relação a O deve ser de $135 \text{ N} \cdot \text{m}$, escrevemos:

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 135 \text{ N} \cdot \text{m} &= F(0,52 \text{ m}) \\ F &= 259,6 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = 259,6 \text{ N} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

c. Força mínima. Como $M_O = Fd$, o valor mínimo da força F ocorrerá quando d for máximo. Escolhemos a força perpendicular a OA e vemos que $d = 60 \text{ cm}$; logo,

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 135 \text{ N} \cdot \text{m} &= F(0,6 \text{ m}) \\ F &= 225 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = 225 \text{ N} \searrow 30^\circ \quad \blacktriangleleft$$

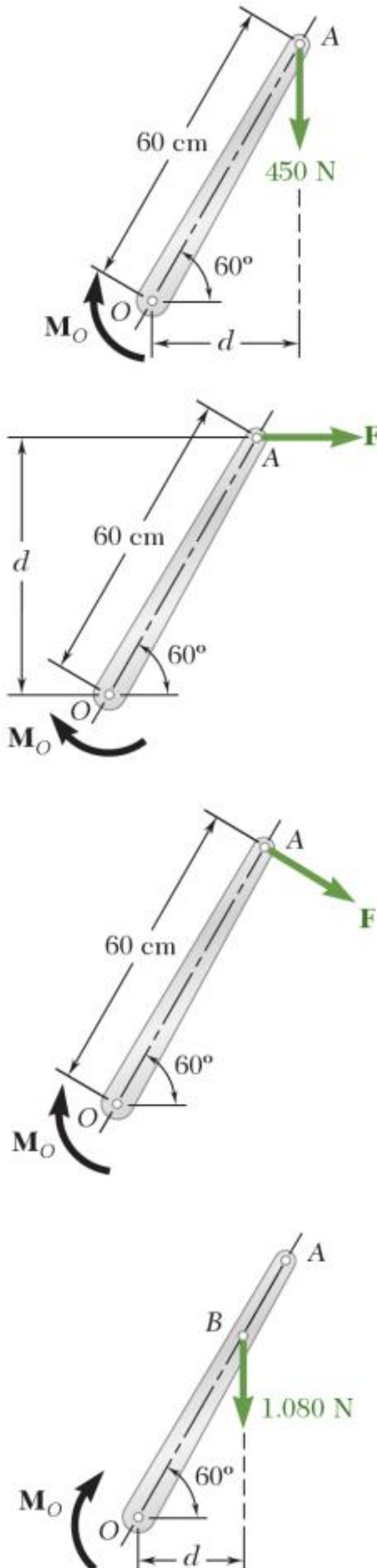
d. Força vertical de 1.080 N. Neste caso, $M_O = Fd$ fornece:

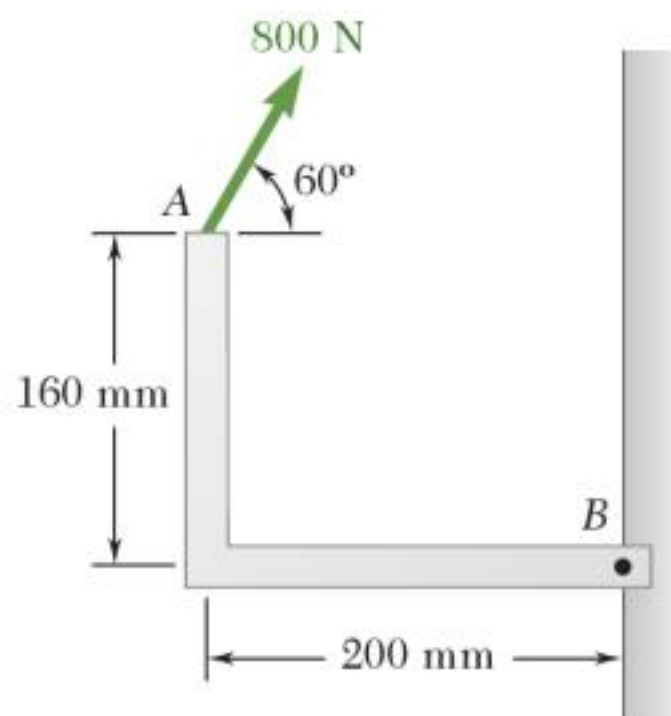
$$135 \text{ N} \cdot \text{m} = (1.080 \text{ N})d \quad d = 0,125 \text{ m}$$

mas $OB \cos 60^\circ = d$

$$OB = 25 \text{ cm} \quad \blacktriangleleft$$

e. Nenhuma das forças consideradas na parte b, c e d é equivalente à força original de 450 N. Embora tenha o mesmo momento em relação a O , tais forças têm diferentes componentes x e y . Em outras palavras, embora cada força tenda a girar o eixo da mesma maneira, cada uma faz a alavanca empurrar o eixo de um modo diferente.





PROBLEMA RESOLVIDO 3.2

Uma força de 800 N atua sobre um suporte, como mostra a ilustração. Determine o momento da força em relação a B .

SOLUÇÃO

O momento \mathbf{M}_B da força \mathbf{F} em relação a B é obtido por meio do produto vetorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{r}_{A/B}$ é o vetor traçado de B até A . Decompondo $\mathbf{r}_{A/B}$ e \mathbf{F} em componentes retangulares, temos:

$$\mathbf{r}_{A/B} = -(0,2 \text{ m})\mathbf{i} + (0,16 \text{ m})\mathbf{j}$$

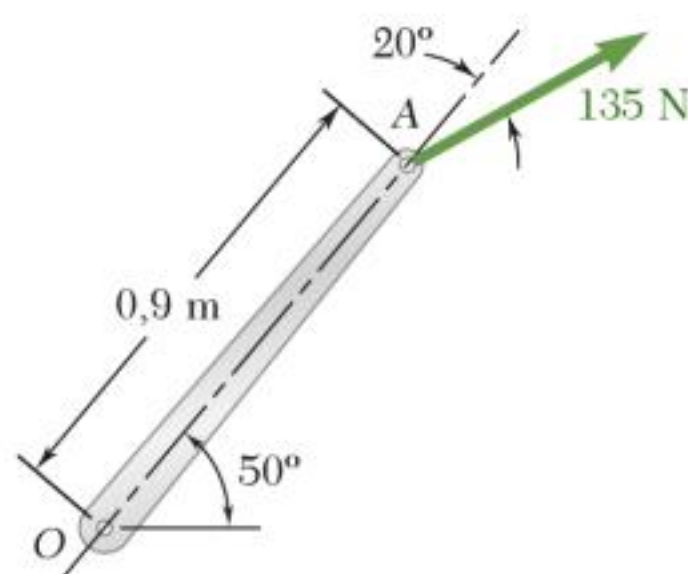
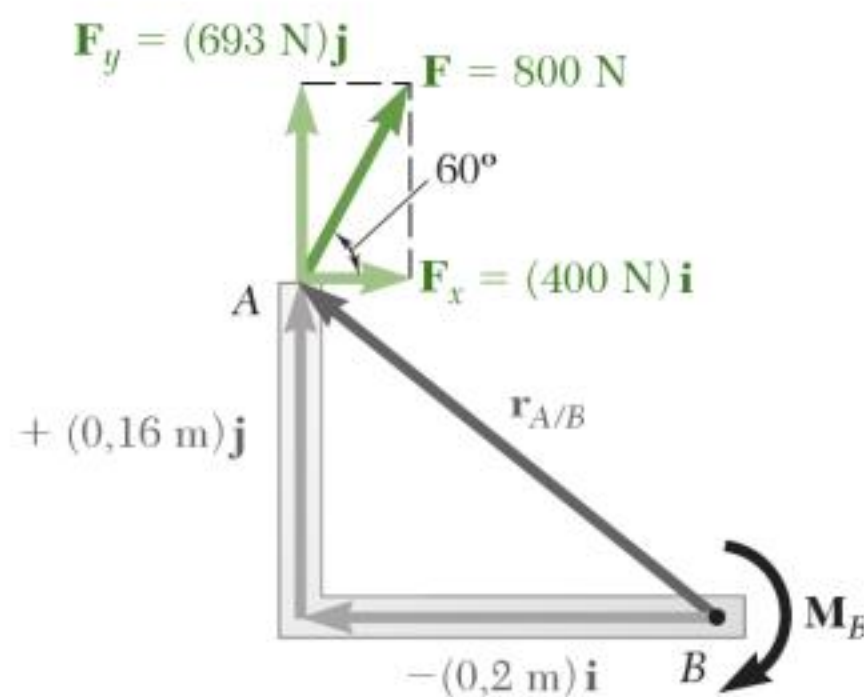
$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Retomando as relações (3.7) para os produtos vetoriais de vetores unitários (Seção 3.5) obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B &= \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0,2 \text{ m})\mathbf{i} + (0,16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138,6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64,0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202,6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

O momento \mathbf{M}_B é um vetor perpendicular ao plano da figura e que aponta para *dentro* do papel.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.3

Uma força de 135 N atua na extremidade de uma alavanca de 0,9 m, como mostra a ilustração. Determine o momento da força em relação a O .

SOLUÇÃO

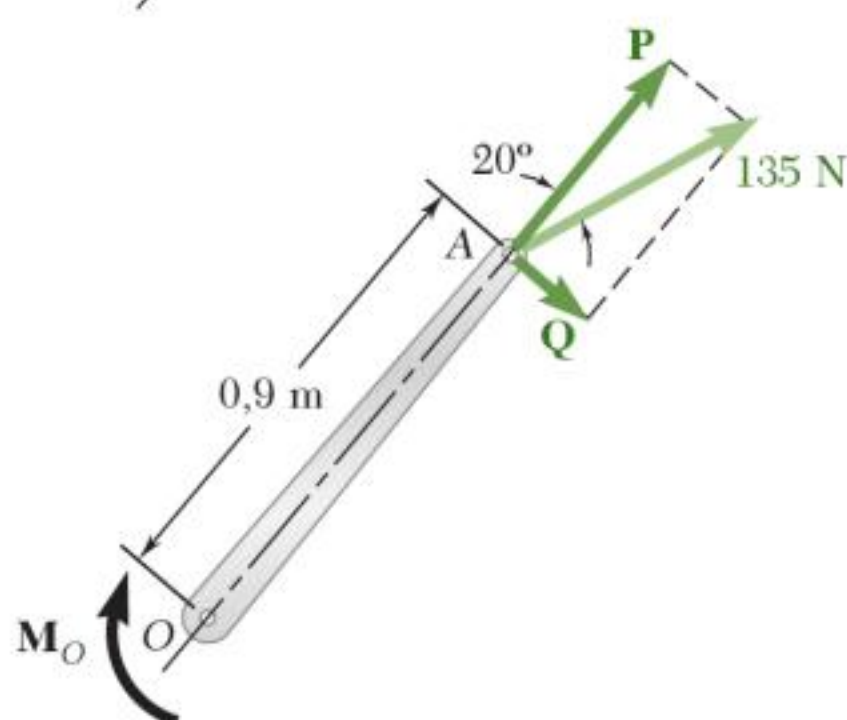
A força é substituída por dois componentes, um \mathbf{P} na direção OA e um componente \mathbf{Q} perpendicular a OA . Como O está sobre a linha de ação de \mathbf{P} , o momento de \mathbf{P} em relação a O é nulo e o momento da força 135 N reduz-se ao momento de \mathbf{Q} , que é horário e, portanto, representado por um escalar negativo.

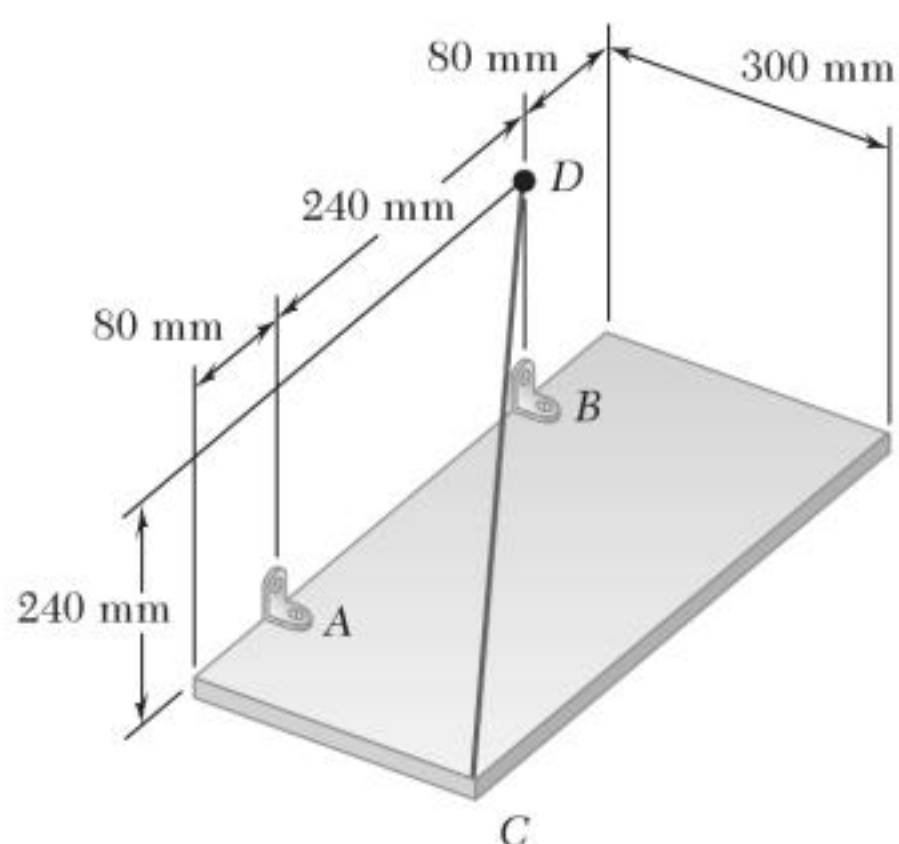
$$Q = (135 \text{ N}) \sin 20^\circ = 46,17 \text{ N}$$

$$M_O = -Q(0,9 \text{ m}) = -(46,17 \text{ N})(0,9 \text{ m}) = -41,55 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como o valor obtido para o escalar M_O é negativo, o momento \mathbf{M}_O aponta para *dentro* do papel. Temos:

$$\mathbf{M}_O = 41,55 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESOLVIDO 3.4

Uma placa retangular é sustentada pelos suportes A e B e por um fio CD . Sabendo que a tração no fio é de 200 N, determine o momento em relação a A da força exercida pelo fio no ponto C .

SOLUÇÃO

O momento \mathbf{M}_A da força \mathbf{F} exercida pelo fio no ponto C em relação a A é obtido escrevendo-se o produto vetorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \quad (1)$$

onde $\mathbf{r}_{C/A}$ é o vetor traçado de A até C

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0,3 \text{ m})\mathbf{i} + (0,08 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

e \mathbf{F} é a força de 200 N dirigida ao longo de CD . Introduzindo o vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, temos:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200 \text{ N}) \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \quad (3)$$

Decompondo o vetor \overrightarrow{CD} em componentes retangulares, temos:

$$\overrightarrow{CD} = -(0,3 \text{ m})\mathbf{i} + (0,24 \text{ m})\mathbf{j} - (0,32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0,50 \text{ m}$$

Substituindo por (3), obtemos:

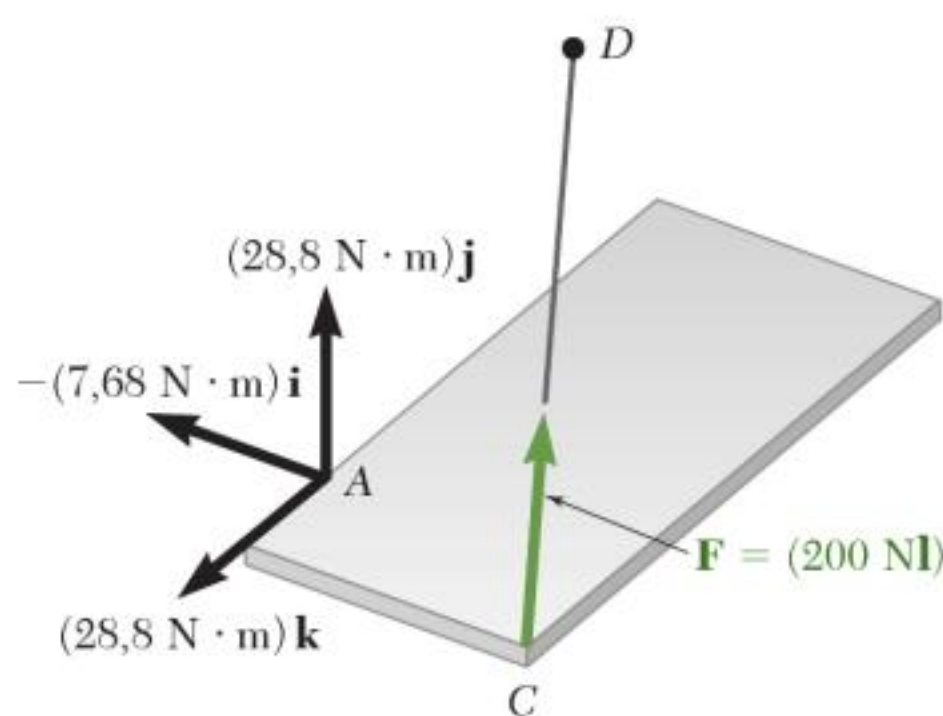
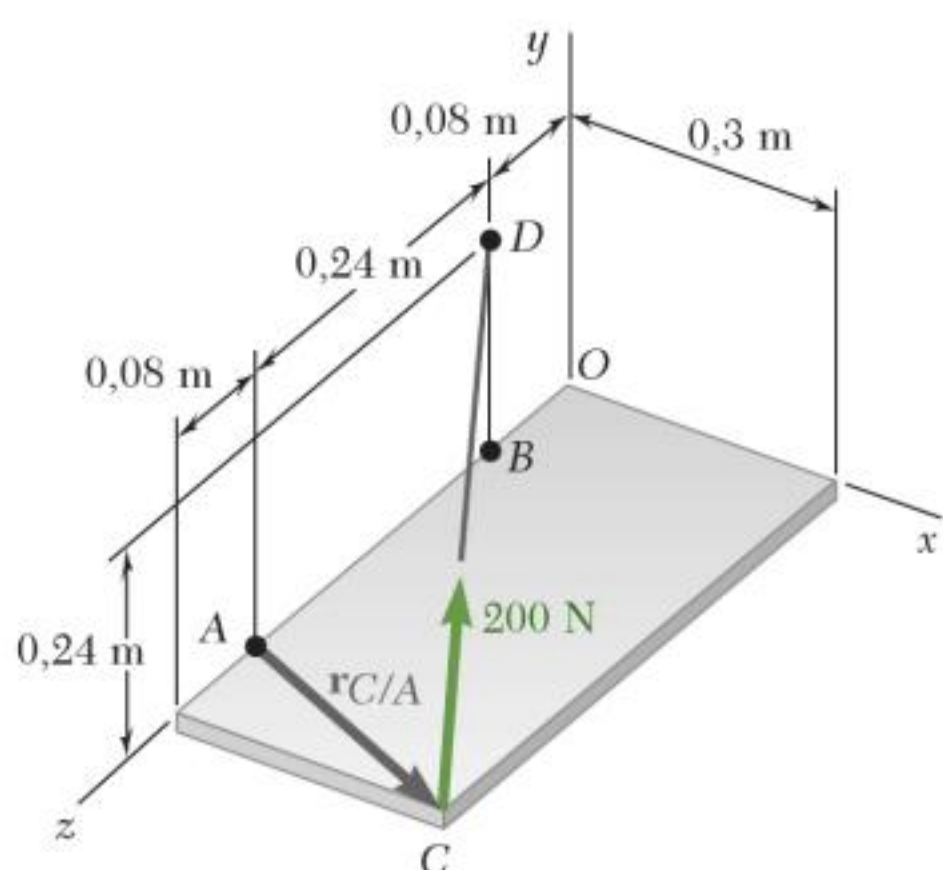
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{200 \text{ N}}{0,50 \text{ m}} [-(0,3 \text{ m})\mathbf{i} + (0,24 \text{ m})\mathbf{j} - (0,32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo $\mathbf{r}_{C/A}$ e \mathbf{F} de (2) e (4) por (1) e retomando as relações (3.7) da Seção 3.5, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0,3\mathbf{i} + 0,08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0,3)(96)\mathbf{k} + (0,3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0,08)(-120)\mathbf{j} + (0,08)(96)(-\mathbf{i}) \\ \mathbf{M}_A &= -(7,68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Solução alternativa. Conforme indicamos na Seção 3.8, o momento \mathbf{M}_A pode ser expresso em forma de um determinante:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,3 & 0 & 0,08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix} \\ \mathbf{M}_A &= -(7,68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, apresentamos o *produto vetorial* de dois vetores. Nos problemas, a seguir, você usará o produto vetorial para calcular o *momento de uma força em relação a um ponto* e determinar também a *distância perpendicular* de um ponto a uma linha.

Definimos o momento de uma força \mathbf{F} em relação ao ponto O de um corpo rígido como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição *de O até qualquer ponto* da linha de ação de \mathbf{F} . Como o produto vetorial não é comutativo, é absolutamente necessário, ao calcular tal produto, que você coloque os vetores na ordem apropriada e que cada vetor tenha o sentido correto. O momento \mathbf{M}_O é importante porque sua intensidade é uma medida da tendência de uma força \mathbf{F} em fazer o corpo rígido girar em torno de um eixo dirigido ao longo de \mathbf{M}_O .

1. Cálculo do momento M_O de uma força em duas dimensões. Pode-se adotar um dos seguintes procedimentos:

a. Use a Eq. (3.12), $M_O = Fd$, que expressa a intensidade do momento como o produto da intensidade de \mathbf{F} e da *distância perpendicular* d de O até a linha de ação de \mathbf{F} (Problema Resolvido 3.1).

b. Expresse \mathbf{r} e \mathbf{F} na forma de componentes e efetue o produto vetorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ formalmente (Problema Resolvido 3.2).

c. Decomponha \mathbf{F} nos componentes paralelo e perpendicular ao vetor posição \mathbf{r} , respectivamente. Apenas a componente perpendicular contribui para o momento de \mathbf{F} (Problema Resolvido 3.30).

d. Use a Eq. (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Quando se aplica esse método, a abordagem mais simples é tratar os componentes escalares de \mathbf{r} e \mathbf{F} como positivos e, por observação, atribuir então o sinal apropriado ao momento produzido por cada um dos componentes da força. Por exemplo, aplicando esse método no Problema Resolvido 3.2, observamos que ambos os componentes da força tendem a produzir uma rotação horária em torno de B . Logo, o momento de cada componente da força em relação a B deve ser representado por um escalar negativo. Temos então o momento total.

$$M_B = -(0,16 \text{ m})(400 \text{ N}) - (0,20 \text{ m})(693 \text{ N}) = -202,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. Cálculo do momento M_O de uma força \mathbf{F} em três dimensões. Seguindo o método do Problema Resolvido 3.4, o primeiro passo é selecionar o vetor posição \mathbf{r} mais conveniente (mais simples). Em seguida, você deve expressar \mathbf{F} em termos de componentes retangulares. O passo final consiste em efetuar o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar o momento. Na maioria dos problemas tridimensionais, você achará mais fácil calcular o produto vetorial usando um determinante.

3. Determinação da distância perpendicular d de um ponto a até uma dada linha. Primeiro, admita que a força \mathbf{F} de intensidade conhecida F esteja ao longo de uma dada linha. Em seguida, determine seu momento em relação a A escrevendo o produto vetorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, e calcule esse produto tal como indicamos anteriormente. Calcule, então, sua intensidade M_A . Finalmente, substitua os valores de F e M_A na equação $M_A = Fd$ e a resolva para d .

PROBLEMAS

- 3.1** Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em B . Sabendo que $\alpha = 28^\circ$, determine o momento de uma força de 16 N em relação ao ponto B decompondo a força em componentes horizontal e vertical.
- 3.2** Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em B . Sabendo que $\alpha = 28^\circ$, determine o momento de uma força de 16 N em relação ao ponto B decompondo a força em componentes ao longo de ABC e em uma direção perpendicular a ABC .
- 3.3** A força de 300 N é aplicada em A como mostrado na figura. Determine (a) o momento da força de 300 N sobre D , (b) a menor força aplicada em B que cria o mesmo momento em D .
- 3.4** A força de 300 N é aplicada em A como mostrado na figura. Determine (a) o momento da força de 300 N sobre D , (b) a intensidade e sentido da força horizontal aplicada em C que cria o mesmo momento sobre D , (c) menor força aplicada em C que cria o mesmo momento em D .

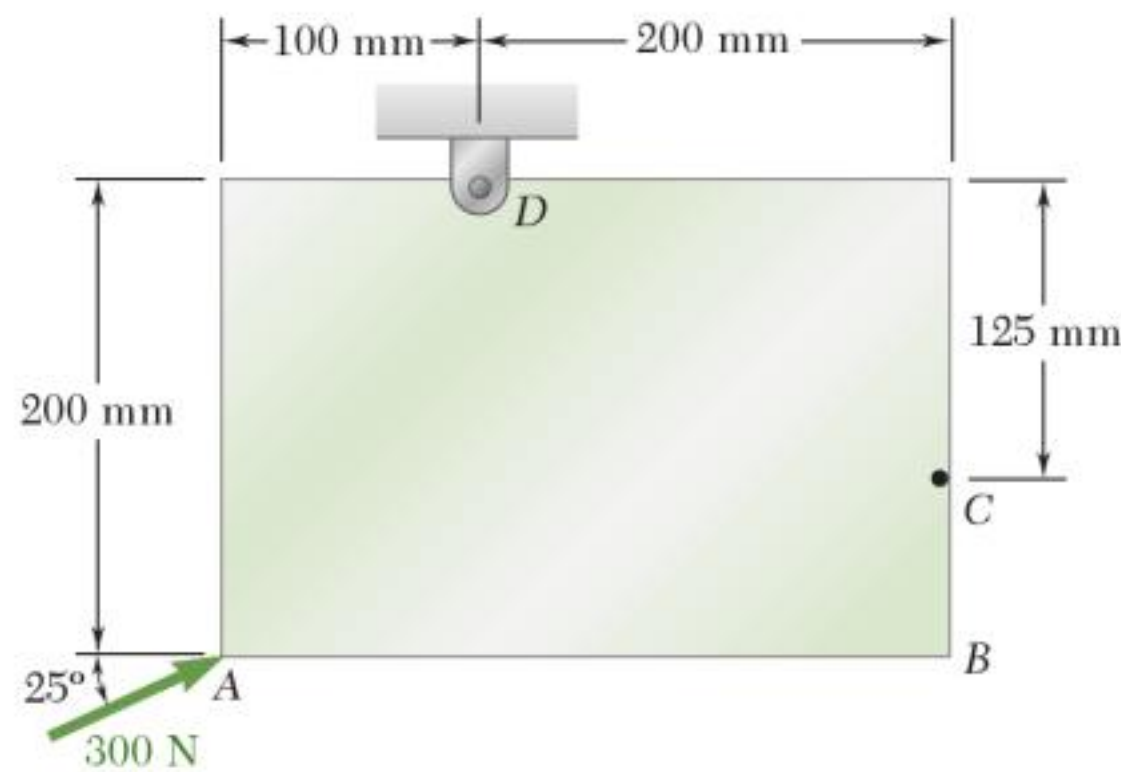


Figura P3.3 e P3.4

- 3.5** Uma força P de 35 N é aplicada em uma alavanca de câmbio. Determine o momento de P sobre B quando α é igual a 25° .
- 3.6** Para a alavanca de câmbio mostrada na figura determine a intensidade e direção da menor força P que gera um momento no sentido horário de $24 \text{ N}\cdot\text{m}$ sobre B .
- 3.7** Uma força P de 49 N é aplicada em uma alavanca de câmbio. O momento P sobre B é horário e tem a intensidade de $28 \text{ N}\cdot\text{m}$. Determine o valor de α .
- 3.8** Sabe-se que uma força vertical de 890 N é necessária para remover da tábua o prego fixado em C . Ao primeiro movimento do prego, determine (a) o momento em relação a B da força exercida sobre o prego, (b) a intensidade da força P que cria o mesmo momento em relação a B se $\alpha = 10^\circ$, (c) a menor força P que cria o mesmo momento em relação a B .

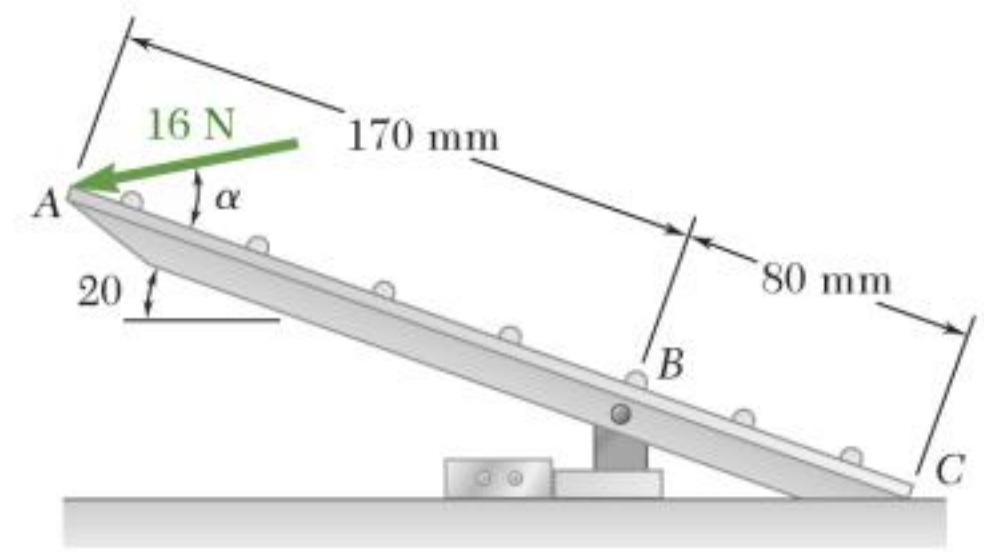


Figura P3.1 e P3.2

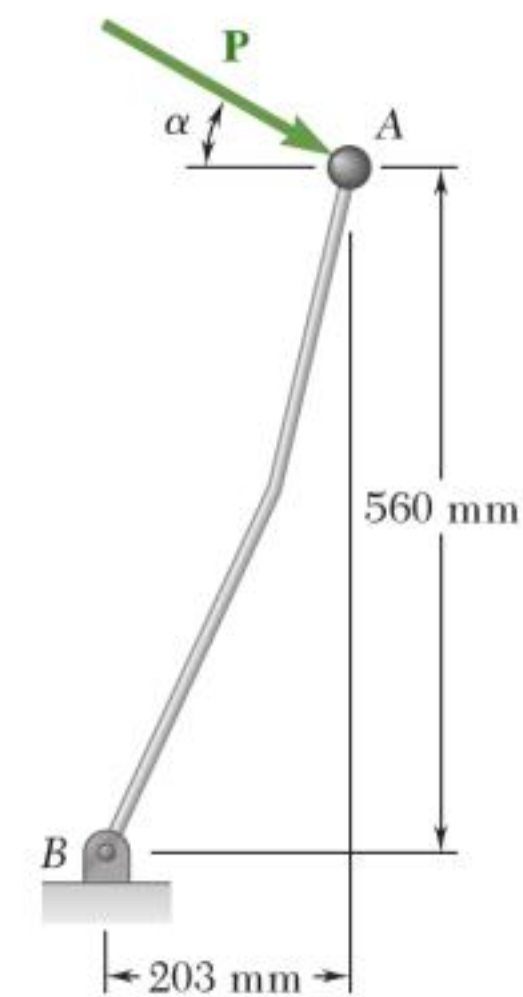


Figura P3.5, P3.6 e P3.7

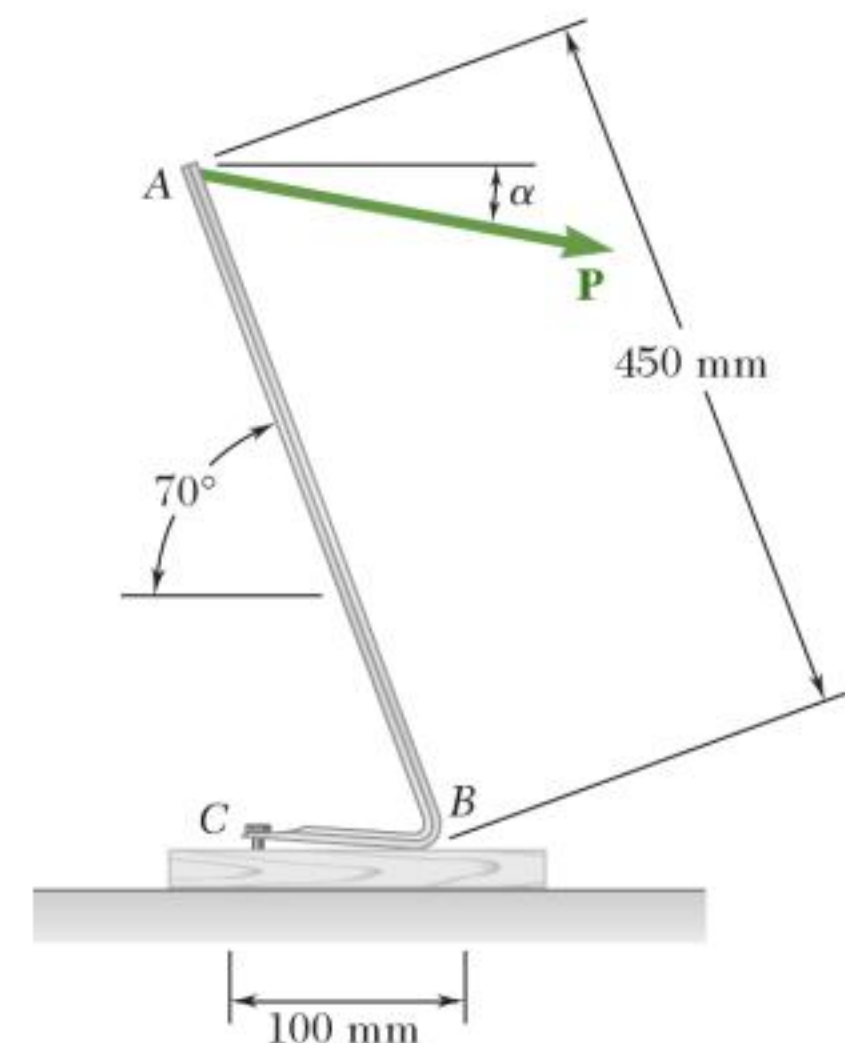


Figura P3.8

3.9 Um guincho AB é usado para endireitar um mourão. Sabendo que a tração no cabo BC é 1.140 N e o comprimento d é $1,9\text{ m}$, determine o momento em relação a D da força exercida pelo cabo em C decompondo tal força no componente horizontal e no vertical aplicados (a) no ponto C , (b) no ponto E .

3.10 Sabe-se que é necessária uma força com um momento de $960\text{ N}\cdot\text{m}$ em relação a D para endireitar o mourão CD . Se $d = 2,8\text{ m}$, determine a tração que deve ser desenvolvida no cabo do guincho AB para se criar o momento necessário em relação ao ponto D .

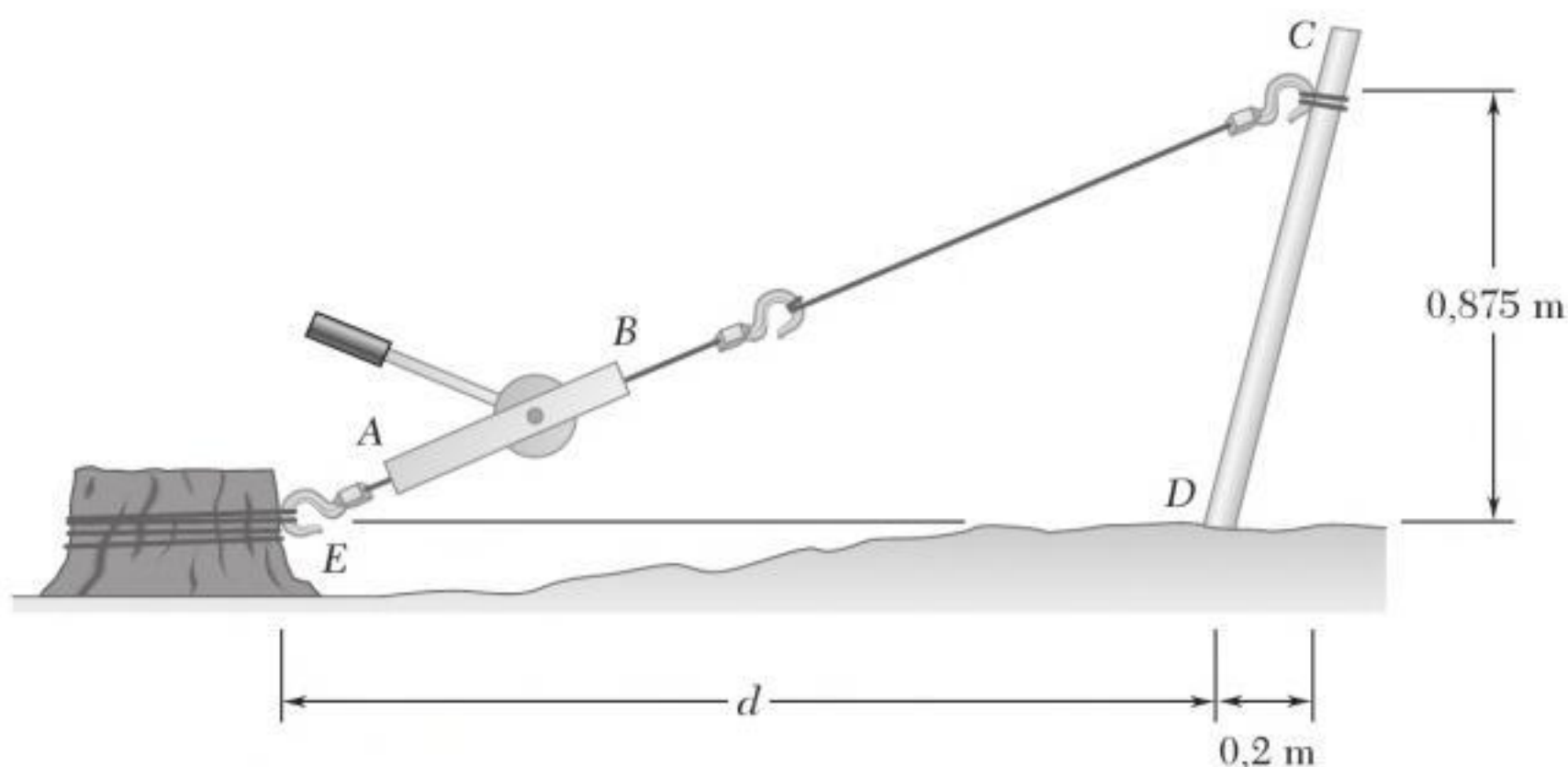


Figura P3.9, P3.10 e P3.11

3.11 Sabe-se que é necessária uma força com um momento de $960\text{ N}\cdot\text{m}$ em relação a D para se endireitar o mourão CD . Se a capacidade do guincho AB 2.400 N , determine o valor mínimo da distância d para se criar o momento especificado em relação ao ponto D .

3.12 e 3.13 A porta traseira de um carro é sustentada por uma haste hidráulica BC . Se a haste exerce uma força de 556 N dirigida ao longo da sua linha de centro sobre a rótula em B , determine o momento da força em relação a A .

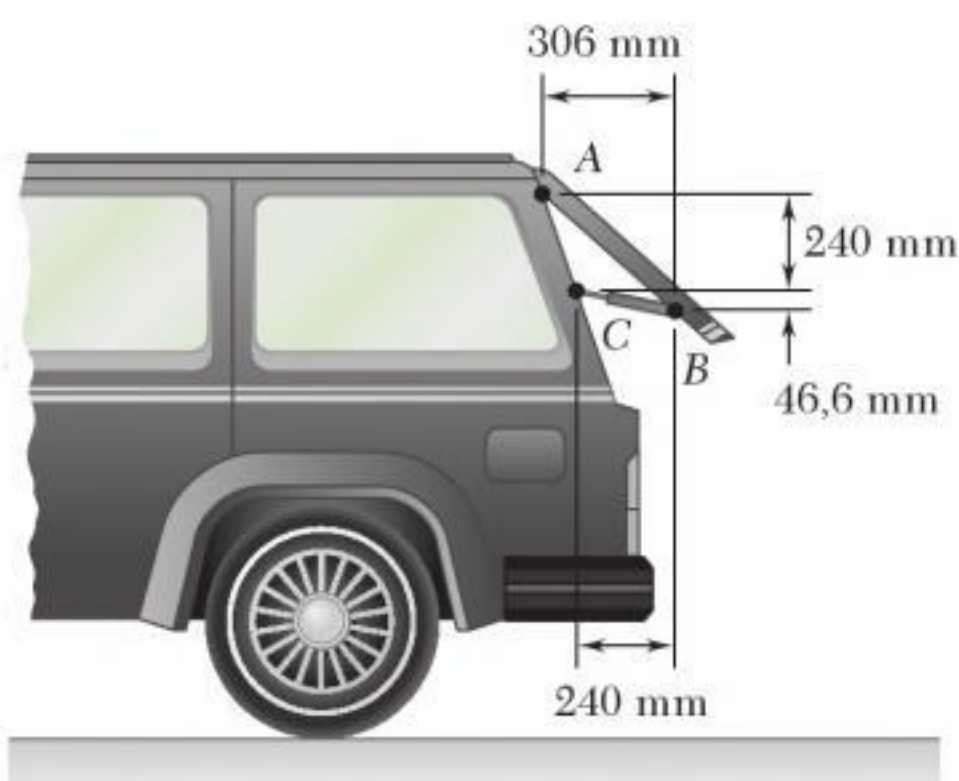


Figura P3.12

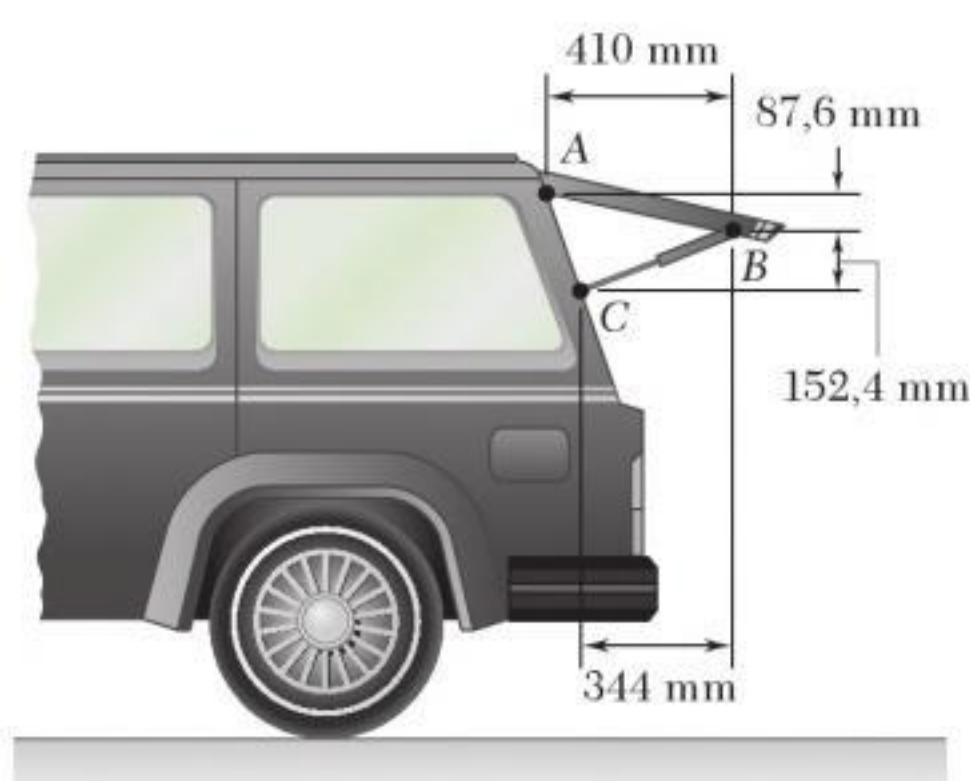


Figura P3.13

- 3.14** Um mecânico utiliza um pedaço de tubo AB como alavanca para esticar a correia de um alternador. Quando ele empurra a alavanca para baixo em A , uma força de 485 N é exercida sobre o alternador em B . Determine o momento dessa força em relação ao parafuso C se a sua linha de ação passa através de O .

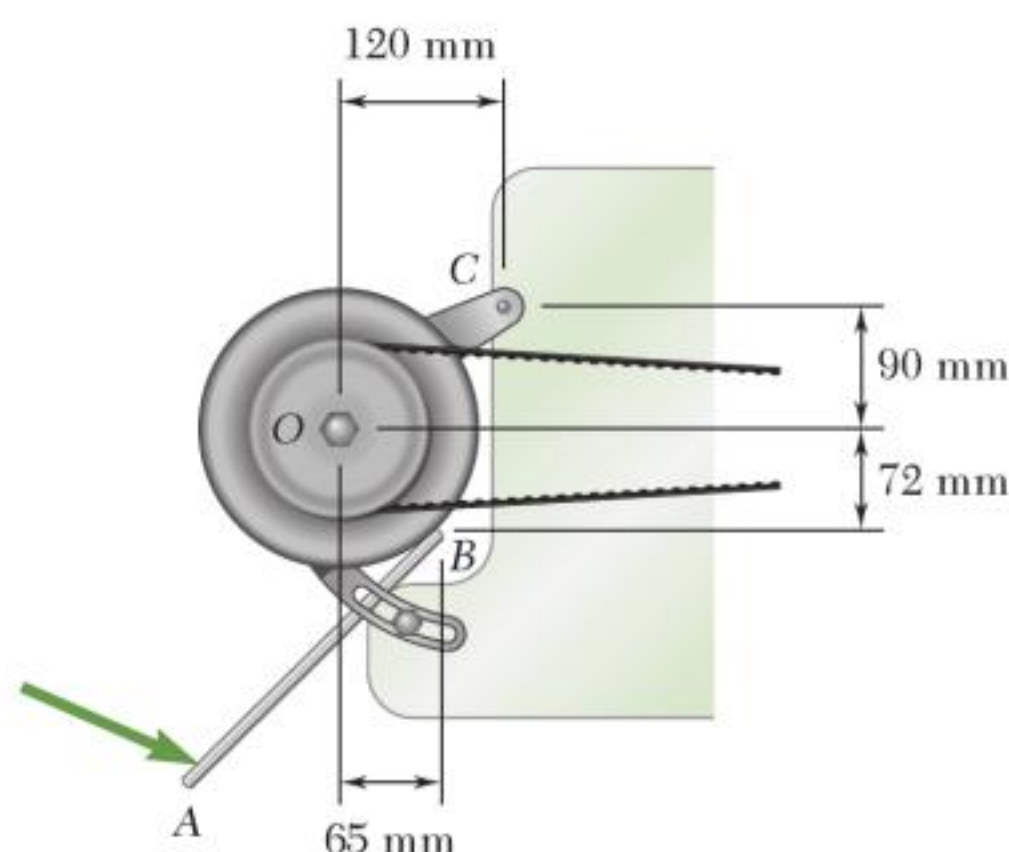


Figura P3.14

- 3.15** Desenvolva os produtos vetoriais $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ e $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, onde $B = B'$, e use os resultados obtidos para demonstrar a identidade:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

- 3.16** Uma linha passa pelos pontos (20 m, 16 m) e (-1 m, -4 m). Determine a distância perpendicular d da linha até a origem O do sistema de coordenadas.

- 3.17** Os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} constituem dois lados adjacentes de um paralelogramo. Determine a área do paralelogramo quando (a) $\mathbf{P} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{P} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

- 3.18** Um plano contém os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} . Determine o vetor unitário normal ao plano quando \mathbf{A} e \mathbf{B} são iguais, respectivamente, (a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ e $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, (b) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

- 3.19** Determine o momento em relação à origem O da força $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ que atua em um ponto A . Suponha que o vetor posição de A seja (a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 2,5\mathbf{j} - 1,5\mathbf{k}$, (c) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

- 3.20** Determine o momento em relação à origem O da força $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que atua em um ponto A . Suponha que o vetor posição de A seja (a) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, (b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, (c) $\mathbf{r} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

- 3.21** Uma força de 200 N é aplicada em um suporte ABC como mostrado na figura. Determine o momento da força sobre A .

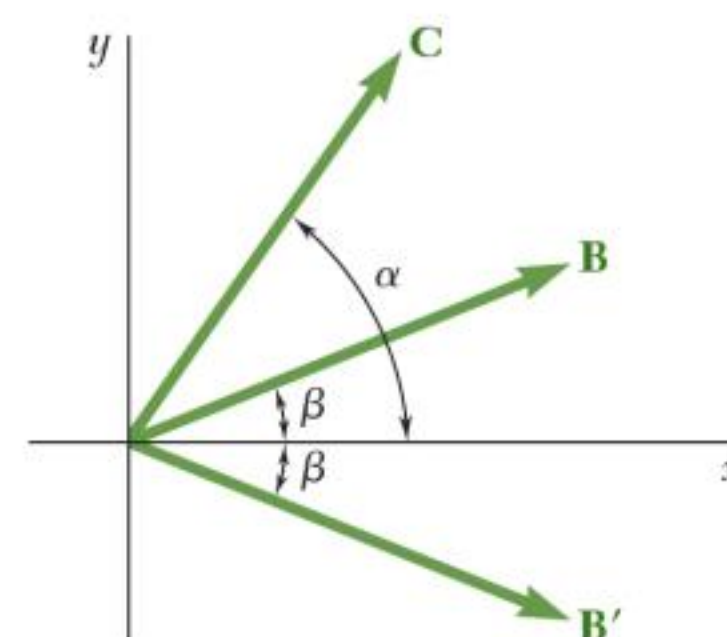


Figura P3.15

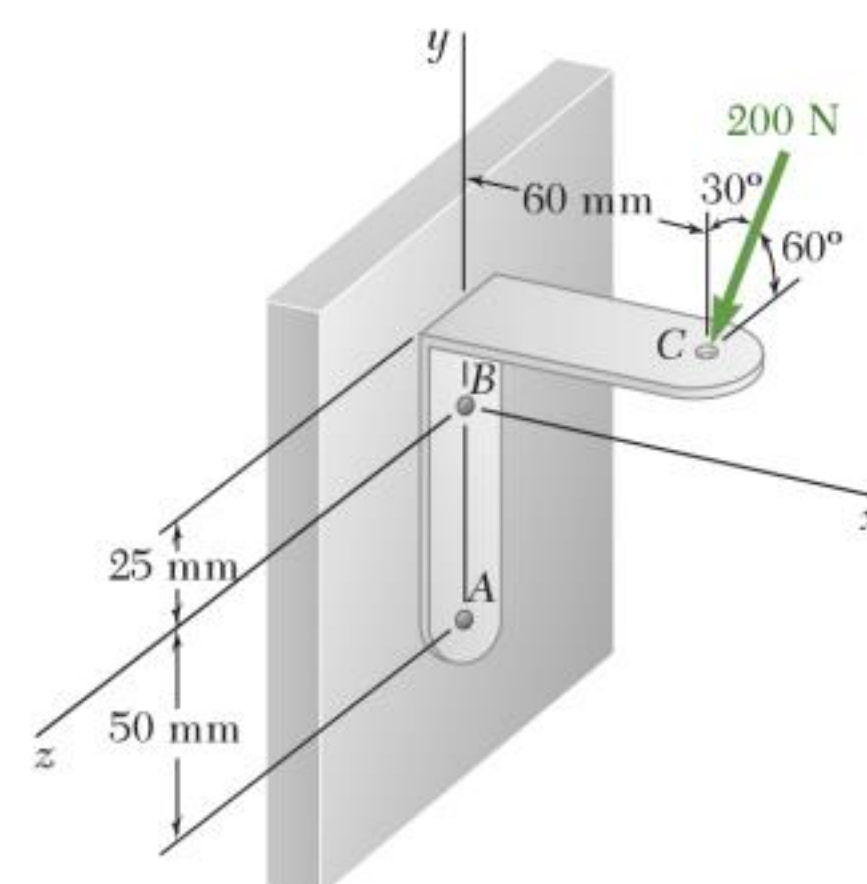


Figura P3.21

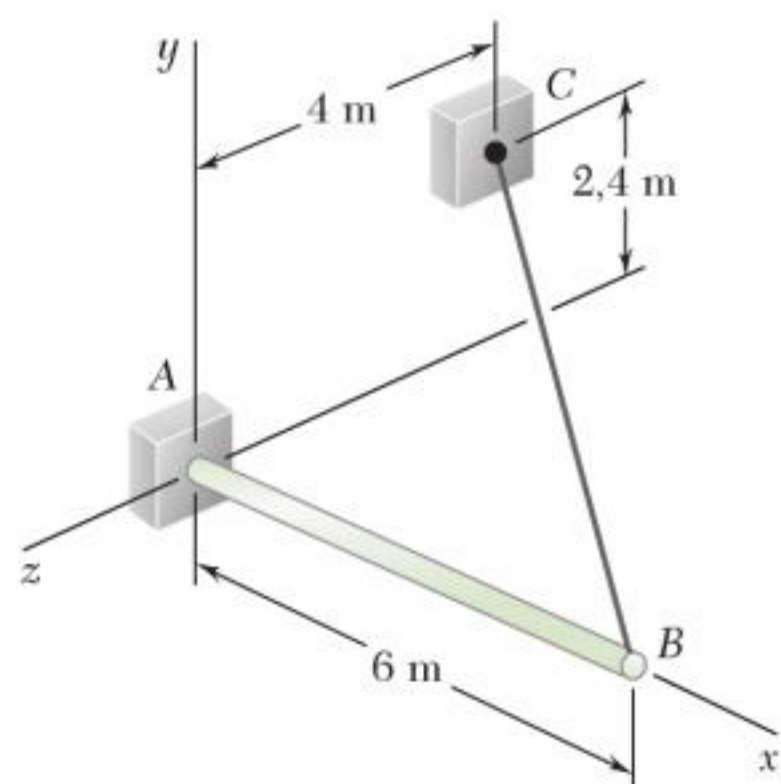


Figura P3.23

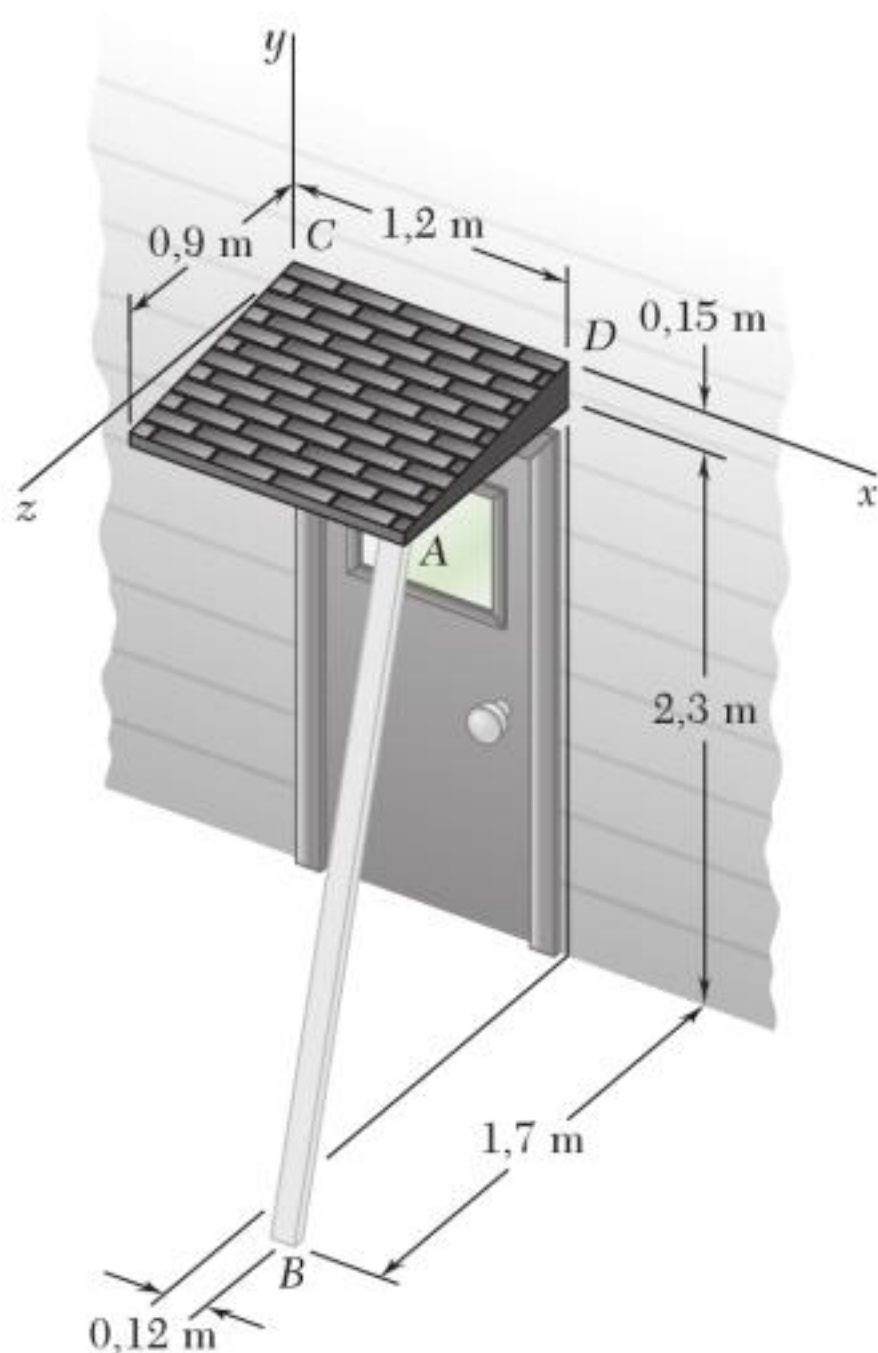


Figura P3.24

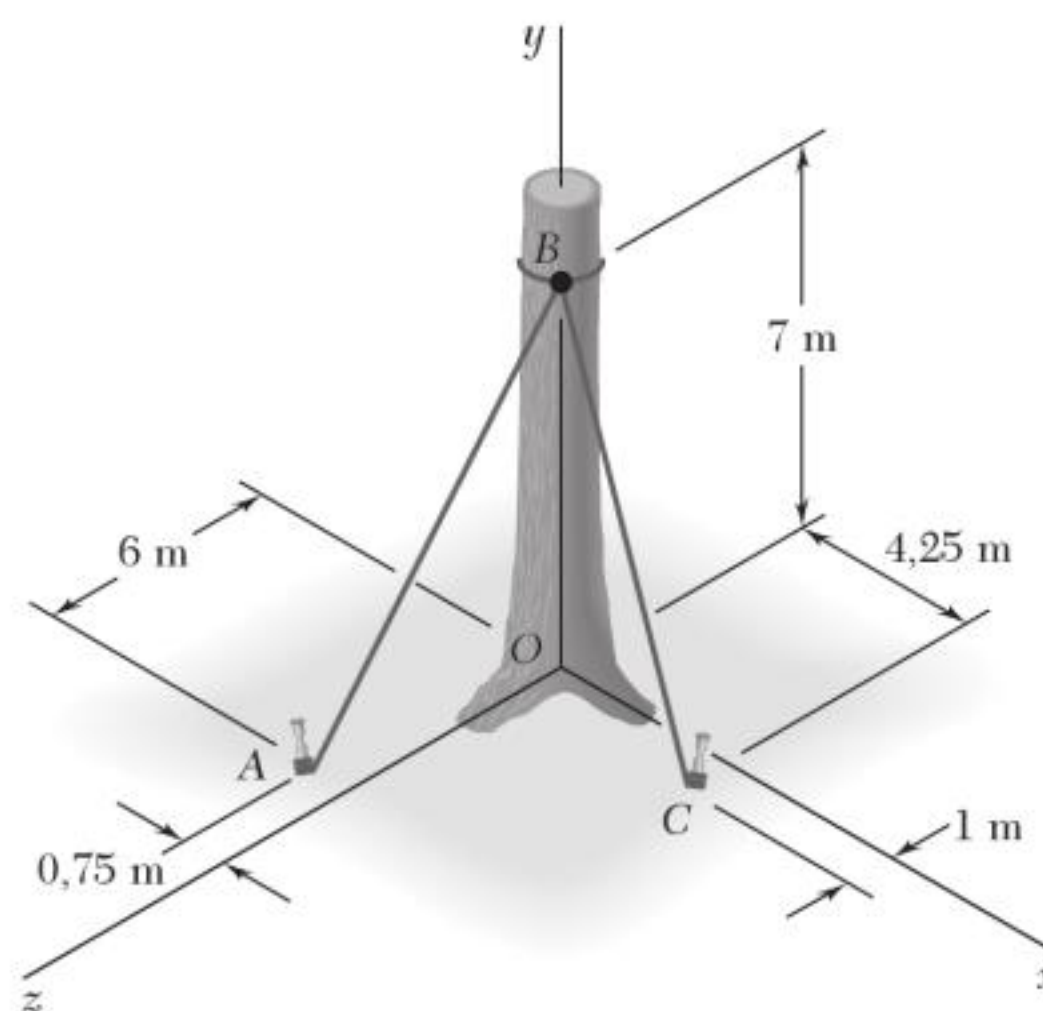


Figura P3.22

- 3.22** Antes que o tronco de uma grande árvore venha a cair, são amarrados cabos AB e BC , como mostra a figura. Sabendo que as forças de tração nos cabos AB e BC são de 555 N e 660 N , respectivamente, determine o momento em relação a O da força resultante exercida sobre a árvore pelos cabos em B .

- 3.23** Uma barra de 6 m tem uma ponta fixada em A . Um cabo de aço é esticado da ponta livre B da barra ao ponto C localizado na parede vertical. Se a tensão no cabo é $2,5\text{ kN}$, determine o binário que a força exerce sobre A através do cabo em B .

- 3.24** Uma tábua AB , usada para escorar temporariamente um telhado, exerce no ponto A do telhado uma força de 254 N dirigida ao longo de BA . Determine o momento da força em relação a C .

- 3.25** A rampa $ABCD$ é sustentada por cabos nos cantos C e D . A tração em cada um dos cabos é 810 N . Determine o momento em relação a A da força exercida (a) pelo cabo em D , (b) pelo cabo em C .

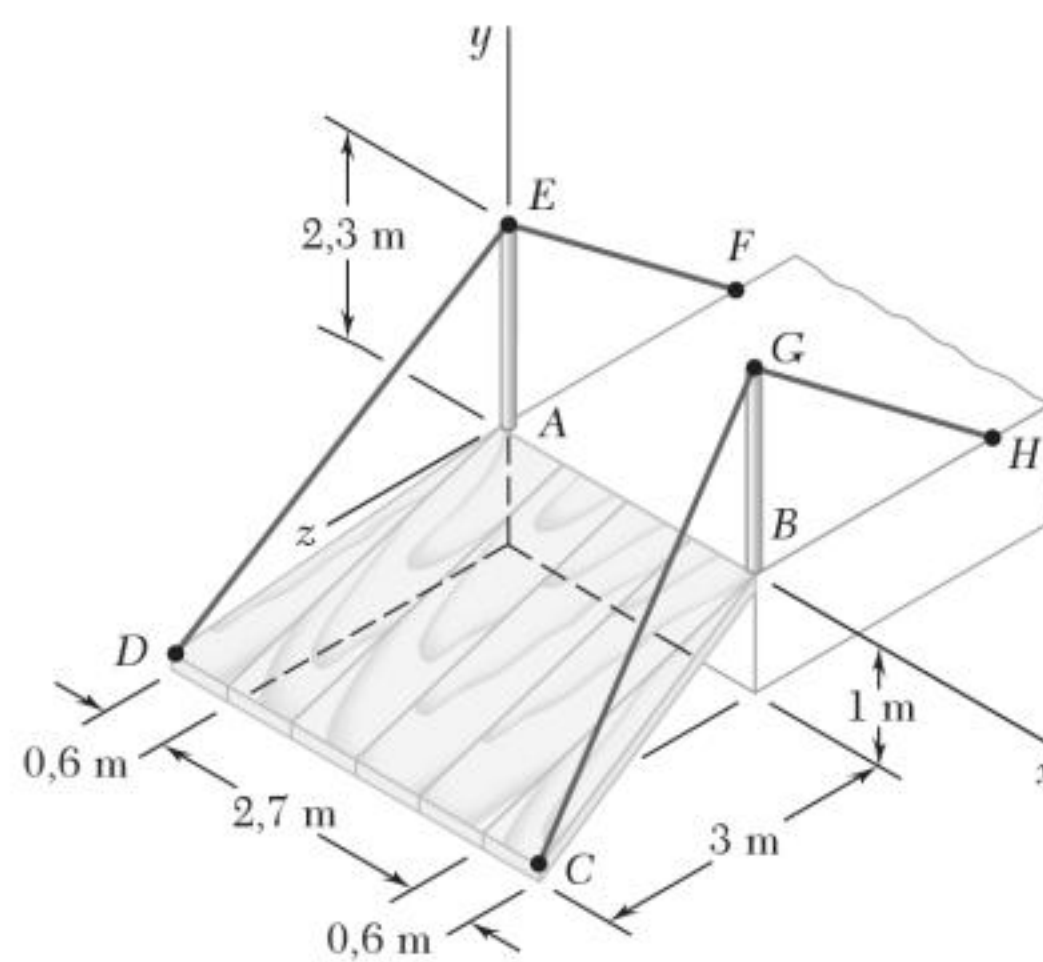


Figura P3.25

- 3.26** Um pequeno barco é suportado por dois guindastes, um dos quais é mostrado na figura. A tensão na linha $ABAD$ é 365 N. Determine o momento da resultante \mathbf{R}_A sobre C exercida pelo guindaste em A .

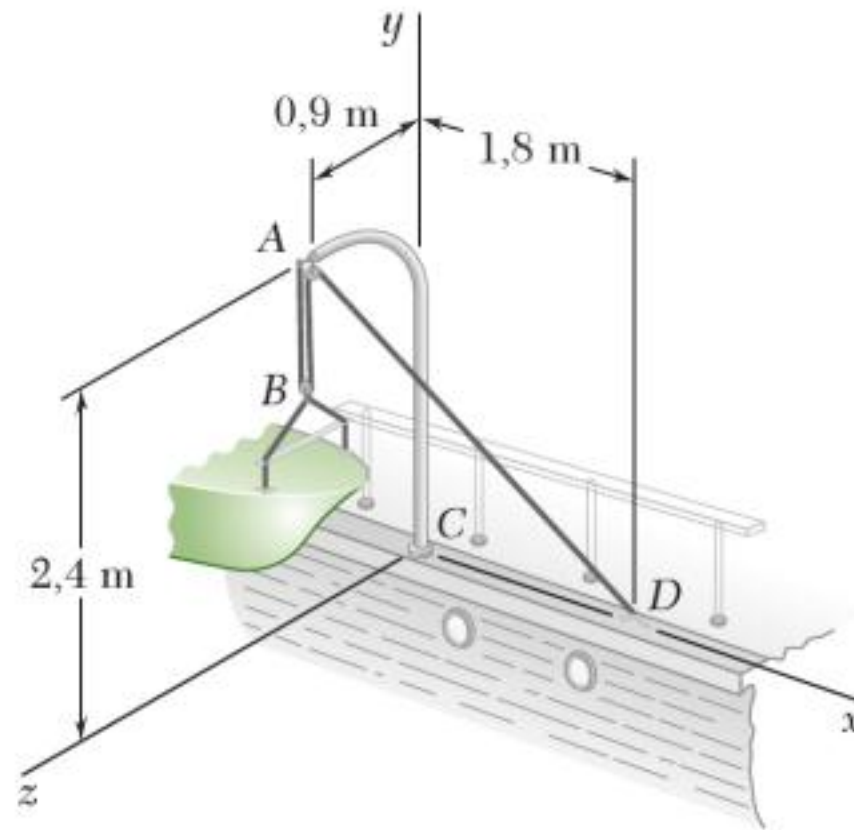


Figura P3.26

- 3.27** No Problema 3.22 determine a distância perpendicular do ponto O até o cabo AB .
- 3.28** No Problema 3.22 determine a distância perpendicular do ponto O até o cabo BC .
- 3.29** No Problema 3.24, determine a distância perpendicular do ponto D até uma linha que passa pelos pontos A e B .
- 3.30** No Problema 3.24, determine a distância perpendicular do ponto C até uma linha que passa pelos pontos A e B .
- 3.31** No Problema 3.25 determine a distância perpendicular do ponto A até a porção DE do cabo DEF .
- 3.32** No Problema 3.25 determine a distância perpendicular do ponto A até uma linha que passa pelos pontos C e G .
- 3.33** No Problema 3.26 determine a distância perpendicular do ponto C até a porção AD da linha $ABAD$.
- 3.34** Determine o valor de a que minimiza a distância perpendicular de um ponto C até a seção da tubulação que passa pelos pontos A e B .

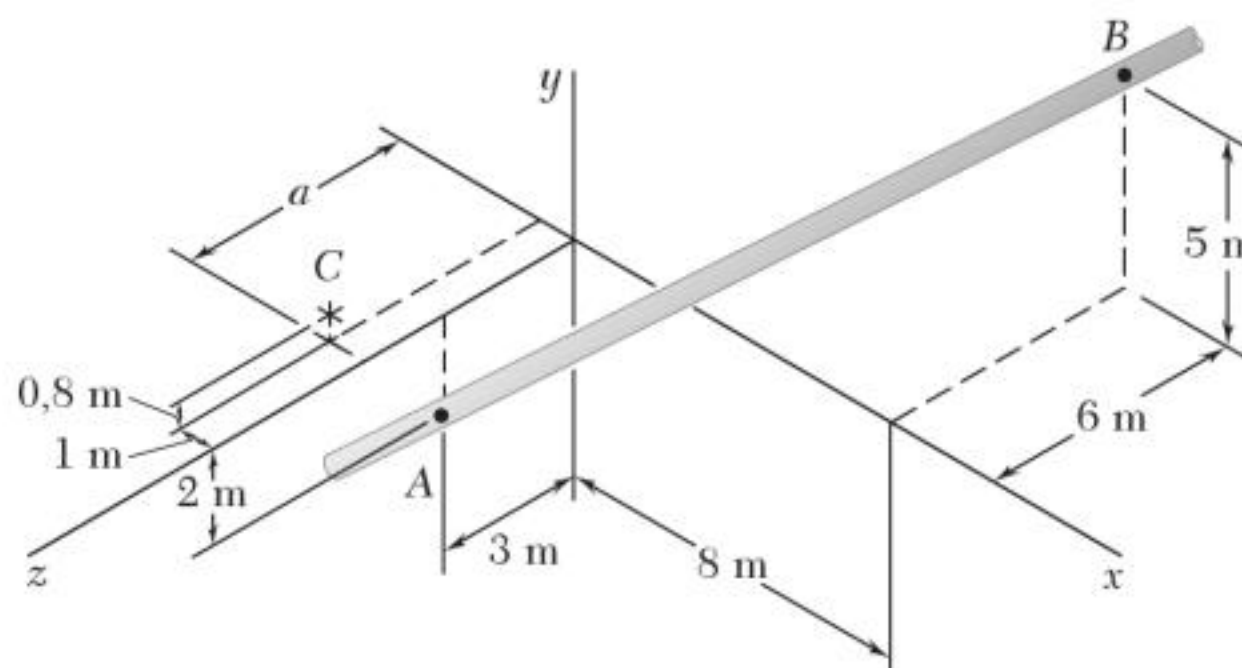


Figura P3.34

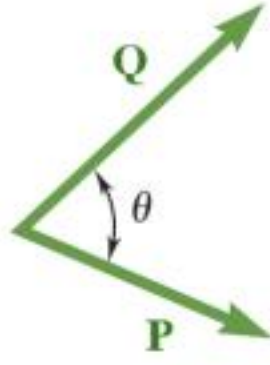


Figura 3.19

3.9 Produto escalar de dois vetores

O *produto escalar* de dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} é definido como o produto das intensidades de \mathbf{P} e \mathbf{Q} e do cosseno do ângulo θ formado por \mathbf{P} e \mathbf{Q} . (Fig. 3.19). O produto escalar de \mathbf{P} e \mathbf{Q} é representado por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Escrevemos então:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

Observe que a expressão definida na Eq. (3.24) não é um vetor, mas um *escalar*, o que explica o nome *produto escalar*.

Segue-se imediatamente da definição que o produto escalar de dois vetores é *comutativo*, ou seja, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (3.25)$$

Para provar que o produto escalar é também *distributivo*, devemos demonstrar a relação

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \quad (3.26)$$

Podemos admitir, sem perda do caráter genérico, que \mathbf{P} esteja dirigido ao longo do eixo y (Fig. 3.20). Representando por \mathbf{Q} a soma de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 e por θ_y o ângulo formado entre \mathbf{Q} e o eixo y , expressamos o primeiro membro de (3.26) da seguinte maneira:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \quad (3.27)$$

onde Q_y é o componente y de \mathbf{Q} . De modo semelhante, podemos expressar o segundo membro de (3.26) como:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \quad (3.28)$$

Como \mathbf{Q} é a soma de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 , seu componente y deve ser igual à soma dos componentes y de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 . Logo, as expressões obtidas em (3.27) e (3.28) são iguais e a relação (3.26) está demonstrada.

A terceira propriedade – a propriedade associativa – não se aplica aos produtos escalares. De fato, $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ não tem sentido, pois $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ não é um vetor, mas um escalar.

O produto escalar de dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser expresso em termos componentes retangulares. Exprimindo \mathbf{P} e \mathbf{Q} em componentes, escrevemos primeiro:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Fazendo uso da propriedade distributiva, expressamos $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ como uma soma de produtos escalares, tais como $P_x \mathbf{i} \cdot Q_x \mathbf{i}$ e $P_x \mathbf{i} \cdot Q_y \mathbf{j}$. Entretanto, da definição do produto escalar segue-se que os produtos escalares dos vetores unitários são iguais a zero ou um.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{array} \quad (3.29)$$

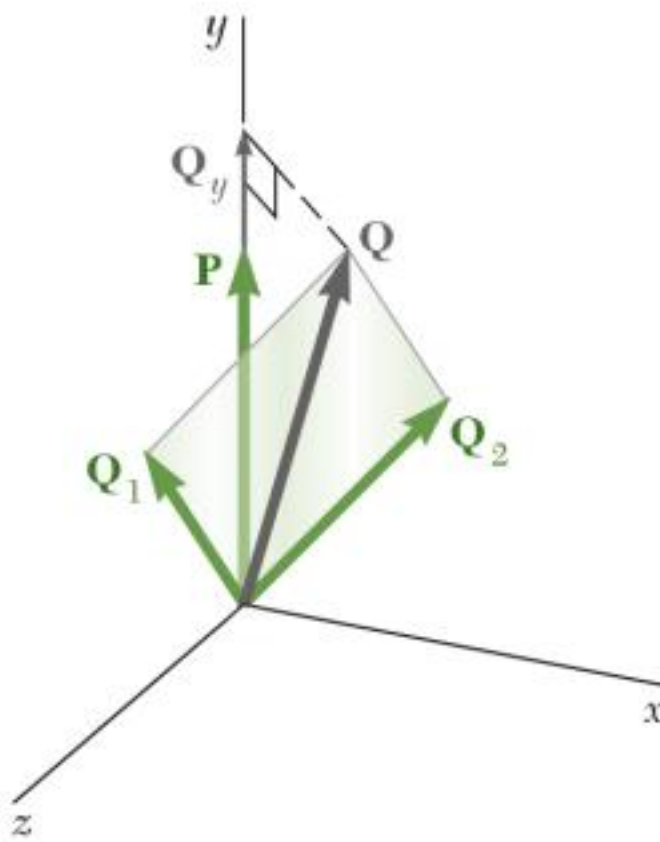


Figura 3.20

Logo, a expressão obtida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ reduz-se a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

No caso particular em que \mathbf{P} e \mathbf{Q} são iguais, observamos que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (3.31)$$

Aplicações

1. *Ângulo formado por dois vetores.* Sejam dois vetores dados em termos de seus componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para determinar o ângulo formado pelos dois vetores, igualamos as expressões obtidas em (3.24) e (3.30) para seu produto escalar e escrevemos

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Resolvendo para $\cos \theta$, temos:

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

2. *Projeção de um vetor sobre um dado eixo.* Considere um vetor \mathbf{P} formando um ângulo θ com um eixo, ou linha orientada, OL (Fig. 3.21). A *projeção de \mathbf{P} sobre o eixo OL* é definida como sendo o escalar:

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (3.33)$$

Observamos que a projeção P_{OL} é igual em valor absoluto ao comprimento do segmento OA ; a projeção será positiva se OA tiver o mesmo sentido do eixo OL , ou seja, se o ângulo θ for agudo, e negativo, em caso contrário. Se \mathbf{P} e OL estiverem em ângulo reto, a projeção de \mathbf{P} sobre OL será nula.

Considere agora um vetor \mathbf{Q} dirigido ao longo de OL e no mesmo sentido de OL (Fig. 3.22). O produto escalar de \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser expresso como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL} Q \quad (3.34)$$

da qual segue-se que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \quad (3.35)$$

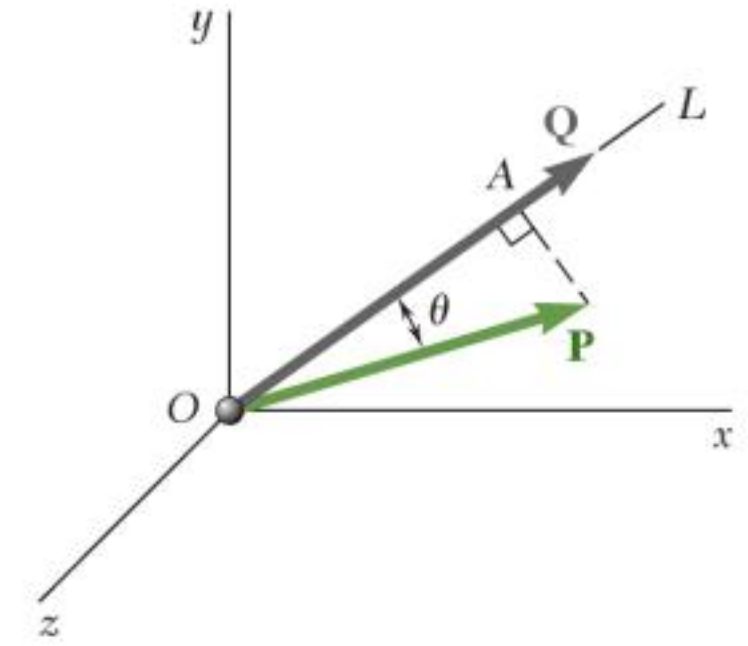


Figura 3.21

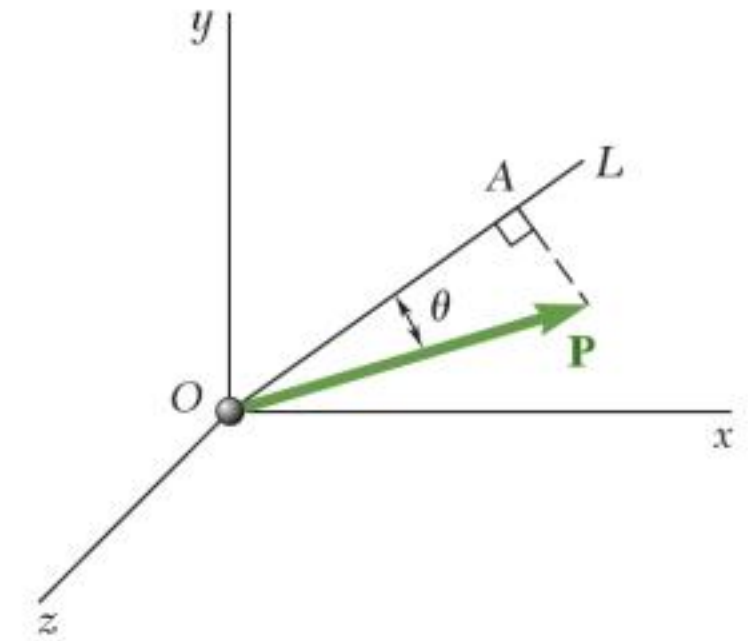


Figura 3.22

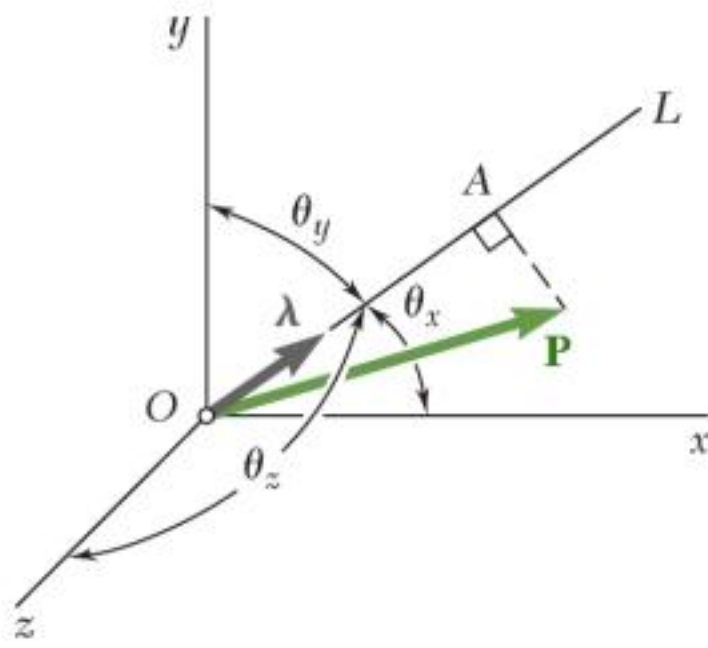


Figura 3.23

No caso particular em que o vetor escolhido ao longo de OL seja o vetor unitário λ (Fig. 3.23), temos:

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.36)$$

Decompondo \mathbf{P} e λ em componentes retangulares, e lembrando da Seção 2.12, que os componentes de λ ao longo dos eixos de coordenadas são respectivamente iguais aos cossenos diretores de OL , expressamos a projeção de \mathbf{P} sobre OL como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

onde θ_x , θ_y e θ_z representam os ângulos que o eixo OL forma com os eixos de coordenadas.

3.10 Produto triplo misto de três vetores

Definimos o *produto triplo misto* de três vetores \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} como a expressão escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

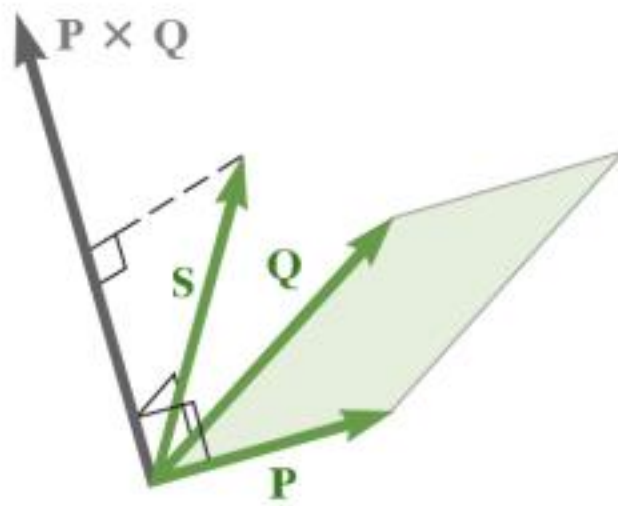


Figura 3.24

obtida a partir do produto escalar de \mathbf{S} pelo produto vetorial de \mathbf{P} e \mathbf{Q} .*

Uma interpretação geométrica simples pode ser dada para o produto triplo misto de \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} (Fig. 3.24). Primeiro, como vimos na Seção 3.4, o vetor $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ é perpendicular ao plano que contém \mathbf{P} e \mathbf{Q} e que sua intensidade é igual à área do paralelogramo que tem \mathbf{P} e \mathbf{Q} por lados. Por outro lado, a Eq. (3.34) indica que o produto escalar de \mathbf{S} e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ pode ser obtido multiplicando-se a intensidade de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (ou seja, a área do paralelogramo definido por \mathbf{P} e \mathbf{Q}) pela projeção de \mathbf{S} sobre o vetor $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (isto é, pela projeção de \mathbf{S} sobre a normal ao plano que contém o paralelogramo). Logo, o produto triplo misto é igual, em valor absoluto, ao volume do paralelepípedo, tendo os vetores \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} por lados (Fig. 3.25). Observamos que o sinal do produto triplo misto será positivo se \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} formarem uma tríade orientada diretamente e negativo se formarem uma tríade orientada inversamente (isto é, $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ será negativo se a rotação que faz \mathbf{P} ficar alinhado com \mathbf{Q} for vista no sentido horário a partir da ponta de \mathbf{S}). O produto triplo misto será zero se \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} forem coplanares.

Como o paralelepípedo definido no parágrafo anterior independe da ordem em que os três vetores são tomados, os seis produtos triplos mistos

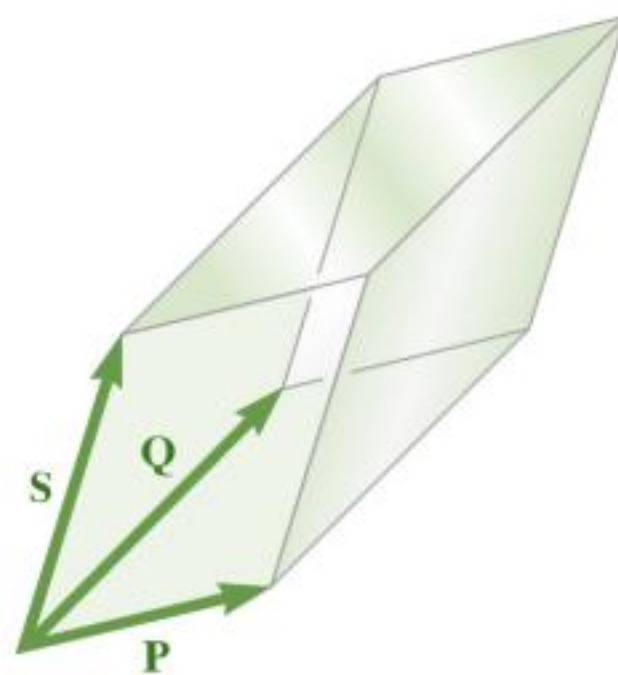


Figura 3.25

* Outro tipo de produto triplo será apresentado posteriormente (Cap. 15): o *produto triplo vetorial* $\mathbf{S} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.

que podem ser formados com \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} terão todos o mesmo valor absoluto, embora não o mesmo sinal. Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S})\end{aligned}\quad (3.39)$$

Arranjando as três letras que representam os três vetores em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.26), observamos que o sinal do produto triplo misto permanece inalterado se os vetores forem permutados de modo que eles ainda sejam lidos em ordem anti-horária. Tal permutação é denominada *permutação cíclica*. Da Eq. (3.39) e da propriedade comutativa dos produtos escalares resulta também que o produto triplo misto de \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser bem definido igualmente como $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ ou como $(\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q}$.

O produto triplo misto dos vetores \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser expresso em termos dos componentes retangulares desses vetores. Representando $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ por \mathbf{V} e usando a fórmula (3.30) para expressar o produto escalar de \mathbf{S} e \mathbf{V} , temos:

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Substituindo os componentes de \mathbf{V} obtidos pelas relações (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) \\ &\quad + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x)\end{aligned}\quad (3.40)$$

Essa expressão pode ser escrita de modo mais compacto se observarmos que ela representa a expansão de um determinante:

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}\quad (3.41)$$

Aplicando as regras que regem as permutações de linhas em um determinante, poderíamos verificar facilmente as relações (3.39), antes deduzidas a partir de considerações geométricas.

3.11 Momento de uma força em relação a um dado eixo

Agora que aumentamos mais nosso conhecimento de álgebra vetorial, podemos apresentar um novo conceito, o conceito de *momento de uma força em relação a um eixo*. Considere novamente uma força \mathbf{F} que atua sobre um corpo rígido e o momento \mathbf{M}_O dessa força em relação a O (Fig. 3.27). Seja OL um eixo através de O ; definimos o momento M_{OL} de \mathbf{F}

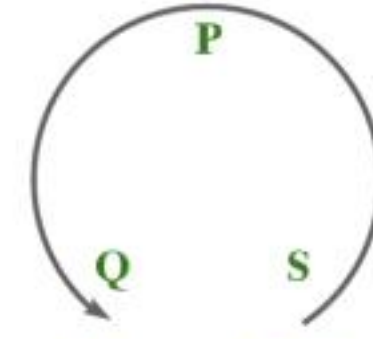


Figura 3.26

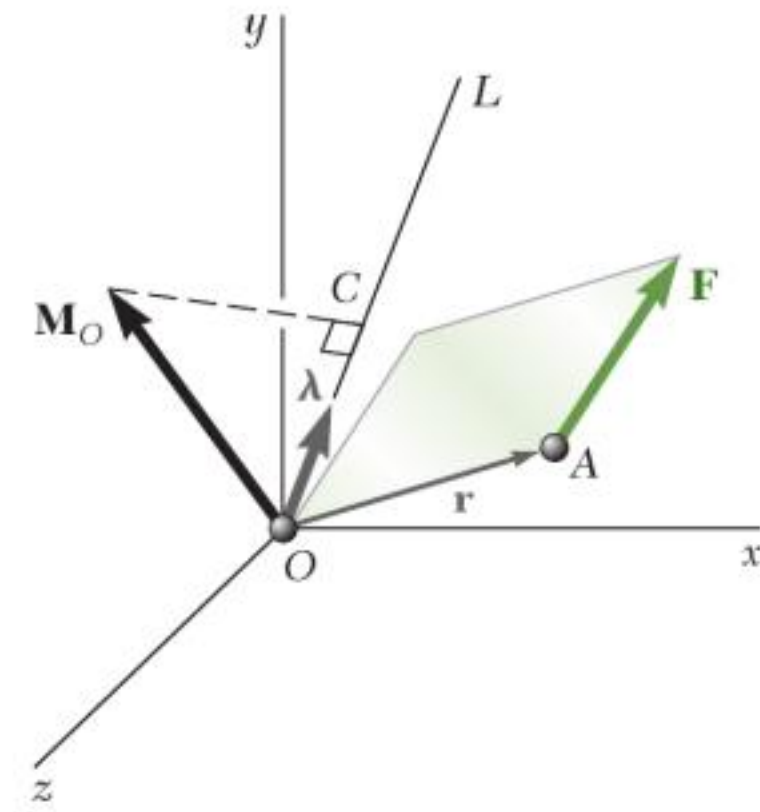


Figura 3.27

em relação a OL como a projeção OC do momento \mathbf{M}_O sobre o eixo OL . Representando por λ o vetor unitário ao longo de OL e retomando as Seções 3.9 e 3.6, respectivamente, as expressões (3.36) e (3.11) obtidas para as projeções de um vetor sobre um dado eixo e para o momento \mathbf{M}_O de uma força \mathbf{F} , temos:

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

que mostra que o momento M_{OL} de \mathbf{F} em relação ao eixo OL é o escalar obtido desenvolvendo-se o produto triplo misto de λ , \mathbf{r} e \mathbf{F} . Expressando M_{OL} na forma de um determinante, temos:

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cossenos diretores do eixo OL

x, y, z = coordenadas do ponto de aplicação de \mathbf{F}

F_x, F_y, F_z = componentes da força \mathbf{F}

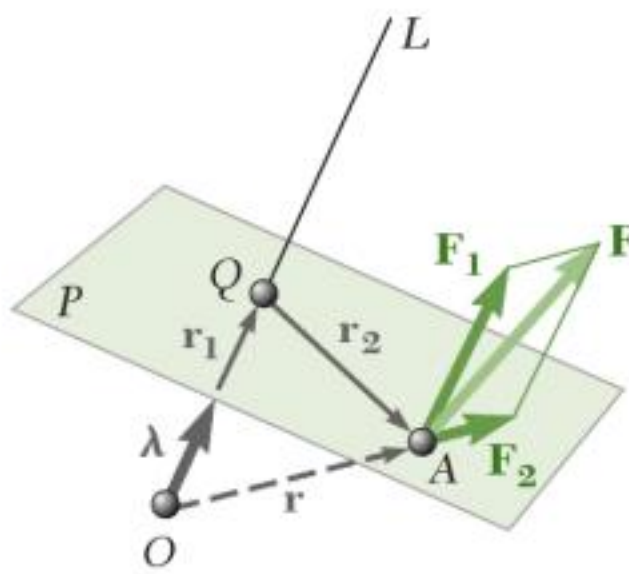


Figura 3.28

O significado físico do momento M_{OL} de uma força \mathbf{F} em relação a um eixo fixo OL torna-se mais evidente se decomposermos \mathbf{F} em dois componentes retangulares \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , com \mathbf{F}_1 paralelo a OL e \mathbf{F}_2 situado em um plano P perpendicular a OL (Fig. 3.28). Decompondo \mathbf{r} de modo semelhante em dois componentes \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 e substituindo \mathbf{F} e \mathbf{r} na Eq. (3.42), temos:

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Ao notar que todos os produtos triplos mistos, exceto o último, são nulos, pois envolvem vetores que são coplanares quando traçados a partir de uma origem comum (Seção 3.10), temos:

$$M_{OL} = \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \quad (3.44)$$

O produto vetorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ é perpendicular ao plano P e representa o momento do componente \mathbf{F}_2 de \mathbf{F} em relação ao ponto Q , em que OL intercepta P . Logo, o escalar M_{OL} , que será positivo se $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ e OL tiverem o mesmo sentido e sentido negativo em caso contrário, mede a tendência de \mathbf{F}_2 a fazer o corpo rígido girar em torno do eixo fixo OL . Como o outro componente \mathbf{F}_1 de \mathbf{F} não tende a fazer o corpo girar em torno de OL , concluímos que o momento M_{OL} de \mathbf{F} em relação a OL mede a tendência da força \mathbf{F} a imprimir ao corpo rígido um movimento de rotação em torno do eixo fixo OL .

Segue-se da definição do momento de uma força em relação a um eixo que o momento de \mathbf{F} em relação a um eixo de coordenadas é igual ao componente de \mathbf{M}_O ao longo desse eixo. Dispondo sucessivamente cada um dos vetores unitários \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} no lugar de λ em (3.42), verificamos

que as expressões obtidas para os *momentos de \mathbf{F} em relação aos eixos de coordenadas* são, respectivamente, iguais às expressões obtidas na Seção 3.8 para os componentes do momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} em relação a O .

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observamos que, assim como os componentes F_x , F_y e F_z de uma força \mathbf{F} que atua sobre um corpo rígido medem, respectivamente, a tendência de \mathbf{F} a mover o corpo rígido nas direções x , y e z , os momentos M_x , M_y e M_z de \mathbf{F} em relação aos eixos de coordenadas medem a tendência de \mathbf{F} a imprimir ao corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente.

De modo mais geral, o momento de uma força \mathbf{F} aplicada no ponto A em relação a um eixo que não passa pela origem é obtido escolhendo-se um ponto arbitrário B sobre o eixo (Fig. 3.29) e determinando-se a projeção sobre o eixo BL do momento \mathbf{M}_B de \mathbf{F} em relação a B . Escrevemos

$$M_{BL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_B = \lambda \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \quad (3.45)$$

onde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa o vetor traçado de B até A . Expressando M_{BL} na forma de um determinante, temos

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

onde λ_x , λ_y , λ_z = cossenos diretores do eixo BL

$$\begin{aligned} x_{A/B} &= x_A - x_B & y_{A/B} &= y_A - y_B & z_{A/B} &= z_A - z_B \\ F_x, F_y, F_z &= \text{componentes da força } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Deve-se notar que o resultado obtido é independente da escolha do ponto B sobre o eixo dado. Com efeito, representando por M_{CL} , o resultado obtido com um ponto C diferente, temos

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \lambda \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Mas, como os vetores λ e $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ estão sobre a mesma linha, o volume do paralelepípedo tendo por lados os vetores λ e $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ e \mathbf{F} nulo, bem como o produto triplo misto desses três vetores (Seção 3.10). A expressão obtida para M_{CL} reduz-se, portanto, ao seu primeiro termo, que é a expressão usada anteriormente para definir M_{BL} . Além disso, segue-se da Seção 3.6 que, ao se calcular o momento de \mathbf{F} em relação ao eixo dado, A pode ser qualquer ponto sobre a linha de ação de \mathbf{F} .

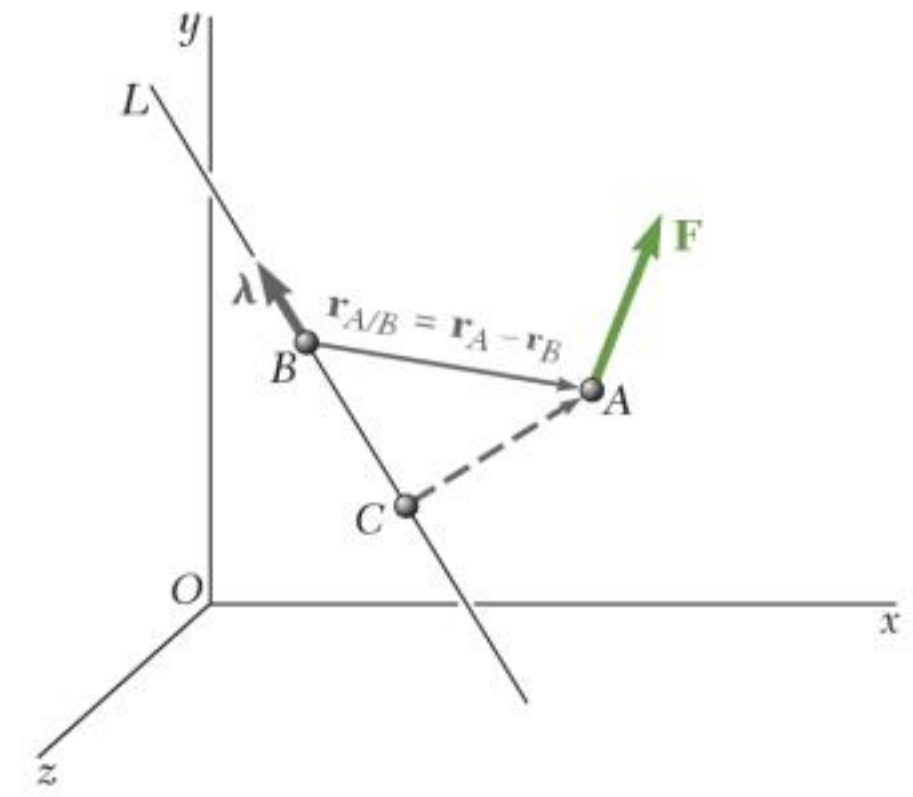
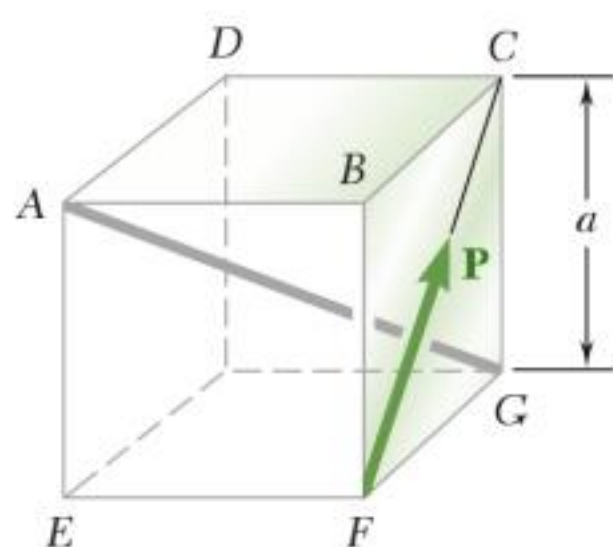


Figura 3.29



PROBLEMA RESOLVIDO 3.5

Um cubo de lado a sofre a ação de uma força \mathbf{P} , como mostra a figura. Determine o momento de \mathbf{P} (a) em relação a A , (b) em relação à aresta AB , (c) em relação a diagonal AG do cubo. (d) Usando o resultado da parte c, determine a distância perpendicular entre AG e FG .

SOLUÇÃO

a. Momento em relação a A . Escolhendo os eixos x , y e z como mostra a figura decompomos em componentes retangulares a força \mathbf{P} e o vetor $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$ traçado de A até o ponto de aplicação F de \mathbf{P} .

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

O momento de \mathbf{P} em relação a A é

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft$$

b. Momento em relação a AB . Projetando \mathbf{M}_A sobre AB , escrevemos:

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Verificamos que, como AB é paralelo ao eixo x , M_{AB} também é o componente x do momento \mathbf{M}_A .

c. Momento em relação à diagonal AG . O momento \mathbf{P} em relação a AG é obtido projetando-se \mathbf{M}_A sobre AG . Representando por $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor unitário ao longo de AG , temos:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad \mathbf{M}_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

Método alternativo. O momento \mathbf{P} em relação a AG pode também ser expresso em forma de um determinante:

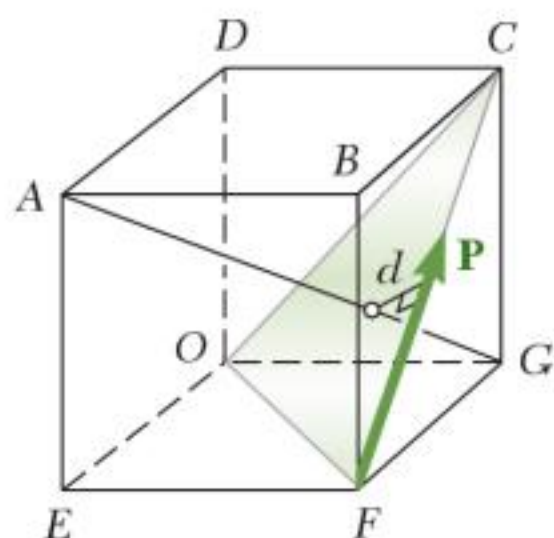
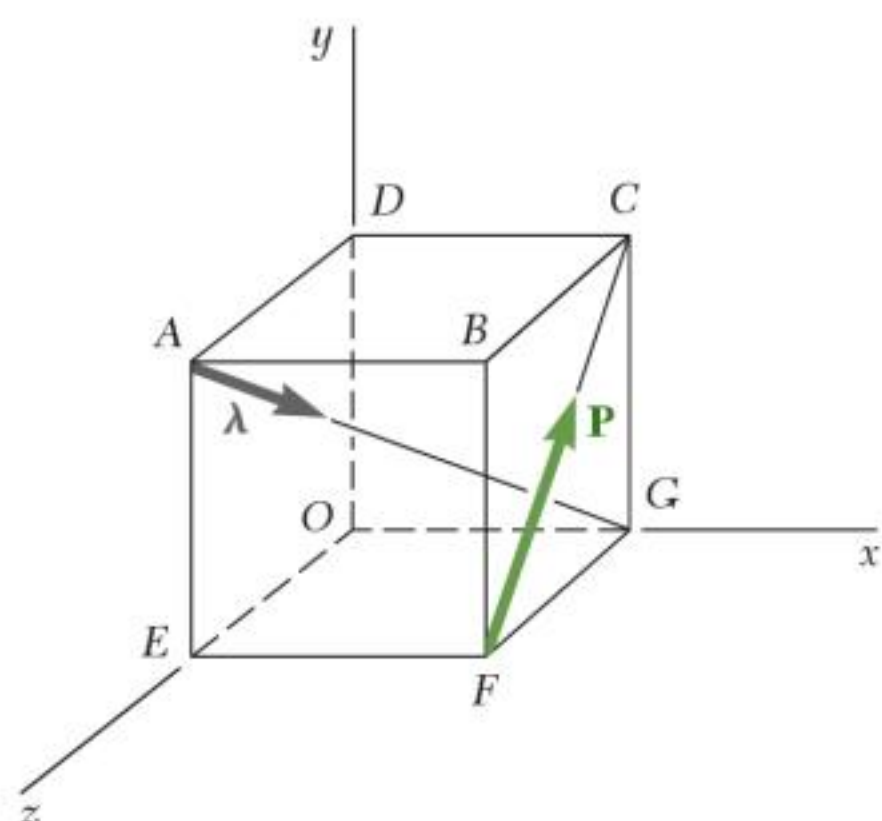
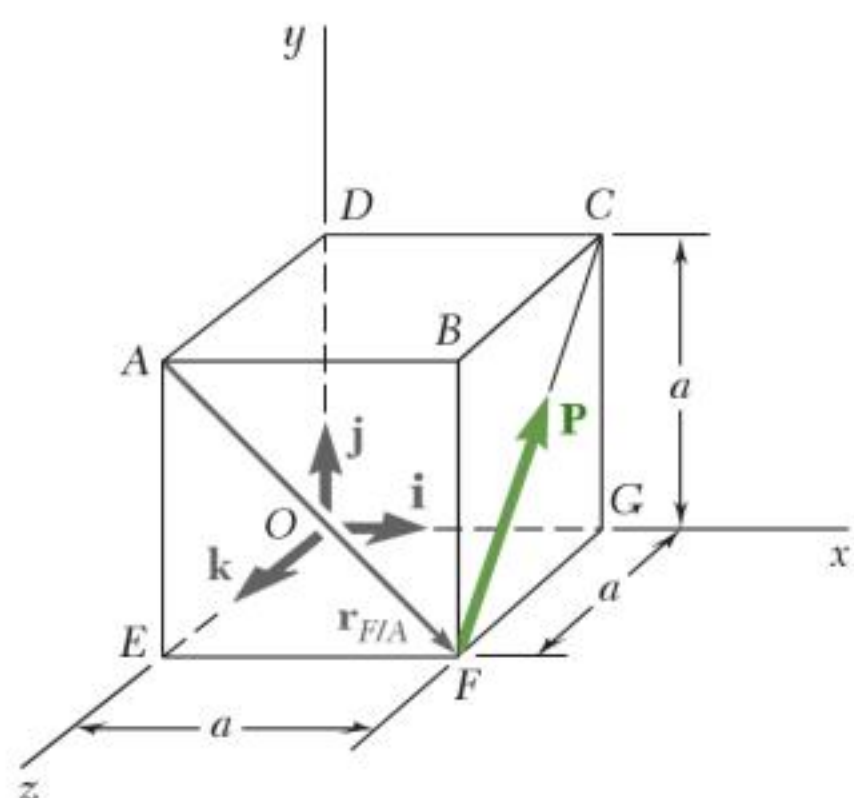
$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

d. Distância perpendicular entre AG e FC . Primeiro, observamos que \mathbf{P} é perpendicular à diagonal AG . Pode-se conferir isso efetuando-se o produto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ e verificando-se que este é nulo:

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

O momento M_{AG} pode, então, ser expresso como $-Pd$, onde d é a distância perpendicular de AG até FC . (O sinal negativo é usado porque a rotação imprimida ao cubo \mathbf{P} é vista no sentido horário por um observador em G .) Retomando o valor encontrado para M_{AG} na parte c,

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \quad d = a/\sqrt{6}$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, você vai aplicar o *produto escalar* de dois vetores para determinar o ângulo formado por dois vetores dados e a projeção de uma força sobre um dado eixo. Você também usará o *produto triplo misto* de três vetores para encontrar o momento de uma força em relação a um dado eixo e a distância perpendicular entre duas linhas.

1. Cálculo do ângulo formado por dois vetores dados. Primeiro, expresse os vetores em termos de seus componentes e determine as intensidades dos dois vetores. O cosseno do ângulo desejado é obtido, então, dividindo-se o produto escalar dos dois vetores pelo produto de suas intensidades [Eq. (3.32)].

2. Cálculo da projeção de um vetor \mathbf{P} sobre um dado eixo OL . Em geral, comece expressando \mathbf{P} e o vetor unitário λ , que define a direção e o sentido do eixo em forma de componentes. Tome cuidado com o sentido correto de λ (ou seja, λ deve ser dirigido de O para L). Assim, a projeção necessária é igual ao produto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$. Todavia, se você conhece o ângulo θ entre \mathbf{P} e λ , a projeção também é dada por $P \cos \theta$.

3. Determinação do momento M_{OL} de uma força em relação a um dado eixo OL . Definimos M_{OL} como

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

onde λ é o vetor unitário ao longo de OL e \mathbf{r} é um vetor posição *de qualquer ponto* sobre a linha OL até qualquer ponto sobre a linha de ação de \mathbf{F} . Tal como no caso do momento de uma força em relação a um ponto, a escolha do vetor posição mais conveniente vai simplificar seus cálculos. Lembre-se também do aviso da seção anterior: os vetores \mathbf{r} e \mathbf{F} devem ter o sentido correto e devem ser colocados na ordem apropriada. O procedimento que você deve seguir ao calcular o momento de uma força em relação a um eixo está ilustrado na parte *c* do Problema Resolvido 3.5. Os dois passos essenciais desse procedimento são, em primeiro lugar, expressar λ , \mathbf{r} e \mathbf{F} em termos de seus componentes retangulares e, em seguida, efetuar o produto triplo misto $\lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ para determinar o momento em relação ao eixo. Na maioria dos problemas tridimensionais, o modo mais conveniente de se calcular o produto triplo misto é usar um determinante.

Como observamos no texto, quando λ estiver direcionado ao longo de um eixo de coordenadas, M_{OL} será igual ao componente escalar de \mathbf{M}_O ao longo desse eixo.

(continua)

4. Determinação da distância perpendicular entre duas linhas. Você deve se lembrar de que é o componente perpendicular \mathbf{F}_2 da força \mathbf{F} que tende a fazer o corpo girar em torno de um dado eixo OL (Fig. 3.28). Resulta, então, que

$$M_{OL} = F_2 d$$

onde M_{OL} é o momento de \mathbf{F} em relação ao eixo OL e d é a distância perpendicular entre OL e a linha de ação de \mathbf{F} . Esta última equação nos fornece uma técnica simples para determinarmos d . Primeiro, suponha que a força \mathbf{F} de intensidade conhecida F esteja ao longo de uma das linhas dadas e que o vetor unitário λ esteja ao longo da outra linha. Em seguida, calcule o momento M_{OL} da força \mathbf{F} em relação à segunda linha aplicando o método discutido anteriormente. A intensidade do componente paralelo de F_1 de \mathbf{F} é obtida usando-se o produto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \lambda$$

O valor de F_2 é determinado, então, como:

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Finalmente, substitua os valores de M_{OL} e F_2 na equação $M_{OL} = F_2 d$ e resolva para d .

Você deve agora compreender que o cálculo da distância perpendicular na parte d do Problema Resolvido 3.5 ficou simplificado pelo fato de \mathbf{P} ser perpendicular à diagonal AG . Em geral, as duas linhas dadas não serão perpendiculares, de modo que a técnica que acabamos de delinear terá de ser usada na determinação da distância perpendicular entre elas.

PROBLEMAS

3.35 Dados os vetores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule os produtos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ e $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

3.36 Desenvolva os produtos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ e $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}$, onde $B = B'$, e use os resultados obtidos para demonstrar a identidade

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta)$$

3.37 A seção AB de uma tubulação está no plano yz e forma um ângulo de 37° com o eixo z . Os ramais CD e EF são ligados a AB como mostrado na figura. Determine o ângulo das linhas AB e CD .

3.38 A seção AB de uma tubulação está no plano yz e forma um ângulo de 37° com o eixo z . Os ramais CD e EF são ligados a AB como mostrado na figura. Determine o ângulo das linhas AB e EF .

3.39 Considere a rede de voleibol mostrada na figura. Determine o ângulo formado pelos cabos de sustentação AB e AC .

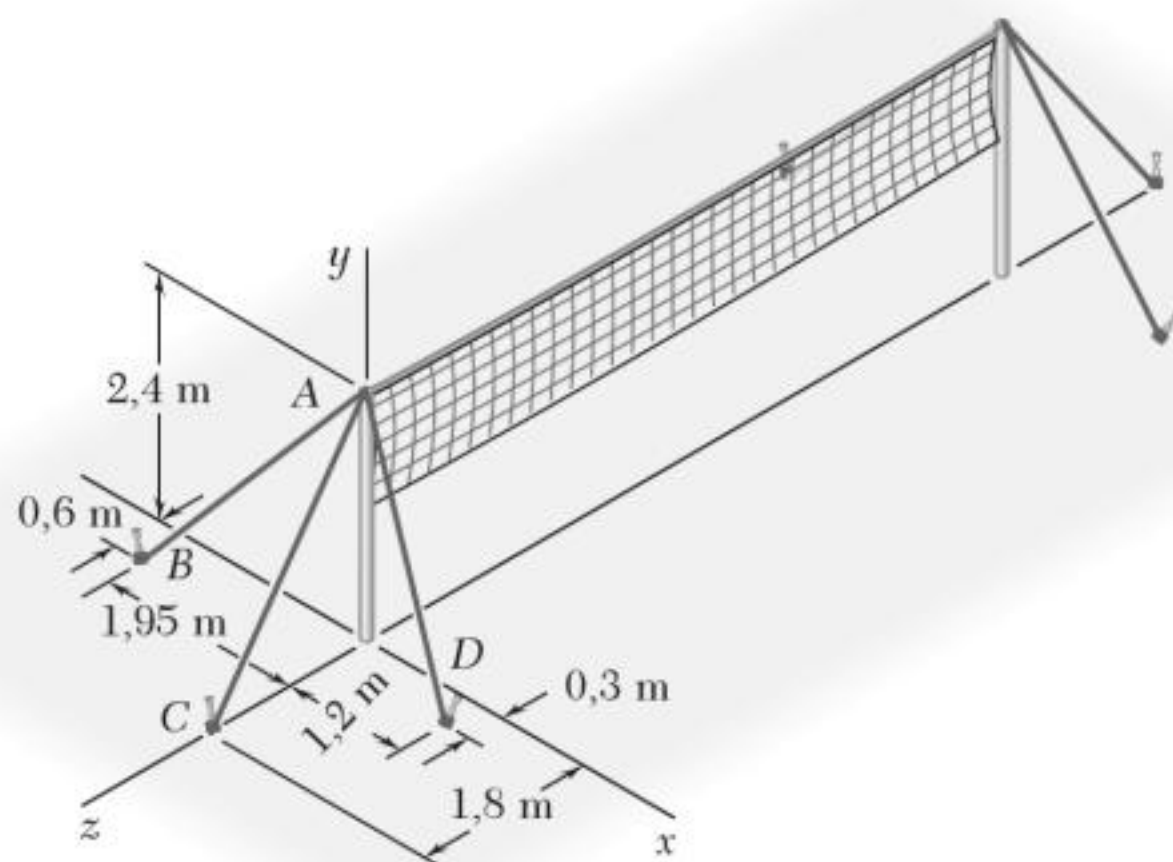


Figura P3.39 e P3.40

3.40 Considere a rede de voleibol mostrada na figura. Determine o ângulo formado pelos cabos de sustentação AC e AD .

3.41 Sabendo que a tensão no cabo AC é 1.260 N, determine (a) o ângulo entre o cabo AC e a barra AB , (b) a projeção em AB da força exercida pelo cabo AC no ponto A .

3.42 Sabendo que a tensão no cabo AD é de 405 N, determine (a) o ângulo entre o cabo AD e a barra AB , (b) a projeção em AB da força exercida pelo cabo AD no ponto A .

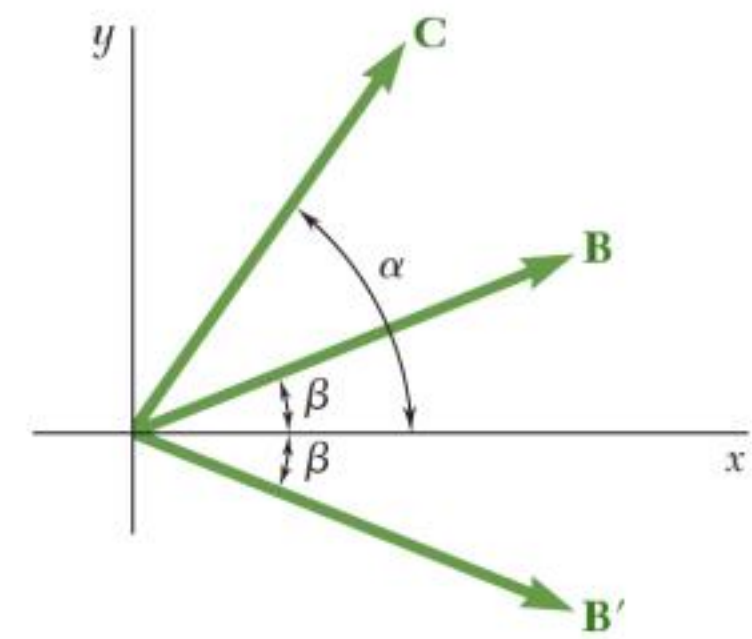


Figura P3.36

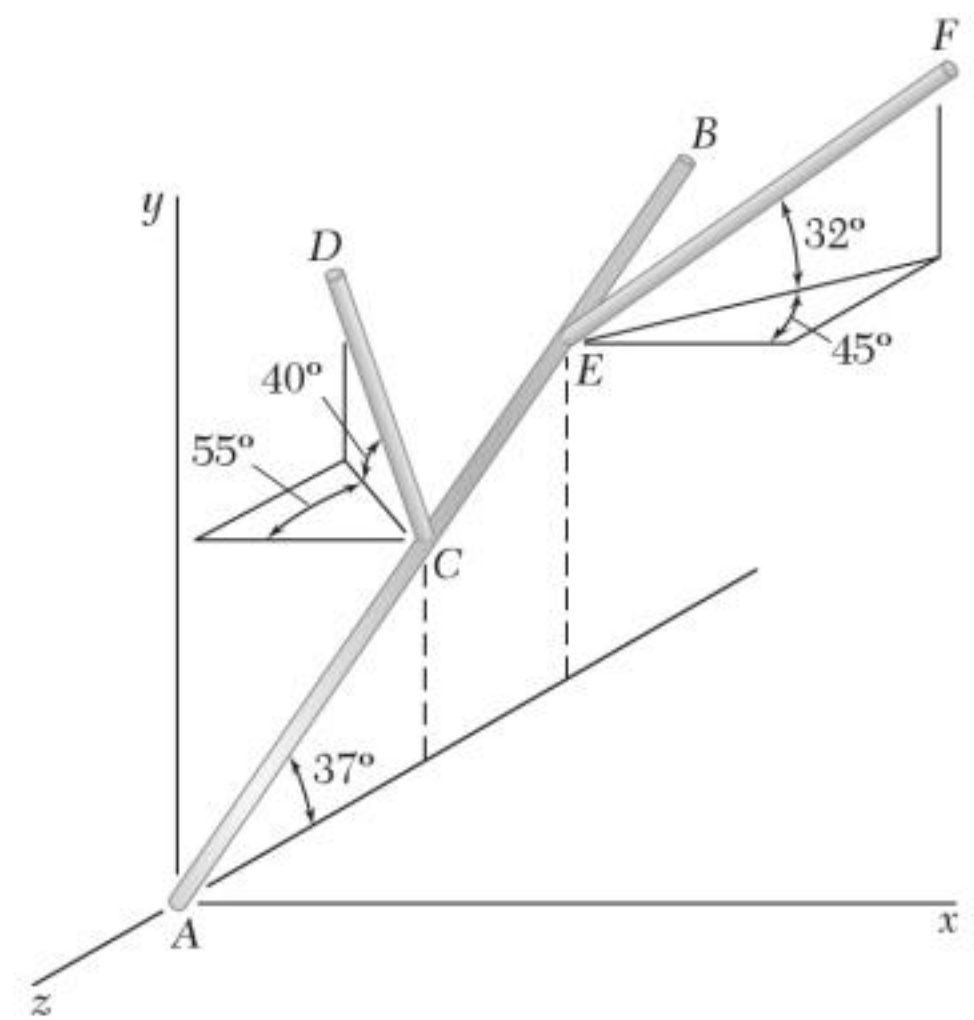


Figura P3.37 e P3.38

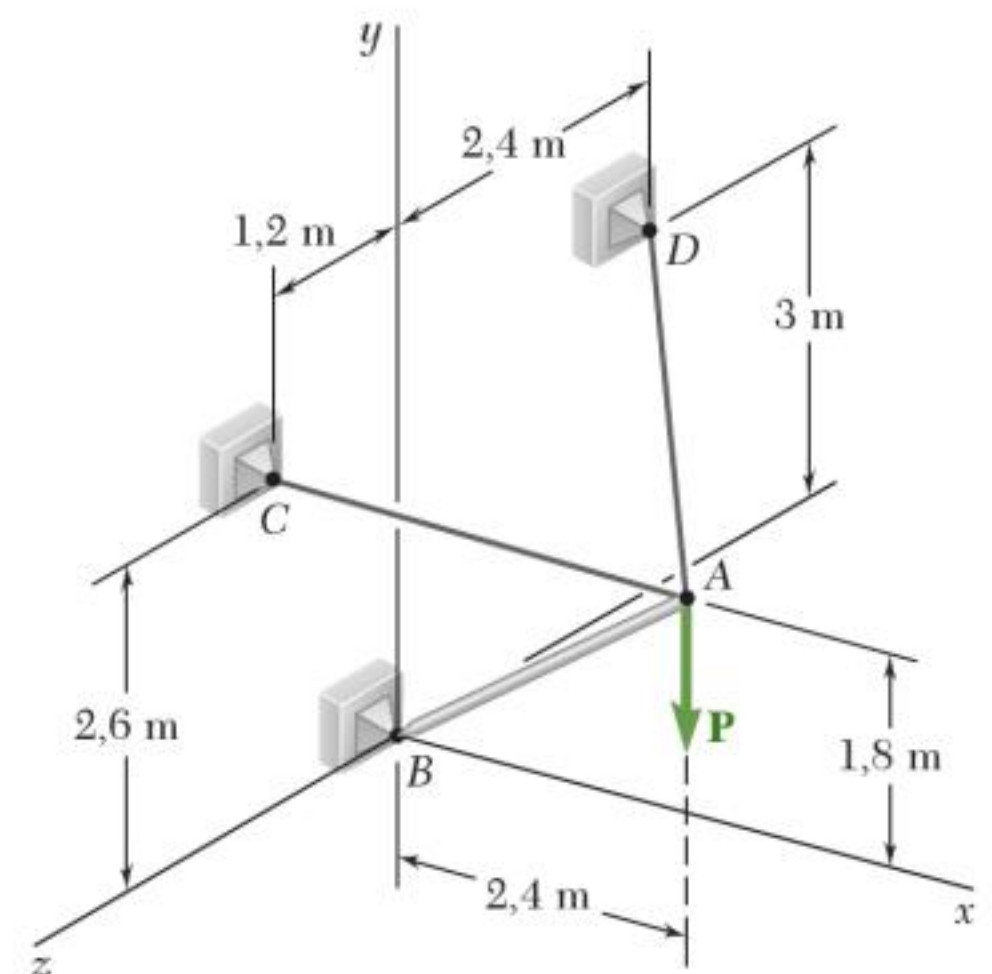


Figura P3.41 e P3.42

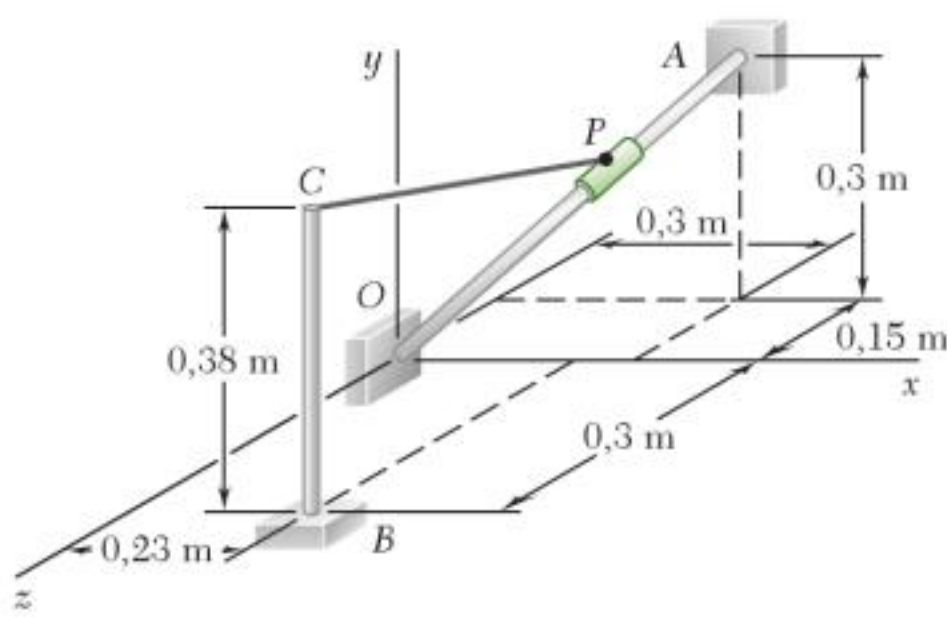


Figura P3.43 e P3.44

3.43 O cursor P pode mover-se ao longo da barra OA . Uma corda elástica PC é ligada ao cursor e ao elemento vertical BC . Sabendo que a distância de O até P é $0,15$ m e que a tração na corda é 13 N, determine (a) o ângulo entre a corda elástica e a barra OA , (b) a projeção sobre OA da força exercida pela corda PC no ponto P .

3.44 O cursor P pode mover-se ao longo da barra OA . Uma corda elástica PC é ligada ao cursor e ao elemento vertical BC . Determine a distância de O até P para a qual a corda PC e a barra OA são perpendiculares.

3.45 Determine o volume do paralelepípedo da Fig.3.25 quando (a) $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e (b) $\mathbf{P} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3.46 Dados os vetores $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determine o valor de S_x para o qual os três vetores são coplanares.

3.47 A tampa $ABCD$ de uma caixa de armazenagem, de $0,61$ m \times $1,0$ m, é articulada ao longo do lado AB e mantida aberta com uma corda DEC laçada sem atrito a um gancho em E . Sabendo-se que a tração na corda é 66 N, determine o momento em relação a cada um dos eixos de coordenadas da força exercida pela corda em D .

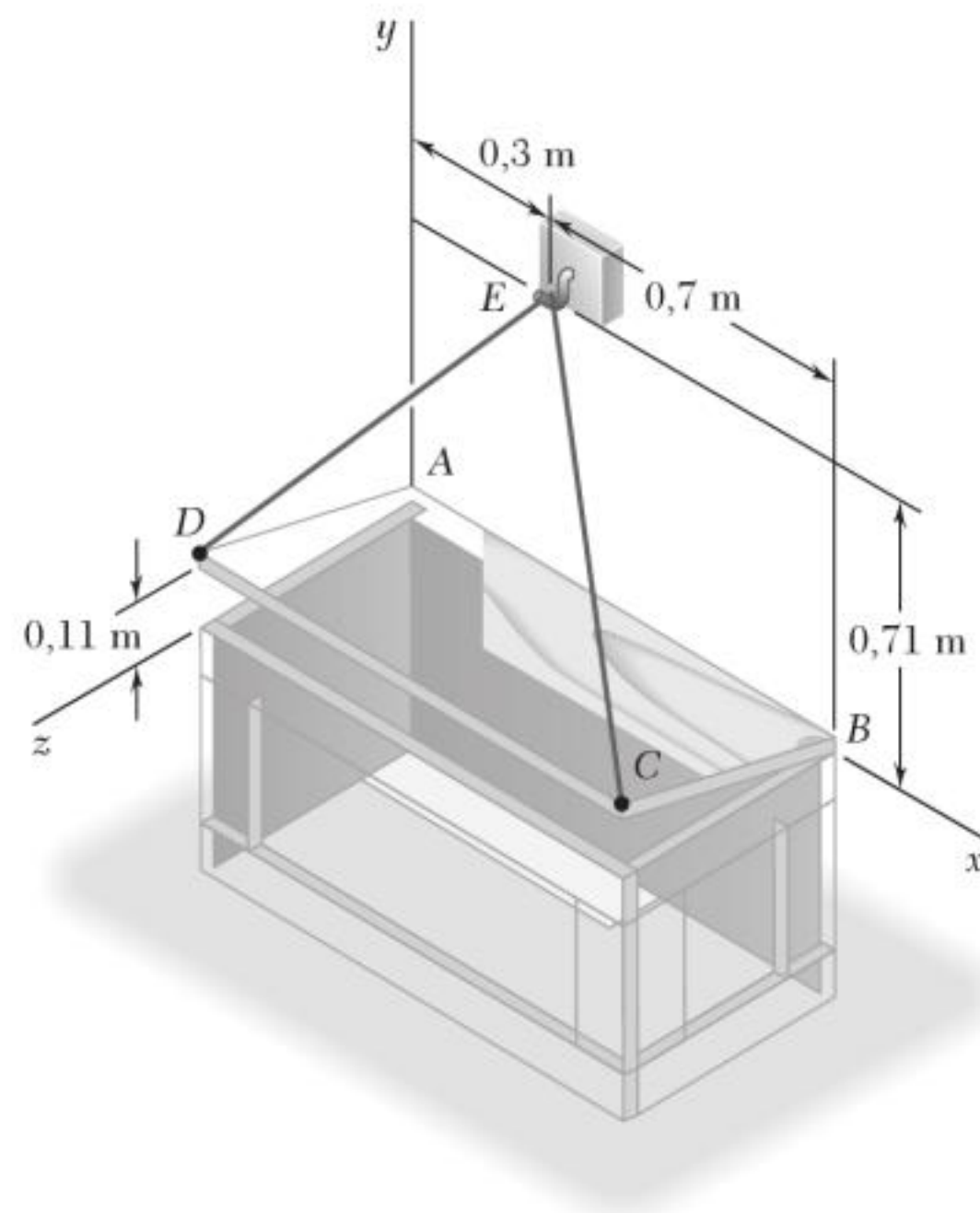


Figura P3.47 e P3.48

3.48 A tampa $ABCD$ de uma caixa de armazenagem, de $0,61$ m \times $1,0$ m, é articulada ao longo do lado AB e mantida aberta com uma corda DEC laçada sem atrito a um gancho em E . Sabendo-se que a tração na corda é de 66 N, determine o momento em relação a cada um dos eixos de coordenadas da força exercida pela corda em C .

- 3.49** Para erguer um caixote pesado, um homem utiliza uma talha presa embaixo de uma viga I pelo gancho B . Sabendo que os momentos em relação aos eixos y e z da força exercida em B pela porção AB da corda são, respectivamente, $120 \text{ N} \cdot \text{m}$ e $-460 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine a distância a .
- 3.50** Para erguer um caixote pesado, um homem utiliza uma talha presa embaixo de uma viga I pelo gancho B . Sabendo que o homem aplica uma força de 195 N à extremidade A da corda e que o momento dessa força em relação ao eixo y é $132 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine a distância a .
- 3.51** Um pequeno barco é suportado por dois guindastes, um dos quais é mostrado na figura. Sabendo que o momento sobre o eixo z da resultante \mathbf{R}_A exercida no guindaste em A não deve exceder $378 \text{ N} \cdot \text{m}$ em valores absolutos. Determine a maior tensão admissível na linha $ABAD$ quando $x = 1,8 \text{ m}$.
- 3.52** Para o guindaste do Problema 3.51, determine a maior distância admissível x quando a tensão na linha $ABAD$ é 267 N .
- 3.53** Para afrouxar uma válvula congelada, um a força \mathbf{F} de intensidade 300 N é aplicada na alavanca da válvula. Sabendo que $\theta = 25^\circ$, $M_x = -83 \text{ N} \cdot \text{m}$, e $M_z = -58 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine ϕ e d .

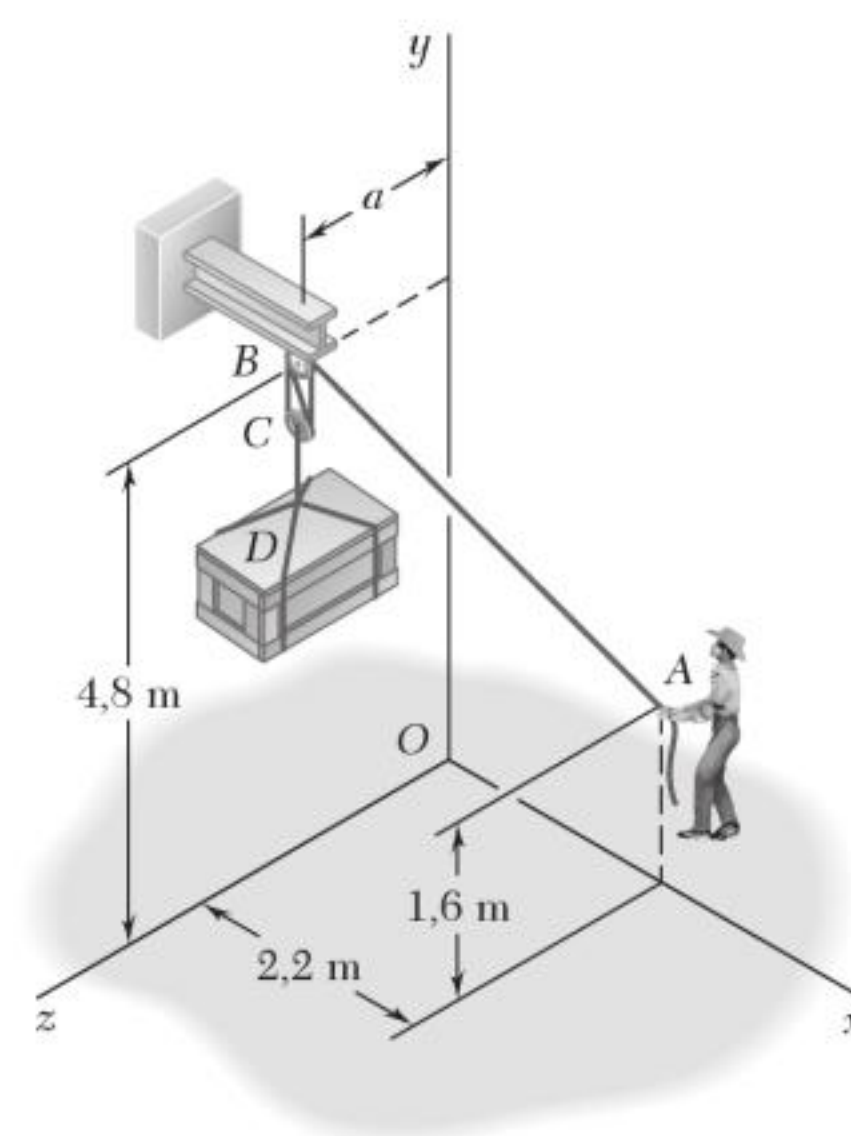


Figura P3.49 e P3.50

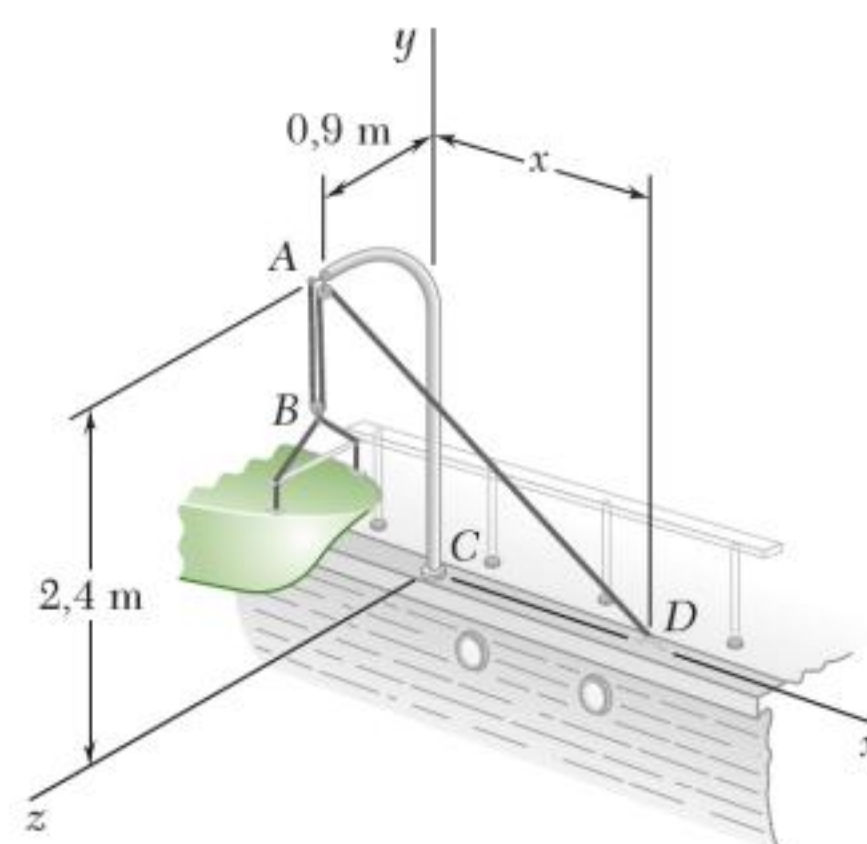


Figura P3.51 e P3.52

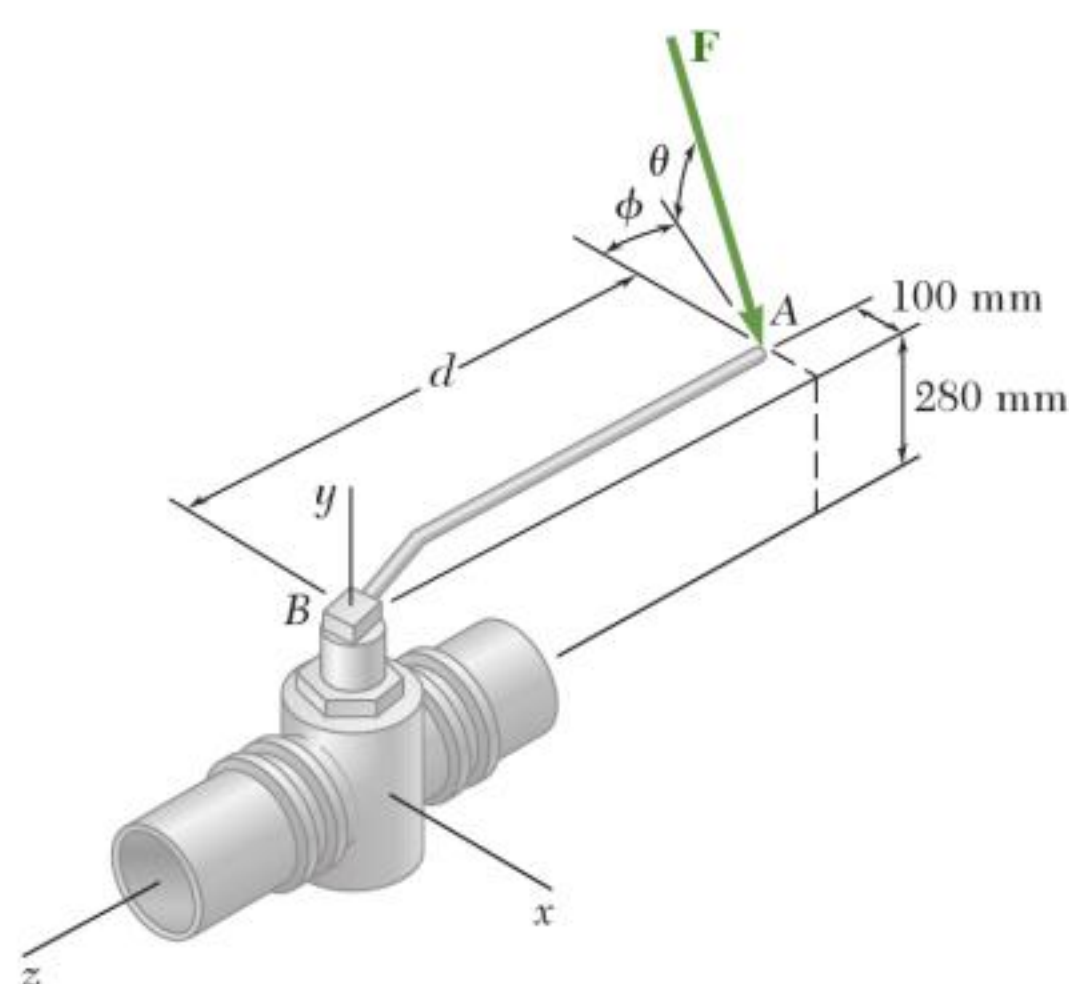


Figura P3.53 e P3.54

- 3.54** Durante a aplicação da força \mathbf{F} na alavanca da válvula mostrada na figura, os seus momentos sobre os eixos x e z são, respectivamente, $M_x = -104 \text{ N} \cdot \text{m}$ e $M_z = -109 \text{ N} \cdot \text{m}$. Para $d = 0,7 \text{ m}$, determine o momento M_y de \mathbf{F} sobre o eixo y .
- 3.55** Uma armação ACD é articulado em A e B e sustentada pelo cabo que passa através de um anel em B e fixada por ganchos em G e H . Sabendo que a tensão no cabo é 450 N , determine o momento sobre a diagonal AD exercida pela força na armação pela porção BH do cabo.

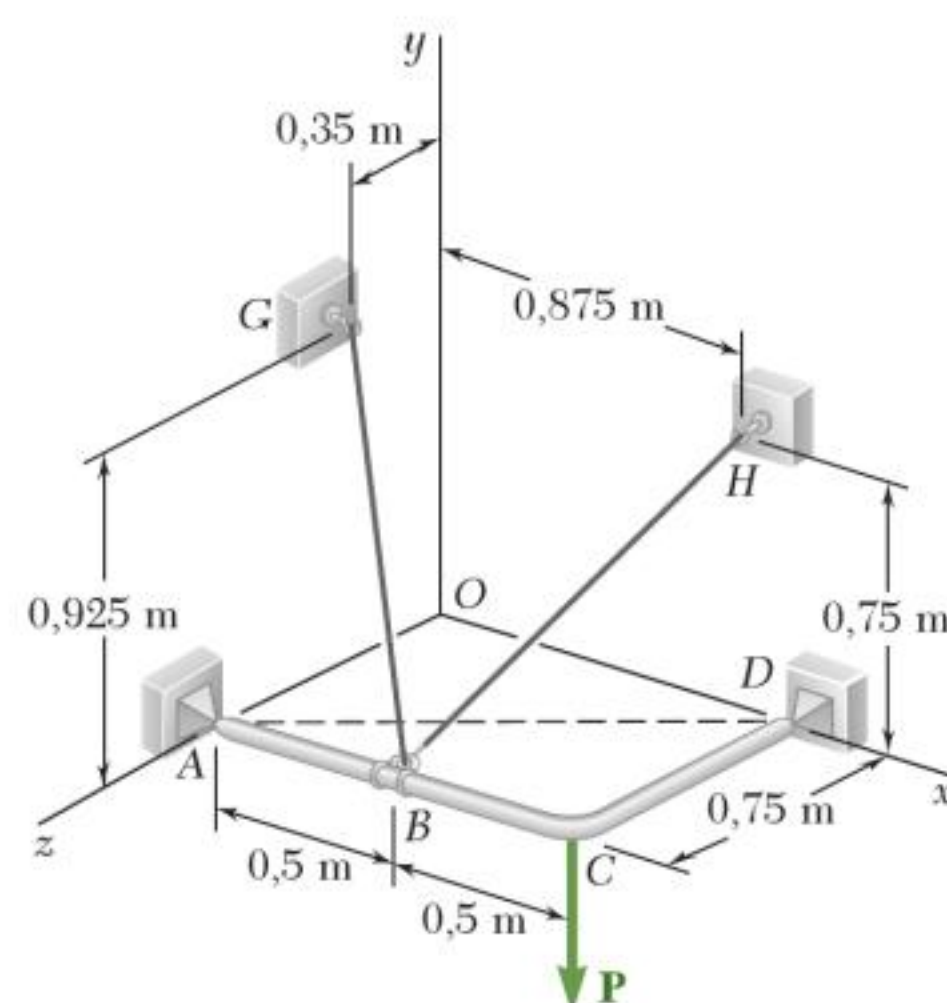


Figura P3.55

- 3.56** No Problema 3.55, determine o momento sobre a diagonal AD exercida pela força na armação pela porção BG do cabo.
- 3.57** A placa triangular ABC é sustentada por juntas rotuladas em B e D e mantida na posição mostrada pelos cabos AE e CF . Se a força exercida pelo cabo AE em A é de 55 N, determine o momento dessa força em relação à linha que une os pontos D e B .

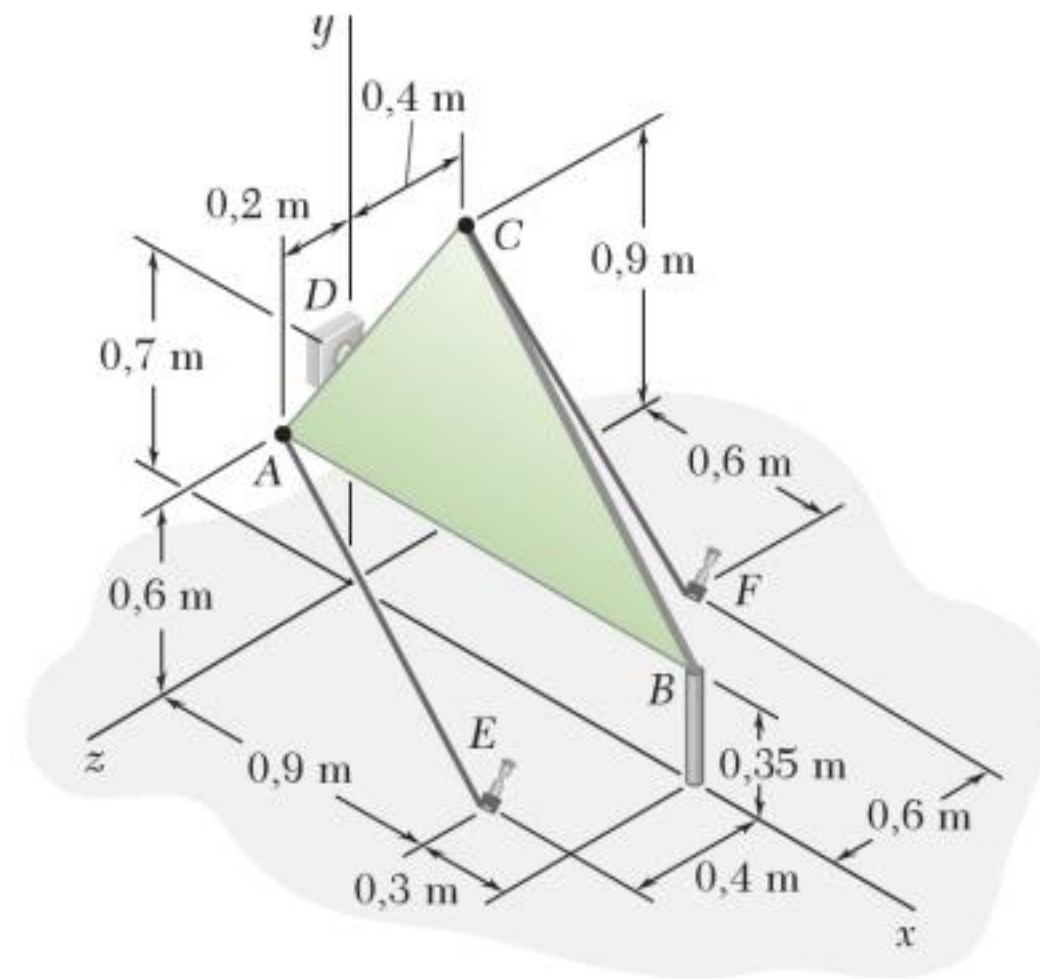


Figura P3.57 e P3.58

- 3.58** A placa triangular ABC é sustentada por juntas rotuladas em B e D e mantida na posição mostrada pelos cabos AE e CF . Se a força exercida pelo cabo CF em C é 33 N, determine o momento dessa força em relação à linha que une os pontos D e B .
- 3.59** Um tetraedro regular tem seis arestas de comprimento a . Uma força \mathbf{P} é dirigida ao longo da aresta BC , como mostrado na figura. Determine o momento de \mathbf{P} em relação à aresta OA .

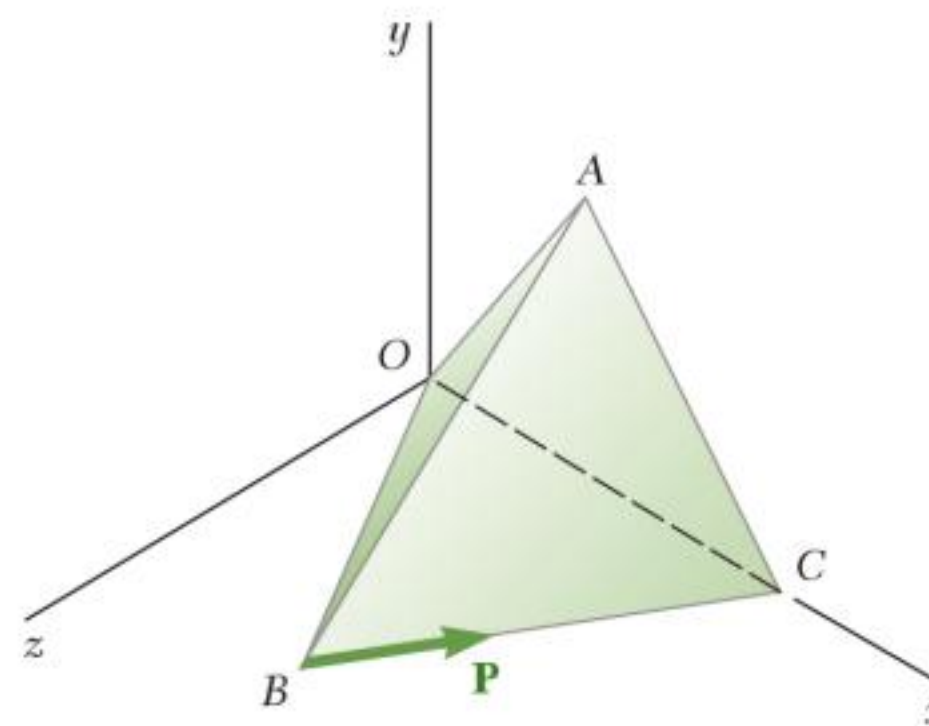


Figura P3.59 e P3.60

- 3.60** Um tetraedro regular tem seis arestas de comprimento a . (a) Mostre que duas arestas opostas, tais como OA e BC , são perpendiculares entre si. (b) Use essa propriedade e o resultado obtido no Problema 3.59 para determinar a distância perpendicular entre as arestas OA e BC .

- 3.61** Uma placa de sinalização é erguida em um terreno desnivelado e ancorada pelos cabos EF e EG . Se a força exercida pelo cabo EF em E é 205 N, determine o momento desta força sobre a linha que une os pontos A e D .

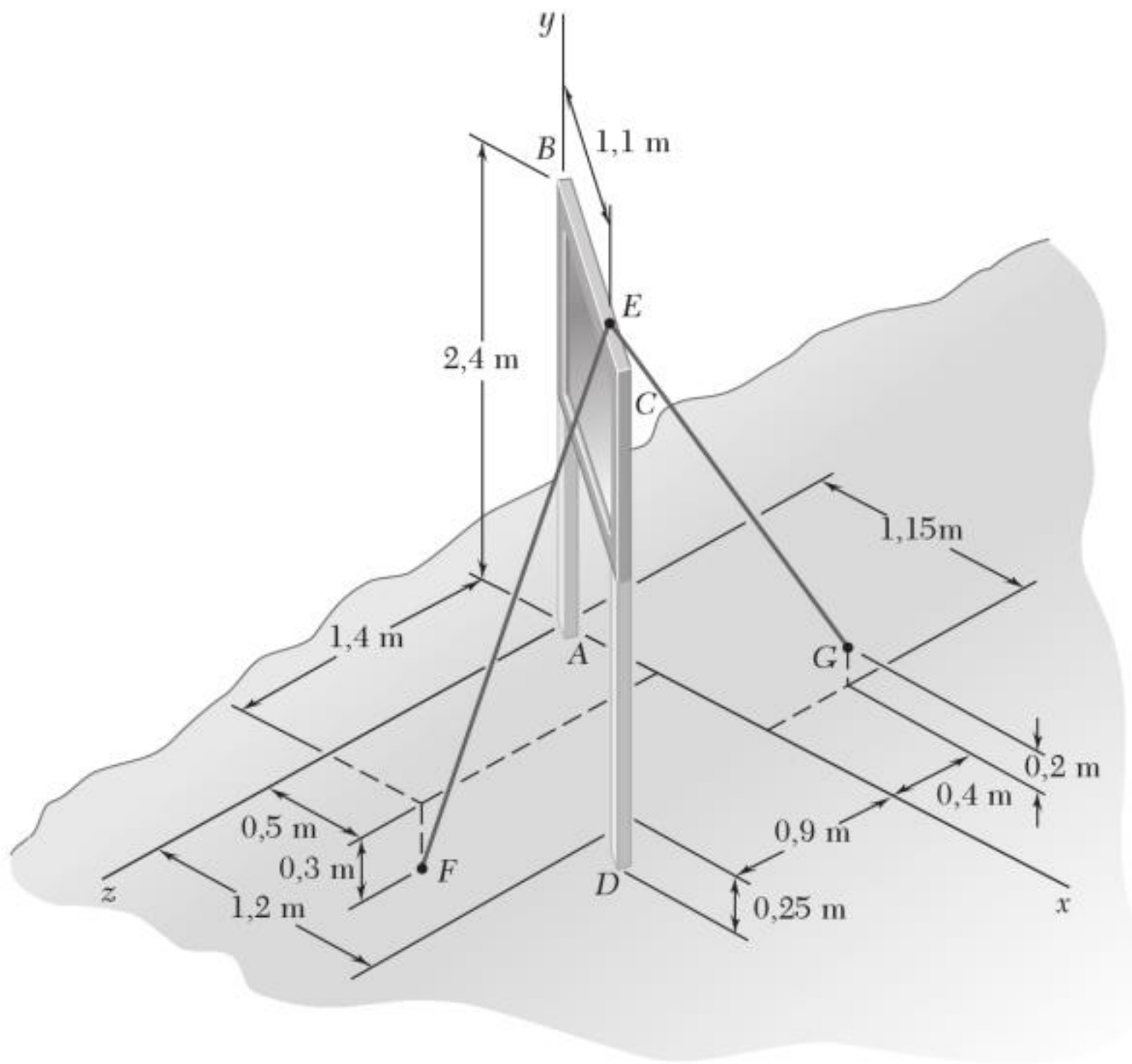


Figura P3.61 e P3.62

- 3.62** Uma placa de sinalização é erguida em um terreno desnivelado e é fixada pelos cabos EF e EG . Se a força exercida pelo cabo EG em E é 240 N, determine o momento desta força sobre a linha que une os pontos A e D .
- 3.63** Duas forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 no espaço têm a mesma intensidade F . Demonstre que o momento de \mathbf{F}_1 em relação à linha de ação de \mathbf{F}_2 é igual ao momento de \mathbf{F}_2 em relação à linha de ação de \mathbf{F}_1 .
- *3.64** No Problema 3.55, determine a distância perpendicular entre a porção BH do cabo e a diagonal AD .
- *3.65** No Problema 3.56, determine a distância perpendicular entre a porção BG do cabo e a diagonal AD .
- *3.66** No Problema 3.57, determine a distância perpendicular entre o cabo AE e a linha que une os pontos D e B .
- *3.67** No Problema 3.58, determine a distância perpendicular entre o cabo CF e a linha que une os pontos D e B .
- *3.68** No Problema 3.61, determine a distância perpendicular entre o cabo EF e a linha que une os pontos A e D .
- *3.69** No Problema 3.62, determine a distância perpendicular entre o cabo EG e a linha que une os pontos A e D .

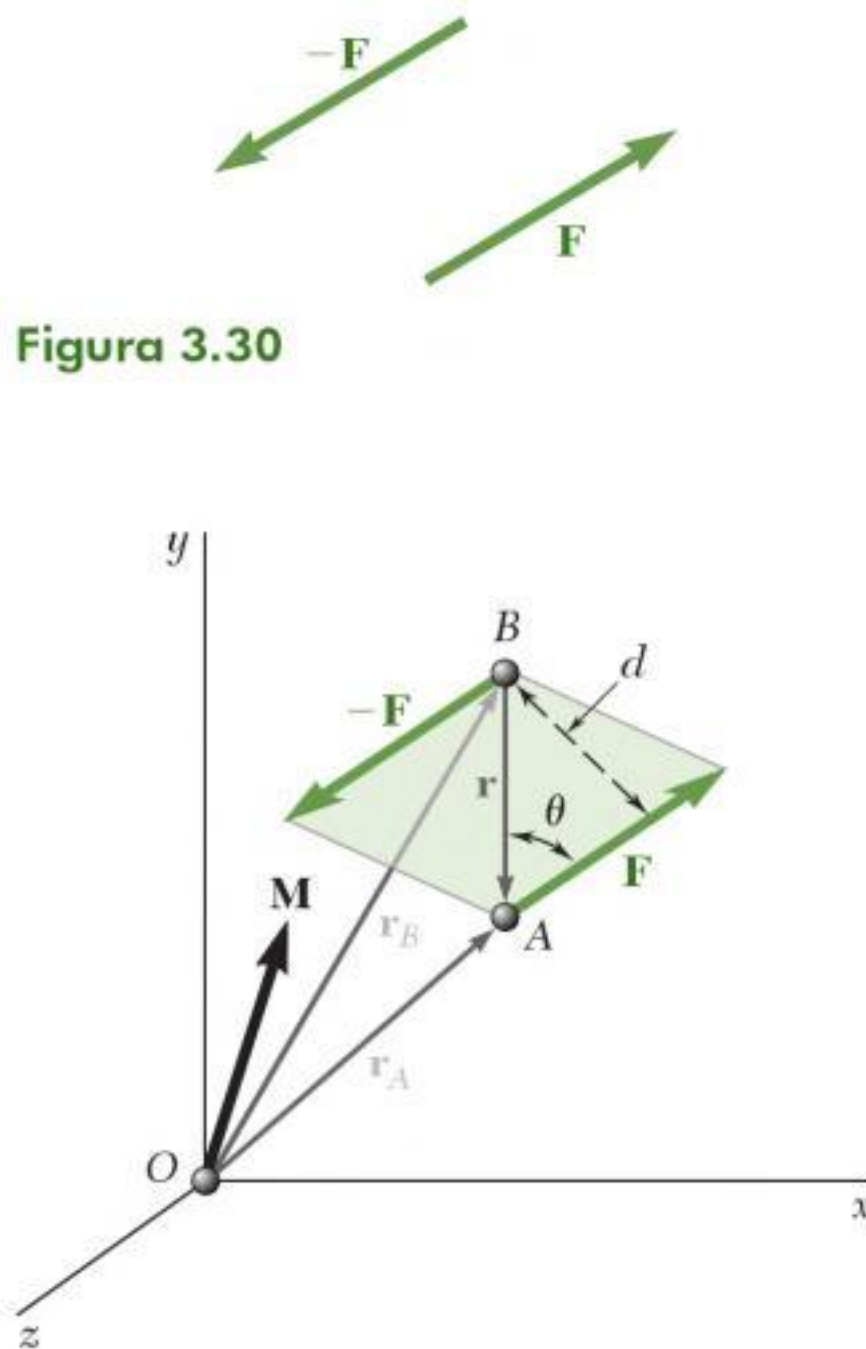


Figura 3.30

Figura 3.31

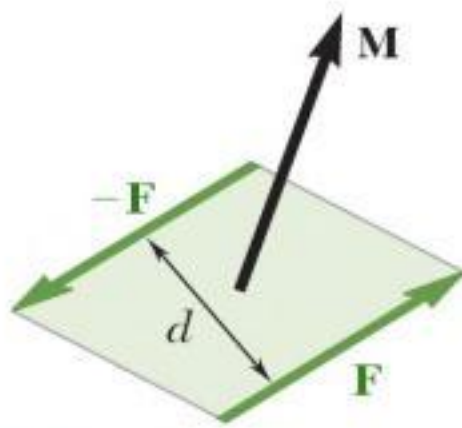


Figura 3.32



Foto 3.1 As forças paralelas para cima e para baixo de igual intensidade exercidas sobre os braços de uma chave de roda são um exemplo de binário.

3.12 Momento de um binário

Duas forças \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ de intensidade igual, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário (Fig. 3.30). É claro que a soma dos componentes das duas forças em qualquer direção é zero. A soma dos momentos das duas forças em relação a um dado ponto, porém, não é zero. As duas forças não irão transpor o corpo sobre o qual atuam, mas tenderão a fazê-lo girar.

Representando por \mathbf{r}_A e \mathbf{r}_B , respectivamente, os vetores posição dos pontos de aplicação de \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ (Fig. 3.31), encontramos que a soma dos momentos das duas forças em relação a O é

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Fazendo $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, onde \mathbf{r} é o vetor que une os pontos de aplicação das duas forças, concluímos que a soma dos momentos de \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ em relação a O é representada pelo vetor:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.47)$$

O vetor \mathbf{M} é denominado *momento do binário*; é um vetor perpendicular ao plano que contém as duas forças e sua intensidade é

$$M = rF \sin \theta = Fd \quad (3.48)$$

onde d é a distância perpendicular entre as linhas de ação de \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$. O sentido de \mathbf{M} é definido pela regra da mão direita.

Como o vetor \mathbf{r} em (3.47) é independente da escolha da origem O dos eixos de coordenadas, observamos que o mesmo resultado teria sido obtido se os momentos de \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ tivessem sido calculados em relação a um ponto diferente O' . Logo, o momento \mathbf{M} de um binário é um *vetor livre* (Seção 2.3) que pode ser aplicado a qualquer ponto (Fig. 3.32).

Da definição do momento de um binário, conclui-se também que dois binários, um formado das forças \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ e outro, das forças \mathbf{F}_2 e $-\mathbf{F}_2$ (Fig. 3.33), terão momentos iguais se

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

e se os dois binários estiverem em planos paralelos (ou no mesmo plano) e tiverem igual sentido.

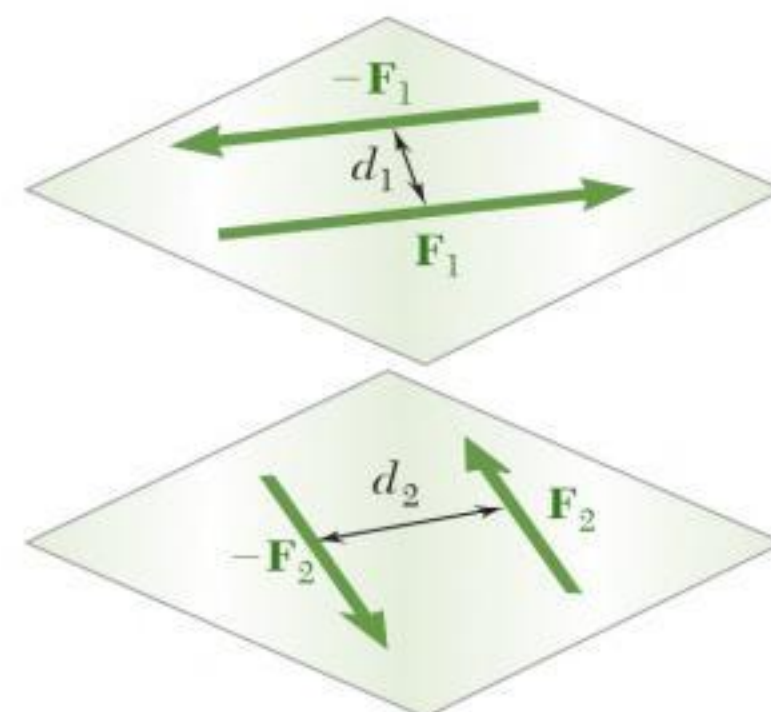


Figura 3.33

3.13 Binários equivalentes

A Fig. 3.34 mostra três binários que atuam sucessivamente sobre a mesma caixa retangular. Como foi visto na seção anterior, o único movimento que um binário pode imprimir a um corpo rígido é uma rotação. Como cada um dos três binários mostrados tem o mesmo momento \mathbf{M} (igual direção, igual sentido e igual intensidade $M = 1.350 \text{ N} \cdot \text{cm}$), podemos esperar que os três binários tenham efeito igual sobre a caixa

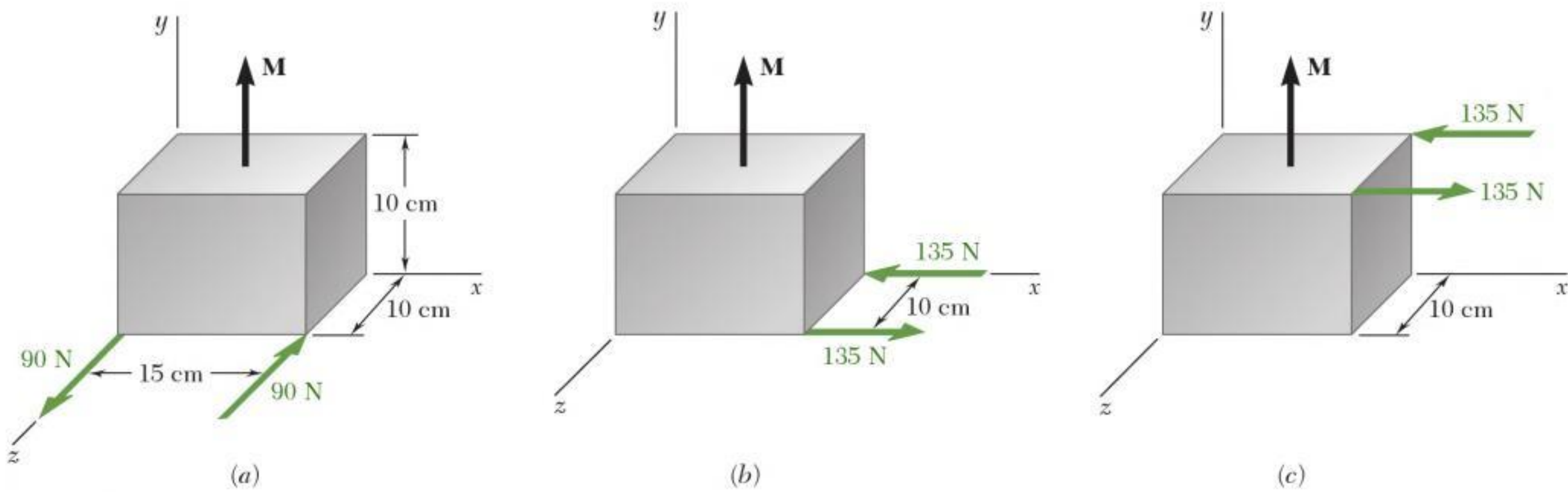


Figura 3.34

Por mais razoável que essa conclusão pareça, não devemos aceitá-la. Embora a intuição seja de grande auxílio no estudo de mecânica, não deve ser aceita como um substituto do raciocínio lógico. Antes de estabelecer que dois sistemas (ou grupos) de forças têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido, devemos demonstrar esse fato com base na evidência experimental apresentada até aqui. Essa evidência consiste na lei do paralelogramo para a adição de duas forças (Seção 2.2) e no princípio da transmissibilidade (Seção 3.3). Portanto, vamos estabelecer que *dois sistemas de forças são equivalentes* (ou seja, têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido) *se pudermos transformar um deles no outro por meio de uma ou várias das seguintes operações*: (1) substituição de duas forças que atuam sobre a mesma partícula pela sua resultante; (2) decomposição de uma força em dois componentes; (3) cancelamento de duas forças iguais e opostas que atuam sobre a mesma partícula; (4) aplicação sobre a mesma partícula de duas forças iguais e opostas; (5) deslocamento de uma força ao longo da sua linha de ação. Cada uma dessas operações é facilmente justificada com base na lei do paralelogramo ou no princípio da transmissibilidade.

Vamos agora demonstrar que *dois binários que têm o mesmo momento \mathbf{M} são equivalentes*. Primeiro, considere dois binários contidos no mesmo plano e suponha que esse plano coincida com o plano da figura (Fig. 3.35). O primeiro binário consiste nas forças \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ de intensidade F_1 , localizadas a uma distância d_1 uma da outra (Fig. 3.35a), e o segundo binário consiste nas forças \mathbf{F}_2 e $-\mathbf{F}_2$ de intensidade F_2 , localizadas a uma distância d_2 uma da outra (Fig. 3.35d). Como os dois binários têm o mesmo momento \mathbf{M} , que é perpendicular ao plano da figura, devem ter o mesmo sentido (considerado aqui como sendo o anti-horário), e a relação

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

deve ser satisfeita. Para comprovar que eles são equivalentes, devemos mostrar que o primeiro binário pode ser transformado no segundo por meio das operações listadas anteriormente.

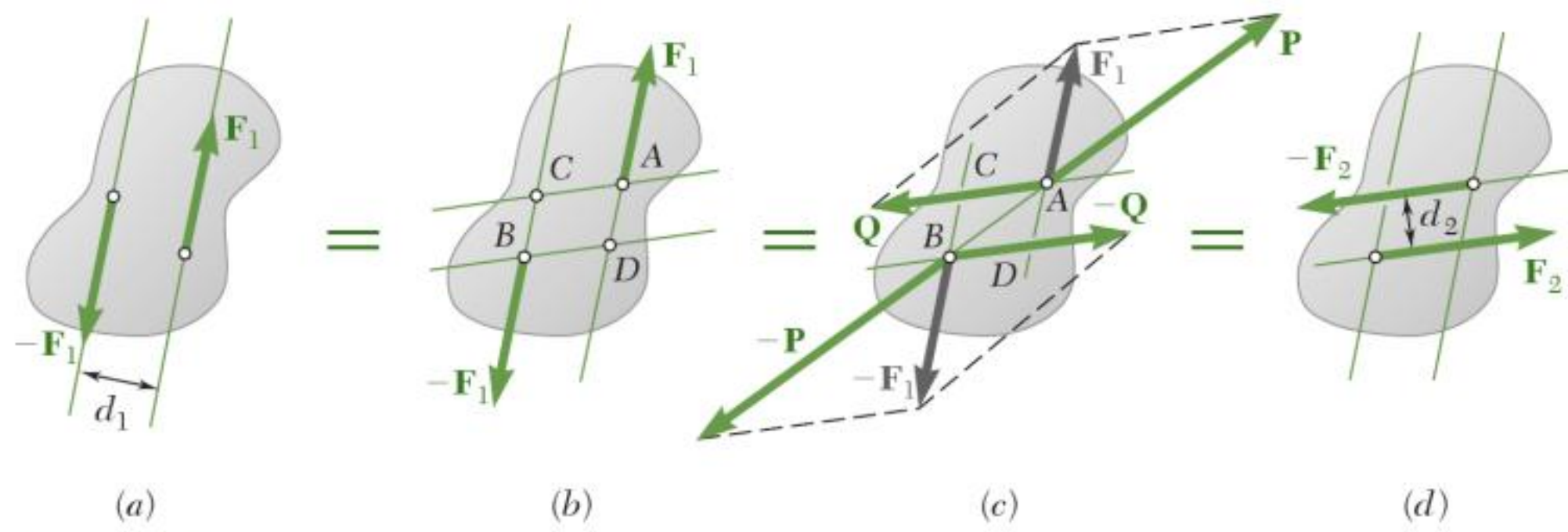


Figura 3.35

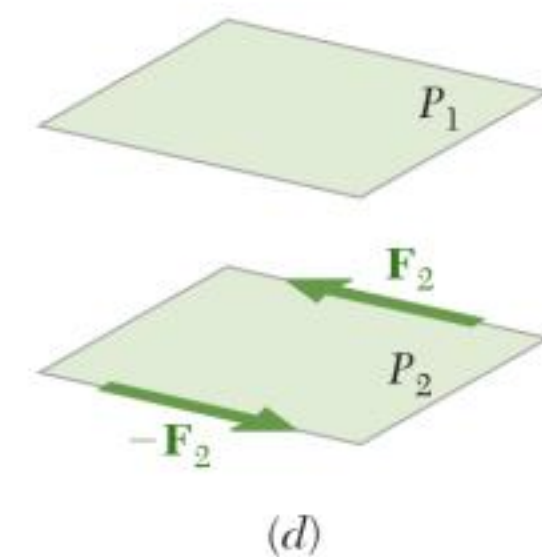
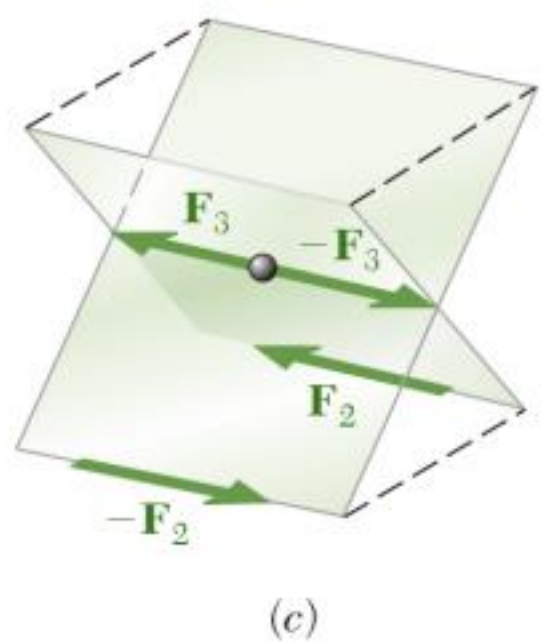
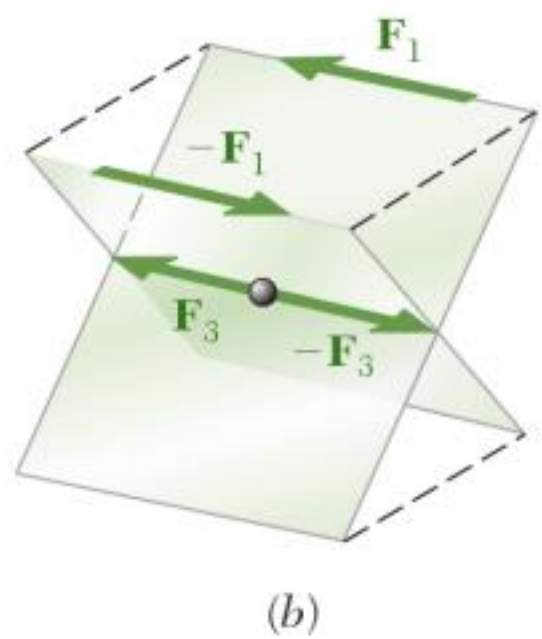
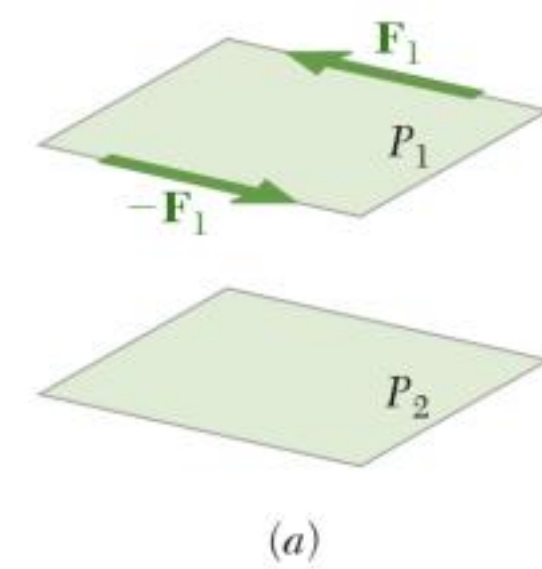


Figura 3.36

Representando por A, B, C, D os pontos de interseção das linhas de ação dos dois binários, primeiro deslizamos as forças \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ até que fiquem aplicadas, respectivamente, nos pontos A e B , como mostra a Fig. 3.35b. Em seguida, a força \mathbf{F}_1 é decomposta em um componente \mathbf{P} ao longo da linha AB e um componente \mathbf{Q} ao longo de AC (Fig. 3.35c); de modo semelhante, a força $-\mathbf{F}_1$ é decomposta em $-\mathbf{P}$ ao longo de AB e $-\mathbf{Q}$ ao longo de BD . As forças \mathbf{P} e $-\mathbf{P}$ têm a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos; podem ser deslocadas ao longo da sua linha de ação comum até ficarem aplicadas no mesmo ponto e, então, podem ser canceladas. Logo, o binário formado por \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ reduz-se ao binário que consiste em \mathbf{Q} e $-\mathbf{Q}$.

Vamos mostrar agora que as forças \mathbf{Q} e $-\mathbf{Q}$ são respectivamente iguais às forças $-\mathbf{F}_2$ e \mathbf{F}_2 . O momento do binário formado por \mathbf{Q} e $-\mathbf{Q}$ pode ser obtido calculando-se o momento de \mathbf{Q} em relação a AB ; de modo semelhante, o momento do binário formado por \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ é o momento de \mathbf{F}_1 em relação a B . Mas, pelo teorema de Varignon, o momento de \mathbf{F}_1 é igual à soma dos momentos de seus componentes \mathbf{P} e \mathbf{Q} . Como o momento de \mathbf{P} em relação a B é nulo, o momento do binário formado por \mathbf{Q} e $-\mathbf{Q}$ deve ser igual ao momento do binário formado por \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$. Retomando (3.49), temos:

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \quad \text{e} \quad Q = F_2$$

Logo, as forças \mathbf{Q} e $-\mathbf{Q}$ são respectivamente iguais às forças $-\mathbf{F}_2$ e \mathbf{F}_2 , e o binário da Fig. 3.35a é equivalente ao binário da Fig. 3.35d.

Considere agora dois binários contidos em planos paralelos P_1 e P_2 . Vamos demonstrar que eles são equivalentes se tiverem o mesmo momento. Em virtude da discussão anterior, podemos admitir que os binários consistem em forças de mesma intensidade F que atuam ao longo de linhas paralelas (Fig. 3.36a e d). Propomos mostrar que o binário contido no plano P_1 pode ser transformado no binário contido no plano P_2 por meio das operações padrões listadas anteriormente.

Vamos considerar os dois planos definidos respectivamente pelas linhas de ação de \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_2$ e pelas linhas de ação de $-\mathbf{F}_1$ e \mathbf{F}_2 (Fig. 3.36b). Em um ponto na sua linha de interseção, aplicamos duas forças \mathbf{F}_3 e $-\mathbf{F}_3$, respectivamente iguais a \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$. O binário formado por \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_3$ pode ser substituído por um binário que consiste em \mathbf{F}_3 e $-\mathbf{F}_2$ (Fig. 3.36c), pois é claro que ambos os binários têm o mesmo momento e estão contidos no mesmo plano. De modo semelhante, o binário formado por $-\mathbf{F}_1$ e \mathbf{F}_3 pode ser substituído por um binário que consiste em $-\mathbf{F}_3$ e \mathbf{F}_2 . Cancelando as duas forças iguais e opostas \mathbf{F}_3 e $-\mathbf{F}_3$, obtemos o binário dese-

do no plano P_2 (Fig. 3.36d). Logo, concluímos que dois binários que têm o mesmo momento \mathbf{M} são equivalentes, se estiverem contidos no mesmo plano ou em planos paralelos.

A propriedade que acabamos de estabelecer é muito importante para a correta compreensão da mecânica dos corpos rígidos. Ela indica que, quando um binário atua sobre um corpo rígido, não importa onde as duas forças que formam o binário atuam ou qual a intensidade e a direção que elas têm. A única coisa que importa é o *momento* do binário (intensidade, direção e sentido). Binários com o mesmo momento terão o mesmo efeito sobre o corpo rígido.

3.14 Adição de binários

Considere dois planos que se interceptam P_1 e P_2 e dois binários que atuam respectivamente em P_1 e P_2 . Sem perda do caráter genérico, podemos admitir que o binário em P_1 consiste em duas forças \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares à linha de interseção dos dois planos e atuando respectivamente em A e B (Fig. 3.37a). Analogamente, admitimos que o binário em P_2 consiste em duas forças \mathbf{F}_2 e $-\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB e que atuam respectivamente em A e B . É claro que a resultante \mathbf{R} de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 e a resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_2$ formam um binário. Representando por \mathbf{r} o vetor que liga B a A e lembrando-se da definição do momento de um binário (Seção 3.12), expressamos o momento \mathbf{M} do binário resultante da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

e, pelo teorema de Varignon,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Mas o primeiro termo da expressão obtida representa o momento \mathbf{M}_1 do binário em P_1 e o segundo termo, o momento \mathbf{M}_2 do binário em P_2 . Temos

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (3.50)$$

e concluímos que a soma de dois binários de momentos \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 é um binário de momento \mathbf{M} igual à soma vetorial de \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 (Fig. 3.37b).

3.15 Binários podem ser representados por vetores

Como vimos na Seção 3.13, binários que têm o mesmo momento, atuando no mesmo plano ou em planos paralelos, são equivalentes. Logo, não há necessidade de desenharmos as forças reais que formam um dado binário a fim de definir seu efeito sobre um corpo rígido (Fig. 3.38a). Basta desenhar uma seta igual em intensidade, direção e sentido ao momento \mathbf{M} do binário (Fig. 3.38b). Por outro lado, vimos na Seção 3.14 que a soma de dois binários é também um binário e que o momento \mathbf{M} do binário resultante pode ser obtido efetuando-se a soma vetorial dos momentos \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 dos binários dados. Logo, binários obedecem à lei de adição de vetores, e a seta usada na Fig. 3.38b para representar o binário definido na Fig. 3.38a pode realmente ser considerada um vetor.

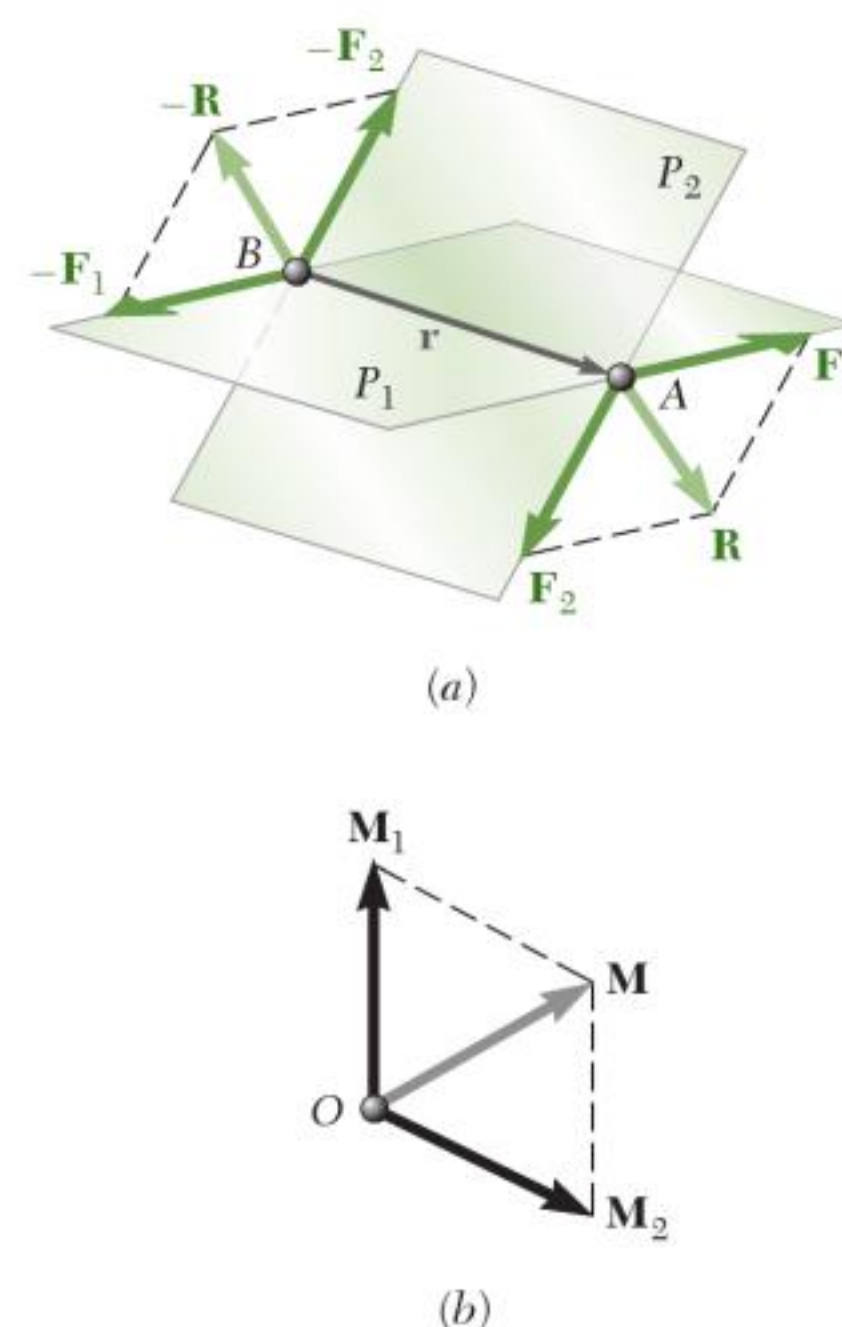


Figura 3.37

O vetor que representa um binário é denominado *vetor binário*. Observe que, na Fig. 3.38, para evitar confusão com vetores que representem forças e criar distinção entre *vetor binário* e *momento do binário*, foi acrescentado o símbolo \curvearrowright à seta do vetor binário. O *momento do binário* foi representado apenas por uma seta cheia (sem o símbolo \curvearrowright^*) em figuras anteriores. Um vetor binário, assim como o momento de um binário, é um vetor livre. Seu ponto da aplicação, portanto, pode ser escolhido na origem do sistema de coordenadas (Fig. 3.38c). Além disso, o vetor binário \mathbf{M} pode ser decomposto nos vetores componentes \mathbf{M}_x , \mathbf{M}_y e \mathbf{M}_z , que são dirigidos ao longo dos eixos coordenados (Fig. 3.38d). Esses vetores componentes representam binários que atuam, respectivamente, nos planos yz , zx e xy .

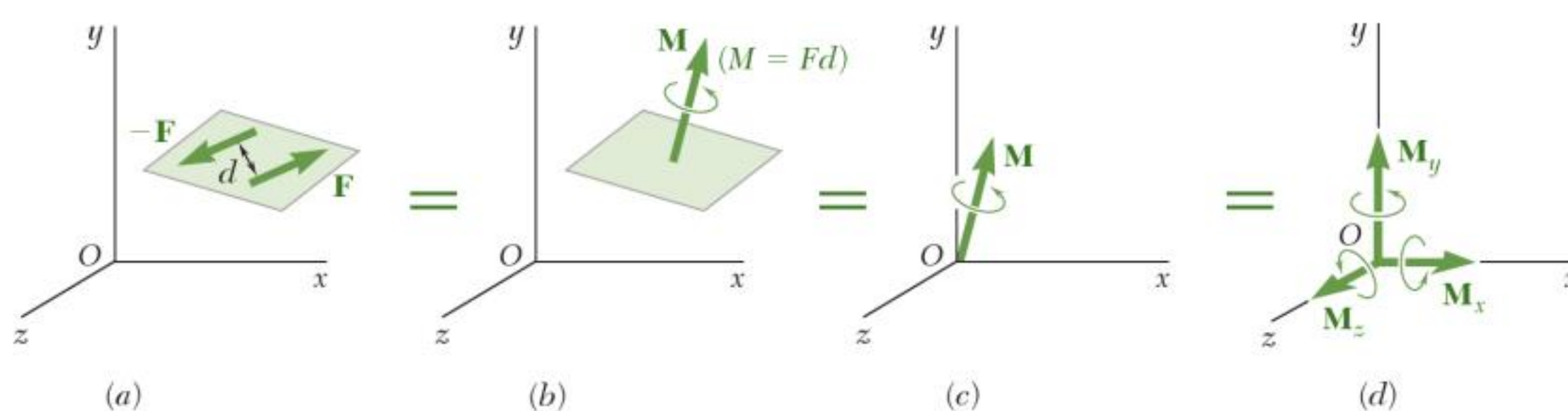


Figura 3.38

3.16 Substituição de uma dada força por uma força em O e um binário

Considere uma força \mathbf{F} que atue sobre um corpo rígido em um ponto A definido pelo vetor posição \mathbf{r} (Fig. 3.39a). Suponha que, por alguma razão, queiramos ter a força atuando no ponto O. Podemos mover \mathbf{F} ao longo da sua linha de ação (princípio de transmissibilidade), mas não para um ponto O que não esteja sobre a linha de ação original sem modificar a ação de \mathbf{F} sobre o corpo rígido.

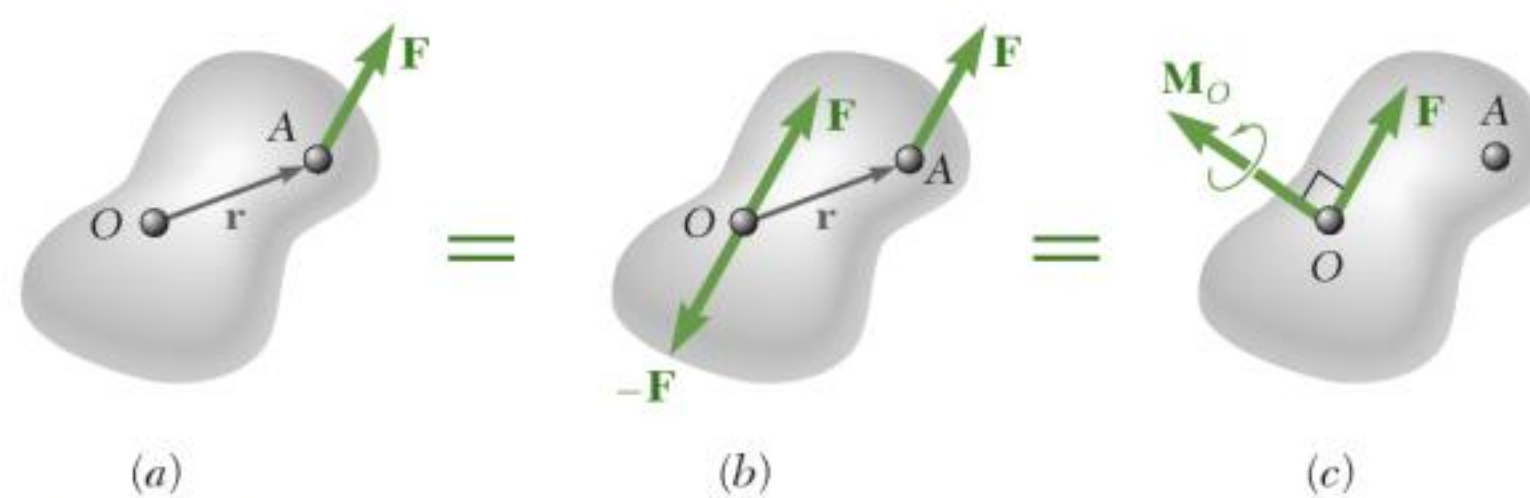


Figura 3.39

Podemos, no entanto, aplicar duas forças no ponto O, uma igual a \mathbf{F} e a outra igual a $-\mathbf{F}$, sem modificar a ação da força original sobre o corpo rígido (Fig. 3.39b). Como resultado dessa transformação, uma força \mathbf{F} está agora aplicada em O; as outras duas forças formam um binário de

* Os autores citam as palavras setas vermelhas e setas verdes que não foram mantidas no texto traduzido, desde a edição anterior, sem prejuízo do entendimento do texto.

momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Logo, *qualquer força \mathbf{F} que atue sobre um corpo rígido pode ser movida para um ponto arbitrário O , desde que se adicione um binário cujo momento é igual ao momento de \mathbf{F} em relação a O* . O binário tende a imprimir ao corpo rígido o mesmo movimento rotacional em O , que a força \mathbf{F} tendia a produzir antes de ser transferida para O . O binário é representado por um vetor binário \mathbf{M}_O perpendicular ao plano que contém \mathbf{r} e \mathbf{F} . Por ser um vetor livre, \mathbf{M}_O pode ser aplicado em qualquer lugar; por conveniência, no entanto, o vetor binário é geralmente ligado a O , juntamente com \mathbf{F} , e a combinação obtida é conhecida como *sistema força-binário* (3.39c).

Se a força \mathbf{F} tivesse sido movida de A para um ponto diferente O' (Fig. 3.40a e c), o momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de \mathbf{F} em relação a O' deveria ter sido calculado e um novo sistema força-binário, consistindo em \mathbf{F} e no vetor binário $\mathbf{M}_{O'}$, teria sido aplicado a O' . A relação existente entre os momentos de \mathbf{F} em relação a O e O' é obtida da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \quad (3.51)$$

onde \mathbf{s} é o vetor que liga O' a O . Logo, o momento $\mathbf{M}_{O'}$ de \mathbf{F} em relação a O' é obtido adicionando-se ao momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} em relação a O o produto vetorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$, que representa o momento em relação a O' da força \mathbf{F} aplicada em O .

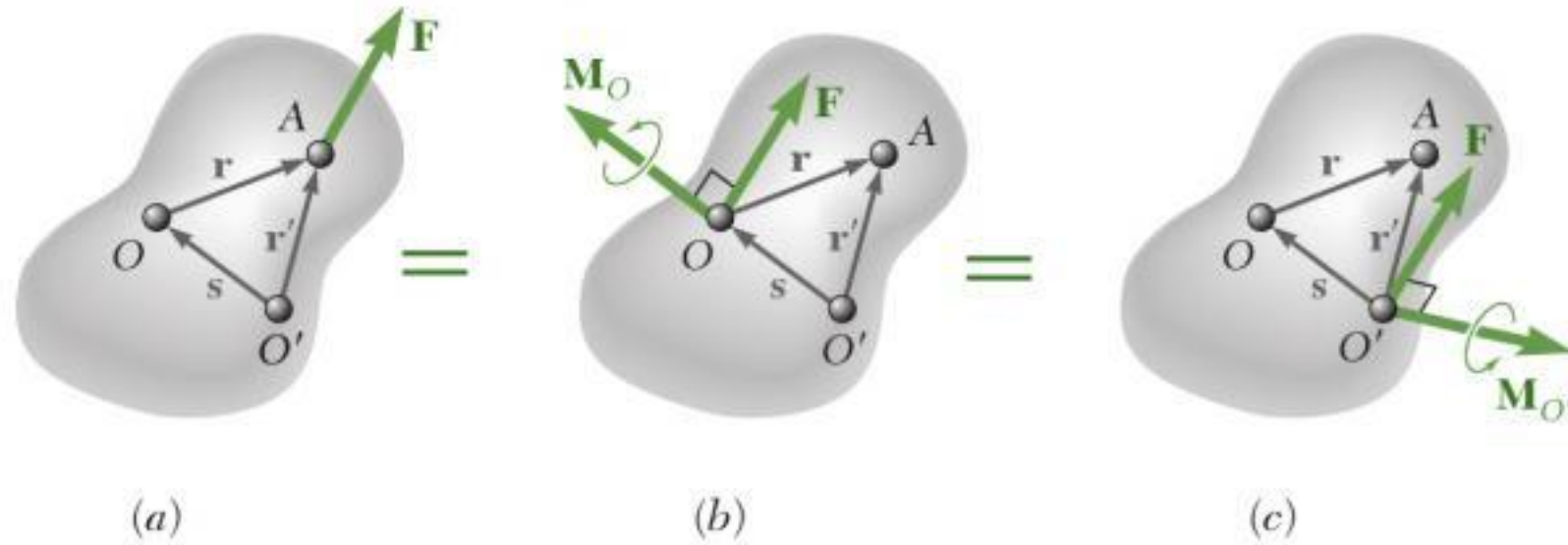


Figura 3.40

Também se poderia ter estabelecido esse resultado observando-se que, a fim de transferir para O' o sistema força-binário ligado a O (Fig. 3.40b e c), se pode mover livremente o vetor binário \mathbf{M}_O para O' ; todavia, para mover a força \mathbf{F} de O para O' , é necessário adicionar a \mathbf{F} um vetor binário cujo momento é igual ao momento em relação a O' da força \mathbf{F} aplicada em O . Logo, o vetor binário $\mathbf{M}_{O'}$ deve ser a soma de \mathbf{M}_O ao vetor $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

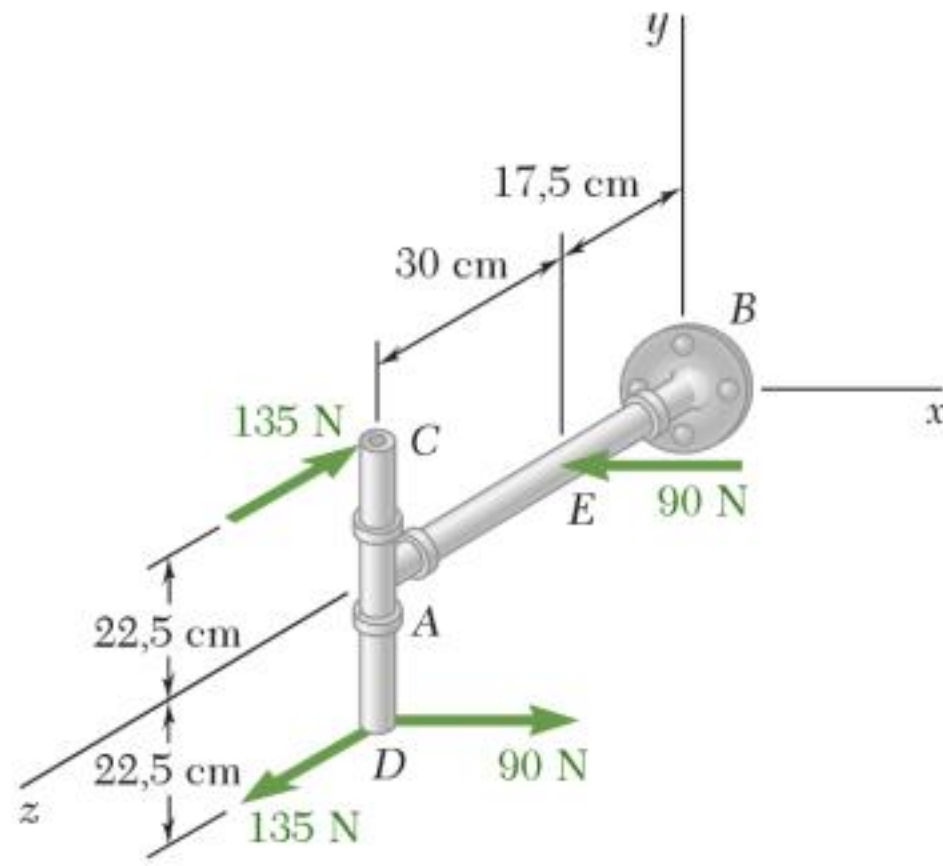
Como observamos anteriormente, o sistema força-binário obtido pela transferência de uma força \mathbf{F} de um ponto A para um ponto O consiste em \mathbf{F} e em um vetor binário \mathbf{M}_O perpendicular a \mathbf{F} . De modo inverso, qualquer sistema força-binário que consista em uma força \mathbf{F} e um vetor binário \mathbf{M}_O , que sejam *perpendiculares* pode ser substituído por uma única força equivalente. Isso é feito movendo-se a força \mathbf{F} no plano perpendicular a \mathbf{M}_O até que seu momento em relação a O fique igual ao momento do binário a ser eliminado.



Foto 3.2 A força exercida por cada uma das mãos sobre a chave poderia ser substituída por um sistema força-binário equivalente que atua sobre a porca.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.6

Determine os componentes do binário único equivalente aos dois binários mostrados.



SOLUÇÃO

Nossos cálculos serão simplificados se ligarmos ao ponto A duas forças de 90 N iguais e opostas. Isso nos possibilitará substituir o binário original de força 90 N por dois novos binários de força de 90 N, um deles no plano zx e o outro em plano paralelo ao xy . Os três binários mostrados no esquema ao lado podem ser representados por três vetores binários M_x , M_y e M_z , direcionados ao longo dos eixos de coordenadas. Os momentos correspondentes são:

$$M_x = -(135 \text{ N})(0,45 \text{ m}) = -60,75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = +(90 \text{ N})(0,30 \text{ m}) = +27 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = +(90 \text{ N})(0,225 \text{ m}) = +20,25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Esses três momentos representam os componentes do binário \mathbf{M} equivalentes aos dois binários dados:

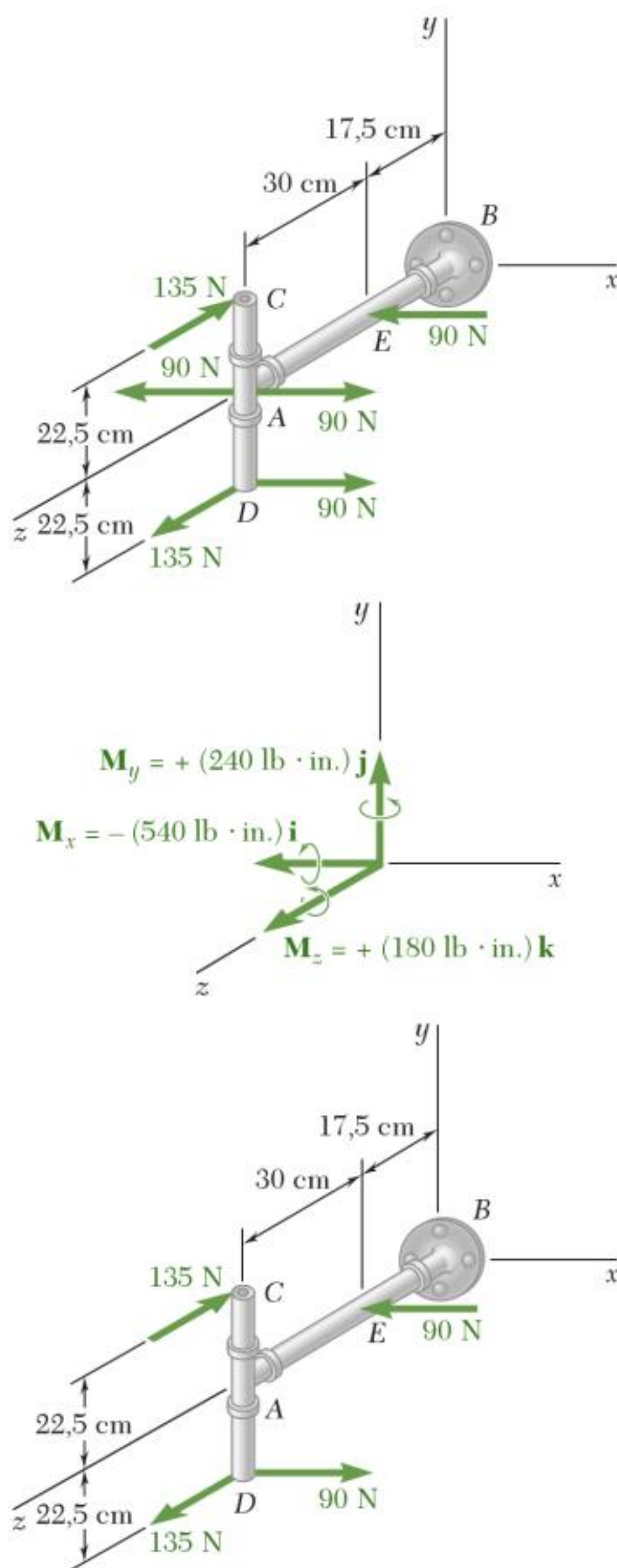
$$\mathbf{M} = -(60,75 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (27 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (20,25 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

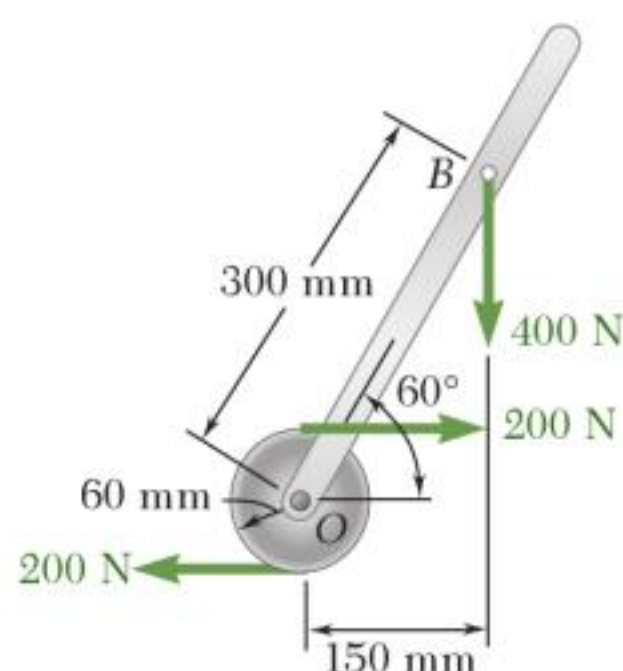
Solução alternativa. Os componentes do binário único \mathbf{M} equivalente podem também ser obtidos calculando-se a soma dos momentos das quatro forças dadas em relação a um ponto arbitrário. Escolhendo o ponto D,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (0,45 \text{ m})\mathbf{j} \times (-135 \text{ N})\mathbf{k} + [(0,225 \text{ m})\mathbf{j} - (0,30 \text{ m})\mathbf{k}] \times (-90 \text{ N})\mathbf{i}$$

e após calcular os vários produtos vetoriais,

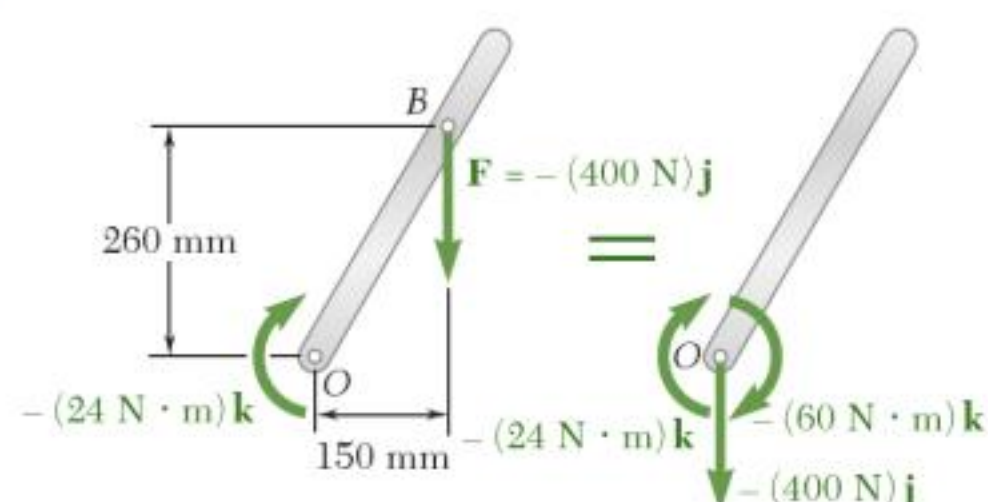
$$\mathbf{M} = -(60,75 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (27 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (20,25 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESOLVIDO 3.7

Substitua o binário e a força mostrados na figura por uma força única equivalente aplicada à alavanca. Determine a distância do eixo ao ponto de aplicação dessa força equivalente.



SOLUÇÃO

Primeiro, a força dada e o binário são substituídos por um sistema força-binário equivalente no ponto O . Movemos a força $\mathbf{F} = -(400 \text{ N})\mathbf{j}$ para O e, ao mesmo tempo, adicionamos um binário de momento \mathbf{M}_O igual ao momento em relação a O da força em sua posição original.

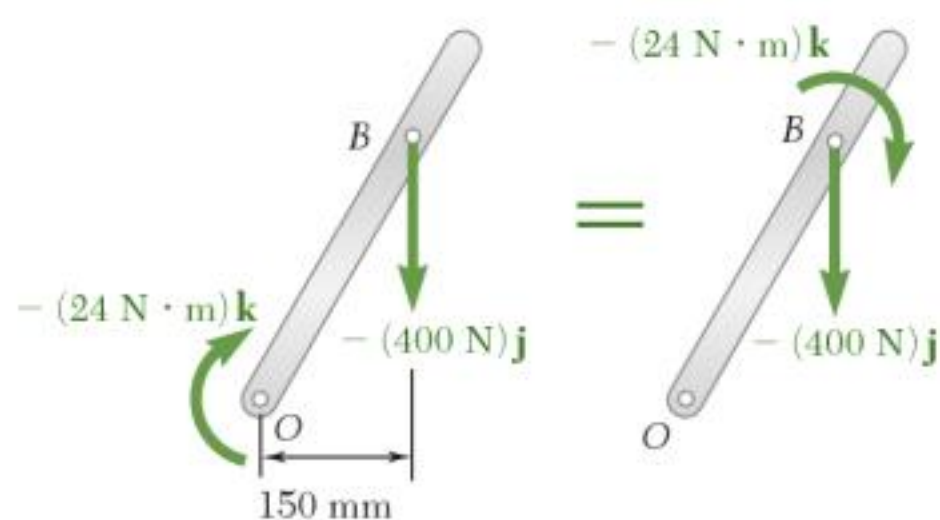
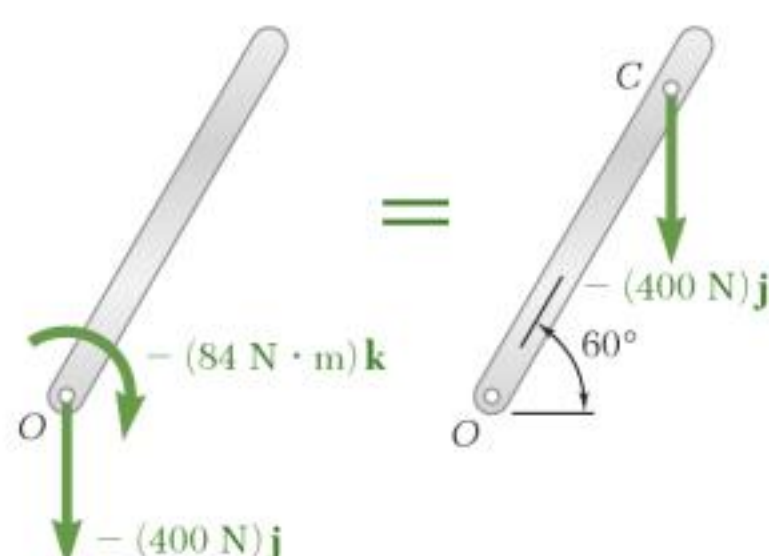
$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} = [(0,150 \text{ m})\mathbf{i} + (0,260 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} = -(60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

Esse binário é adicionado ao binário de momento $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ formado pelas duas forças de 200 N, obtendo-se um binário de momento $-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Esse último binário pode ser eliminado aplicando-se \mathbf{F} a um ponto C , escolhido de modo que

$$\begin{aligned} -(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F} \\ &= [(OC) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (OC) \sin 60^\circ \mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ &= -(OC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$

Concluimos que

$$(OC) \cos 60^\circ = 0,210 \text{ m} = 210 \text{ mm} \quad OC = 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

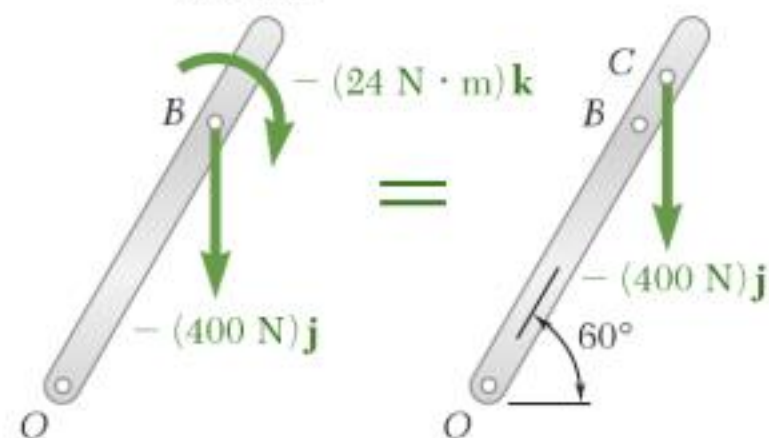


Solução alternativa. Como o efeito de um binário não depende da sua localização, o binário de momento $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ pode ser movido para B ; obtemos então um sistema força-binário em B . O binário pode agora ser eliminado aplicando-se \mathbf{F} a um ponto C escolhido de modo que

$$\begin{aligned} -(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F} \\ &= -(BC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} (BC) \cos 60^\circ &= 0,060 \text{ m} = 60 \text{ mm} & BC &= 120 \text{ mm} \\ OC &= OB + BC = 300 \text{ mm} + 120 \text{ mm} & OC &= 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, discutimos as propriedades dos *binários*. Para resolver os próximos problemas, você deverá lembrar que o efeito líquido de um binário é produzir um momento \mathbf{M} . Como esse momento é independente do ponto em relação ao qual ele é calculado, \mathbf{M} é um *vetor livre* e, portanto, permanece inalterado ao ser movido de um ponto para outro. Além disso, dois binários são *equivalentes* (ou seja, têm o mesmo efeito sobre um dado corpo rígido) se produzirem o mesmo momento.

Ao se determinar o momento de um binário, todas as técnicas anteriores para cálculo de momentos se aplicam. Além disso, como o momento de um binário é um vetor livre, ele deve ser calculado em relação ao ponto mais conveniente.

Como o único efeito de um binário é produzir um momento, é possível representar um binário por um vetor, o *vetor binário*, que é igual ao momento do binário. O vetor binário é um vetor livre e será representado por um símbolo especial, \mathbf{M} , para distingui-lo de vetores de força.

Ao resolver os problemas desta seção, seremos levados a efetuar as seguintes operações:

- 1. Adição de dois ou mais binários.** Isso resulta em um novo binário, cujo momento é obtido pela adição vetorial dos momentos dos binários dados [Problema Resolvido 3.6].
- 2. Substituição de uma força por um sistema força-binário equivalente em um ponto especificado.** Conforme explicamos na Seção 3.16, a força do sistema força-binário é igual à força original, ao passo que o vetor binário necessário é igual ao momento da força original em relação ao ponto dado. Além disso, é importante observar que a força e o vetor binário são perpendiculares entre si. De modo inverso, segue-se que um sistema força-binário poderá ser reduzido a uma única força somente se a força e o vetor binário forem perpendiculares (veja o próximo parágrafo).
- 3. Substituição de um sistema força-binário (com \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{M}) por uma força única equivalente.** Observe que o requisito de que \mathbf{F} e \mathbf{M} sejam mutuamente perpendiculares será satisfeito em todos os problemas bidimensionais. A força única equivalente é igual a \mathbf{F} e é aplicada de tal modo que seu momento em relação ao ponto original de aplicação seja igual a \mathbf{M} [Problema Resolvido 3.7].

PROBLEMAS

- 3.70** Duas forças paralelas de 60 N são aplicadas a uma alavanca como mostrado na figura. Determine o momento do binário formado pelas duas forças (*a*) resolvendo para cada componente horizontal e vertical e adicionando os momentos dos dois binários resultantes, (*b*) usando a distância perpendicular entre as duas forças, (*c*) somando os momentos das duas forças em relação ao ponto A.

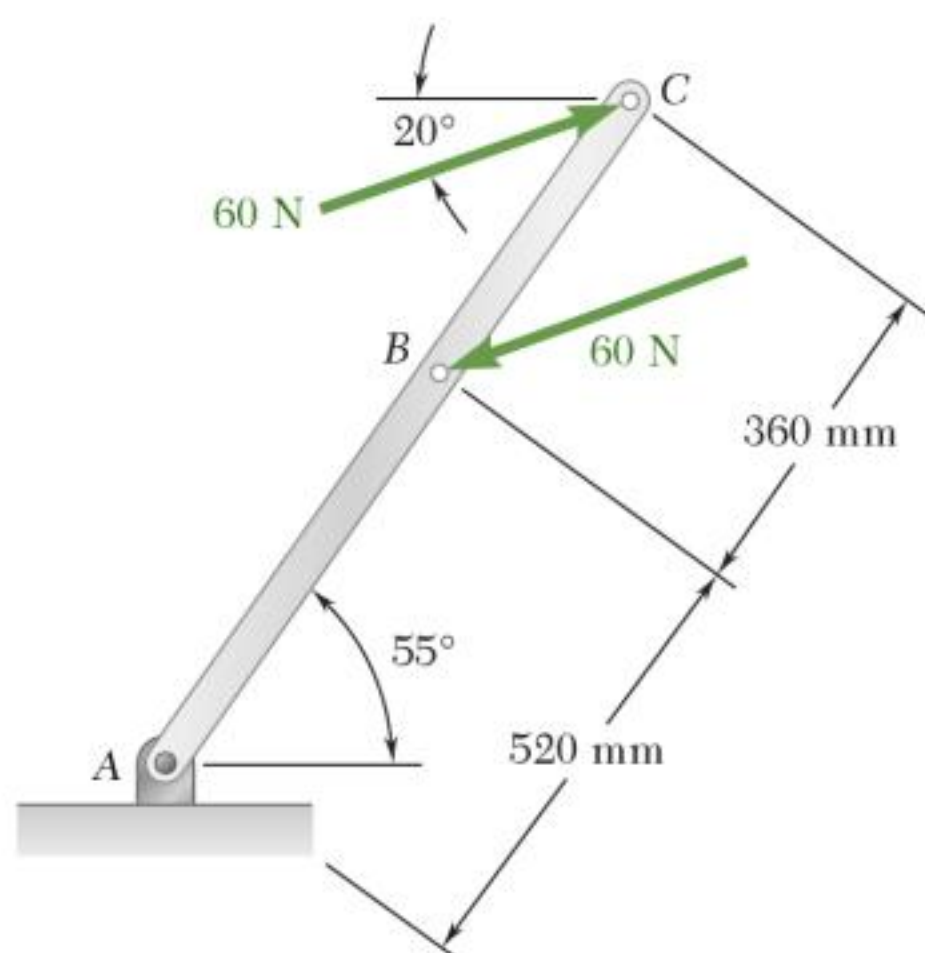


Figura P3.70

- 3.71** Uma placa em forma de paralelogramo sofre a ação de dois binários. Determine (*a*) o momento do binário formado pelas duas forças de 93 N, (*b*) a distância perpendicular entre as forças de 53 N se a resultante dos dois binários for nula, (*c*) o valor de α se o binário resultante for de $8,1 \text{ N} \cdot \text{m}$, no sentido horário, e se d for 1,06 m.
- 3.72** Um binário M de intensidade $18 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado no cabo de uma chave de fenda para apertar um parafuso em um bloco de madeira. Determine as intensidades das duas menores forças horizontais que são equivalentes a M se estas forem aplicadas (*a*) nos cantos A e D, (*b*) nos cantos B e C, (*c*) em qualquer lugar do bloco.

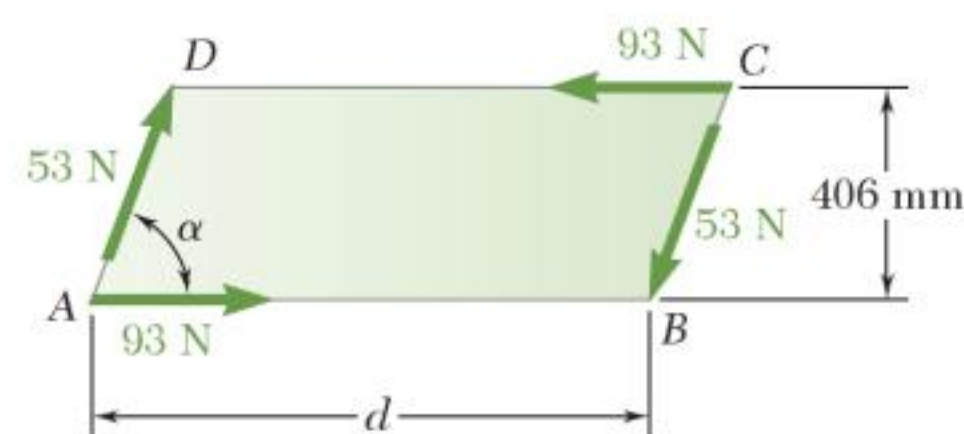


Figura P3.71

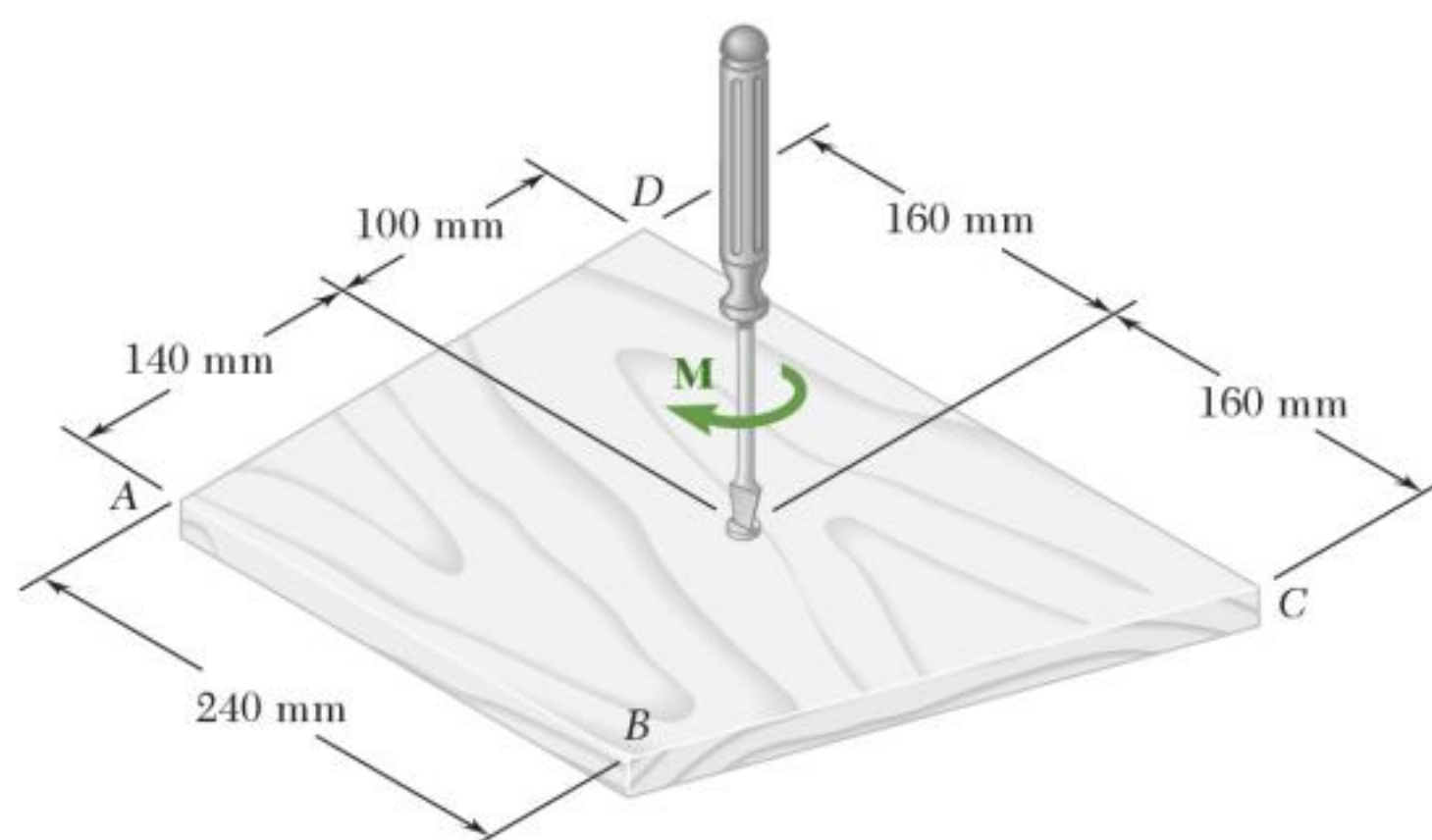


Figura P3.72



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 3.79** Se que $P = 20 \text{ N}$, substitua os dois binários restantes por um binário único equivalente, especificando sua intensidade e a direção do seu eixo.
- 3.80** Os eixos A e B são ligados à caixa de engrenagem do conjunto de rodas de um trator, e o eixo C se liga ao motor. Os eixos A e B estão no plano vertical yz , enquanto o eixo C está posicionado ao longo do eixo x . Substitua os binários aplicados aos eixos pelo binário equivalente, especificando sua intensidade e a direção de seu eixo.
- 3.81** A tração no cabo preso à extremidade C de uma lança ajustável ABC é 2.490 N . Substitua a força exercida pelo cabo em C por um sistema força-binário equivalente (a) em A e (b) em B .

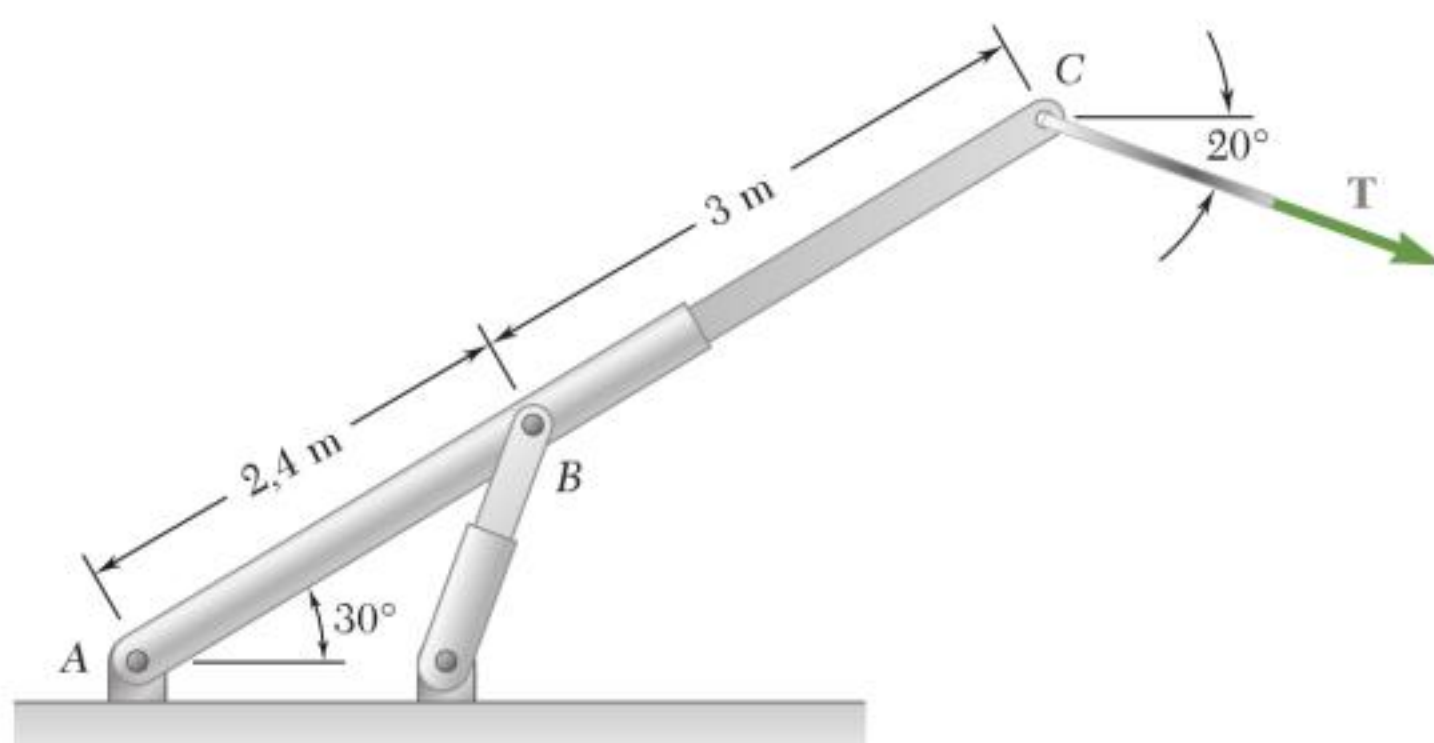


Figura P3.81

- 3.82** Uma força \mathbf{P} de 700 N é aplicada no ponto A de um elemento estrutural. Substitua \mathbf{P} por (a) um sistema força-binário equivalente em C , e (b) um sistema equivalente que consista em uma força vertical em B e uma segunda força em D .
- 3.83** Uma força horizontal \mathbf{P} de 80 N atua sobre uma alavanca em ângulo como mostrado na figura. (a) Substitua \mathbf{P} por um sistema força-binário equivalente em B , (b) Encontre as duas forças verticais em C e D que sejam equivalentes ao binário encontrado na parte a .

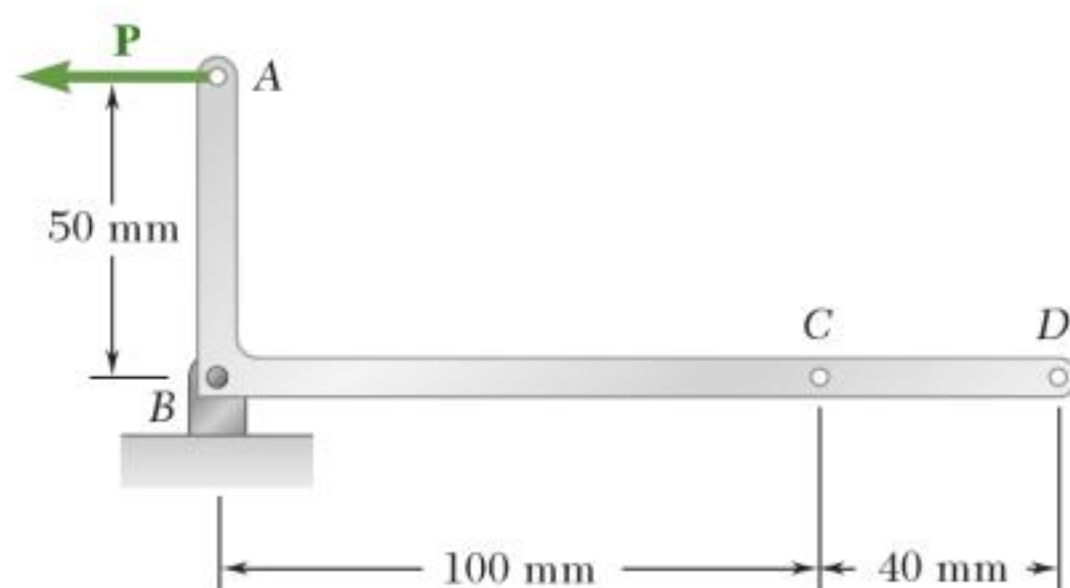


Figura P3.83

- 3.84** Um dirigível é preso ao solo por um cabo amarrado à sua cabine em B . Se a tração no cabo é 1.040 N , substitua a força exercida pelo cabo em B por um sistema equivalente formado por duas forças paralelas aplicadas em A e C .

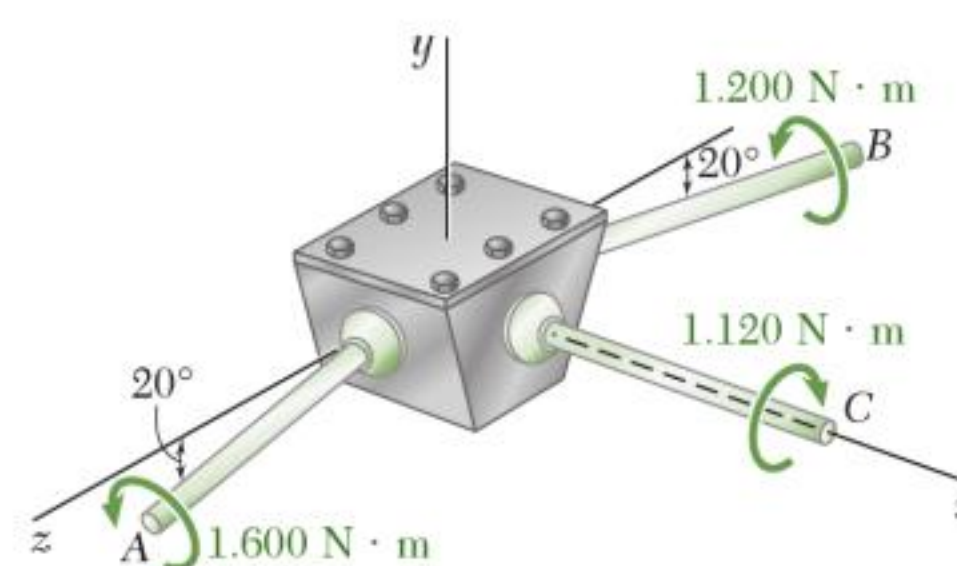


Figura P3.80

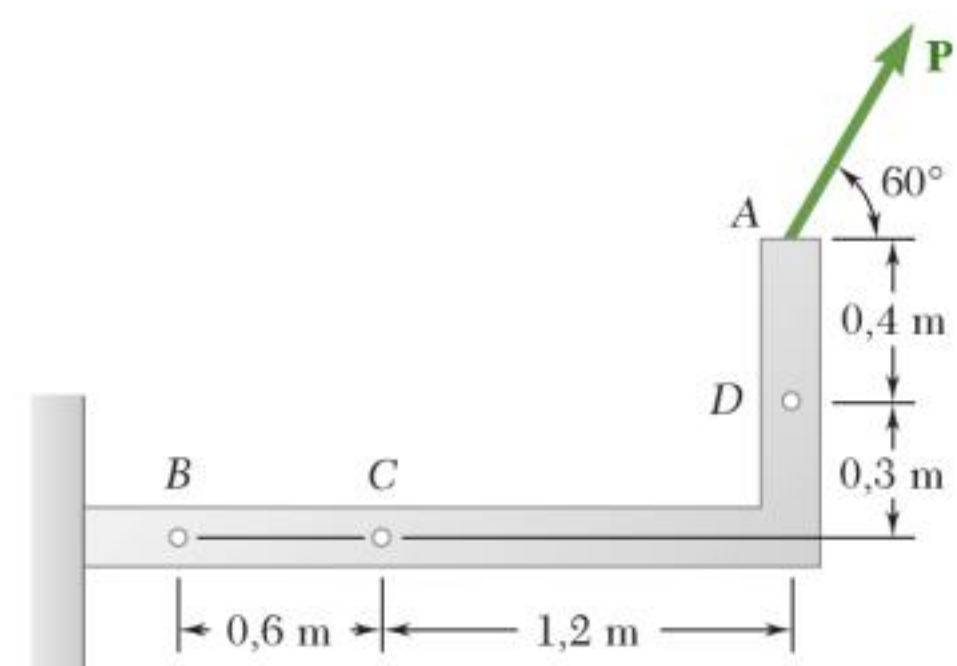


Figura P3.82

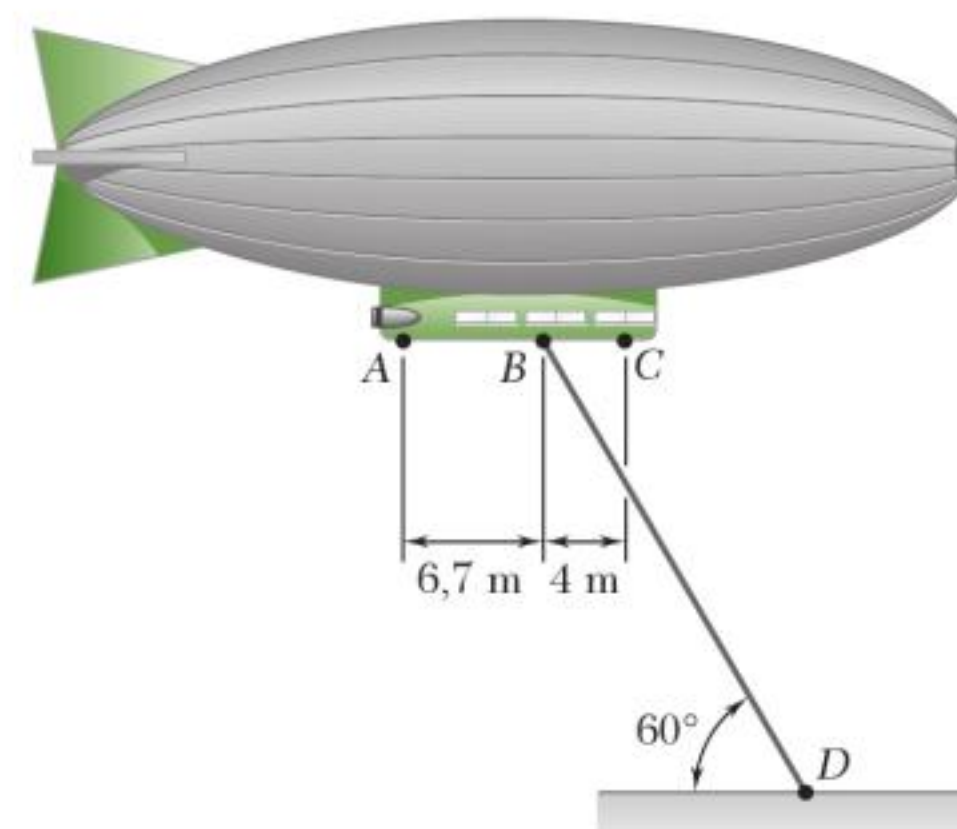


Figura P3.84

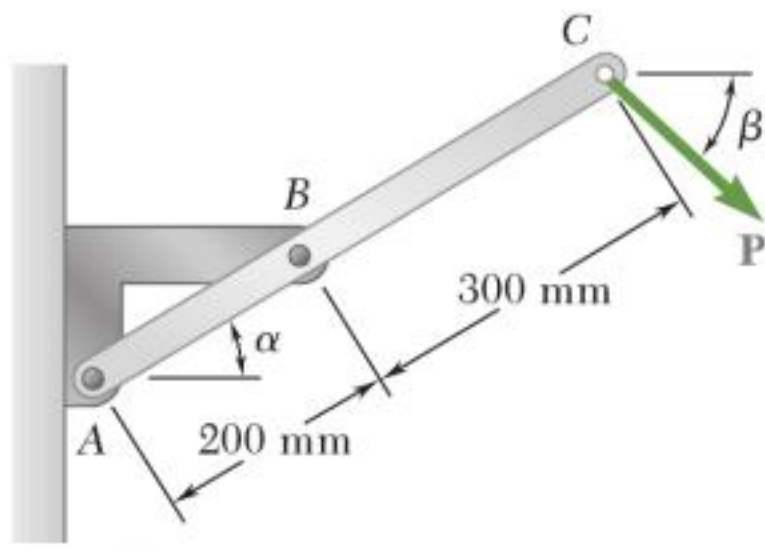


Figura P3.85

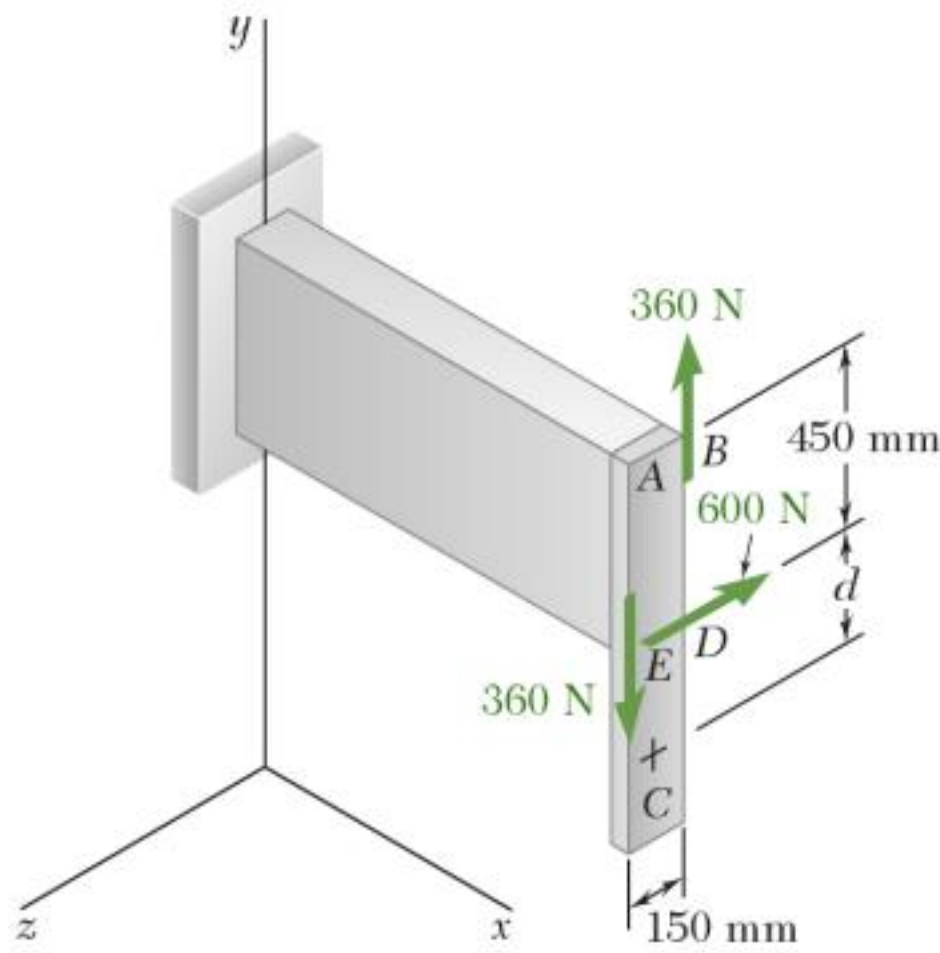


Figura P3.87

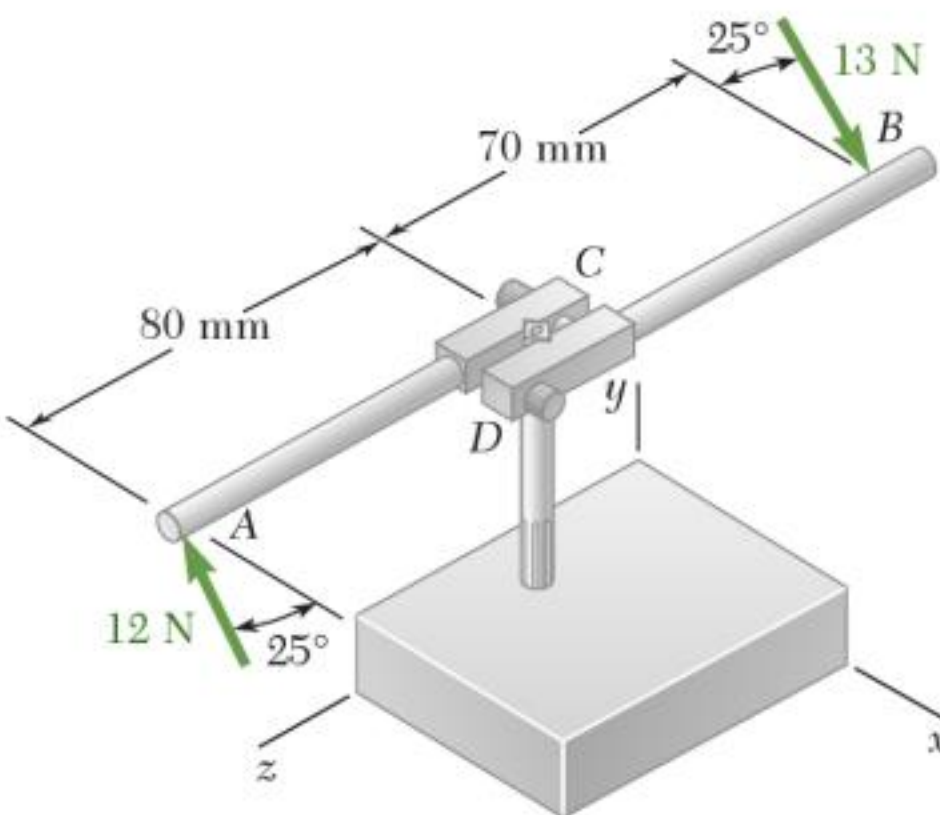


Figura P3.89

3.85 A força \mathbf{P} tem a intensidade de 250 N e é aplicada na extremidade C de uma barra AC de 500 mm, fixada em um suporte em A e B . Considerando $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$, substitua \mathbf{P} por (a) um sistema força - binário equivalente em B , (b) uma sistema força - binário equivalente formado por duas forças paralelas aplicadas em A e B .

3.86 Resolva o Problema 3.85, considerando $\alpha = \beta = 25^\circ$.

3.87 Uma força e um binário são aplicados na extremidade de uma viga em balanço. (a) Substitua esse sistema por uma única força \mathbf{F} aplicada no ponto C e determine a distância d de C até a linha traçada pelos pontos D e E . (b) Resolva a parte a se as direções das duas forças de 360 N forem invertidas.

3.88 As forças de cisalhamento atuantes na seção transversal do perfil de aço podem ser representadas por uma força vertical de 900 N e duas forças horizontais de 250 N como mostrado na figura. Substitua essas forças e o binário por uma única força \mathbf{F} aplicada em C e determine a distância x de C até a linha BD . (O ponto C é definido como *centro de cisalhamento* da seção.)

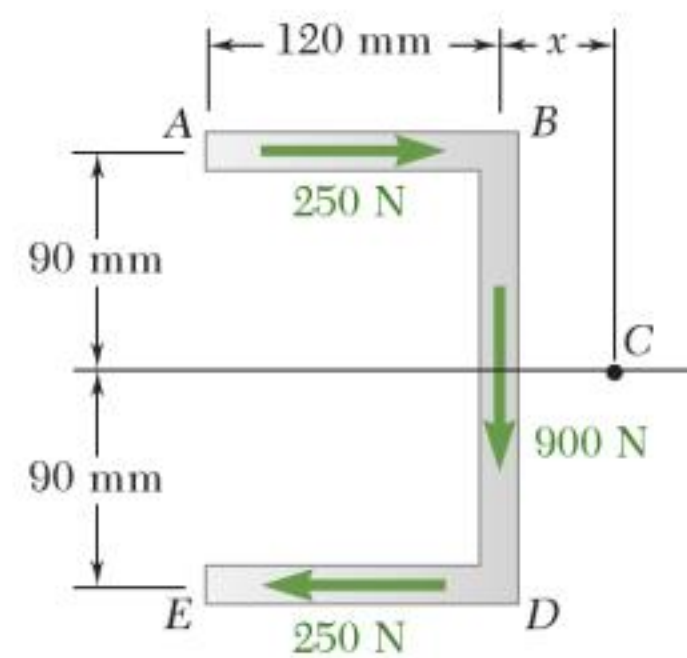


Figura P3.88

3.89 Ao abrir uma rosca em um furo, um mecânico aplica as forças horizontais mostradas sobre a alavanca de uma tarraxa. Mostre que essas forças são equivalentes a uma força única e especifique, se possível, o ponto de aplicação da força única sobre a alavanca.

3.90 Três barras de controle são fixadas a uma alavanca ABC e exercem forças sobre ela como mostrado na figura. (a) Substitua as três forças por um sistema força-binário em B . (b) Determine uma única força que equivale ao sistema força-binário obtido na parte a e especifique seu ponto de aplicação na alavanca.

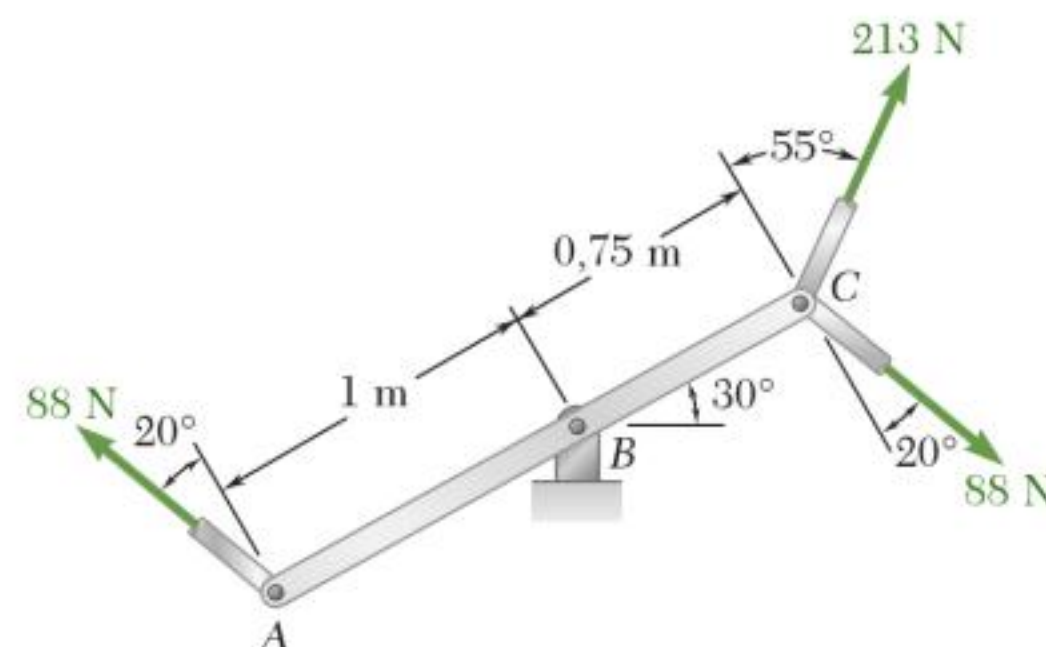


Figura P3.90

- 3.91** Uma placa hexagonal sofre a ação da força \mathbf{P} e do binário mostrados na figura. Determine a intensidade e a direção da menor força \mathbf{P} para a qual o sistema pode ser substituído por uma força única em E .
- 3.92** Uma placa retangular sofre a ação da força e do binário mostrados na figura. Esse sistema deve ser substituído por uma força única equivalente. (a) Para $\alpha = 40^\circ$, especifique a intensidade e a linha de ação da força equivalente. (b) Especifique o valor de α sabendo que a linha de ação da força equivalente intercepta a linha CD 300 mm à direita de D .

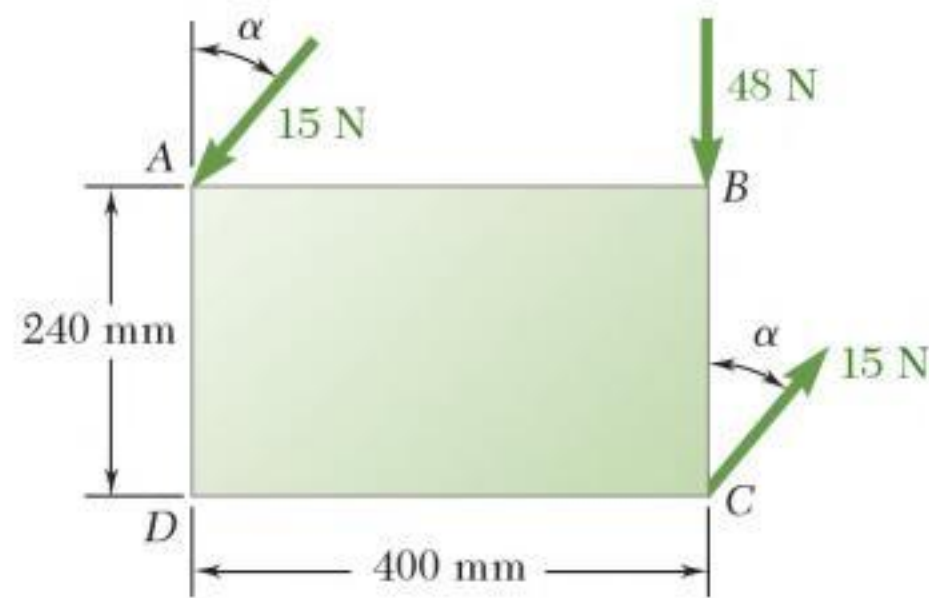


Figura P3.92

- 3.93** Uma força \mathbf{P} de compressão excêntrica de 1.220 N é aplicada na extremidade da viga em balanço. Substitua \mathbf{P} por um sistema força-binário equivalente em G .
- 3.94** Para manter uma porta fechada, é colocada uma ripa entre o piso e a maçaneta. A ripa exerce em B uma força de 175 N dirigida ao longo de AB . Substitua essa força por um sistema força-binário equivalente em C .

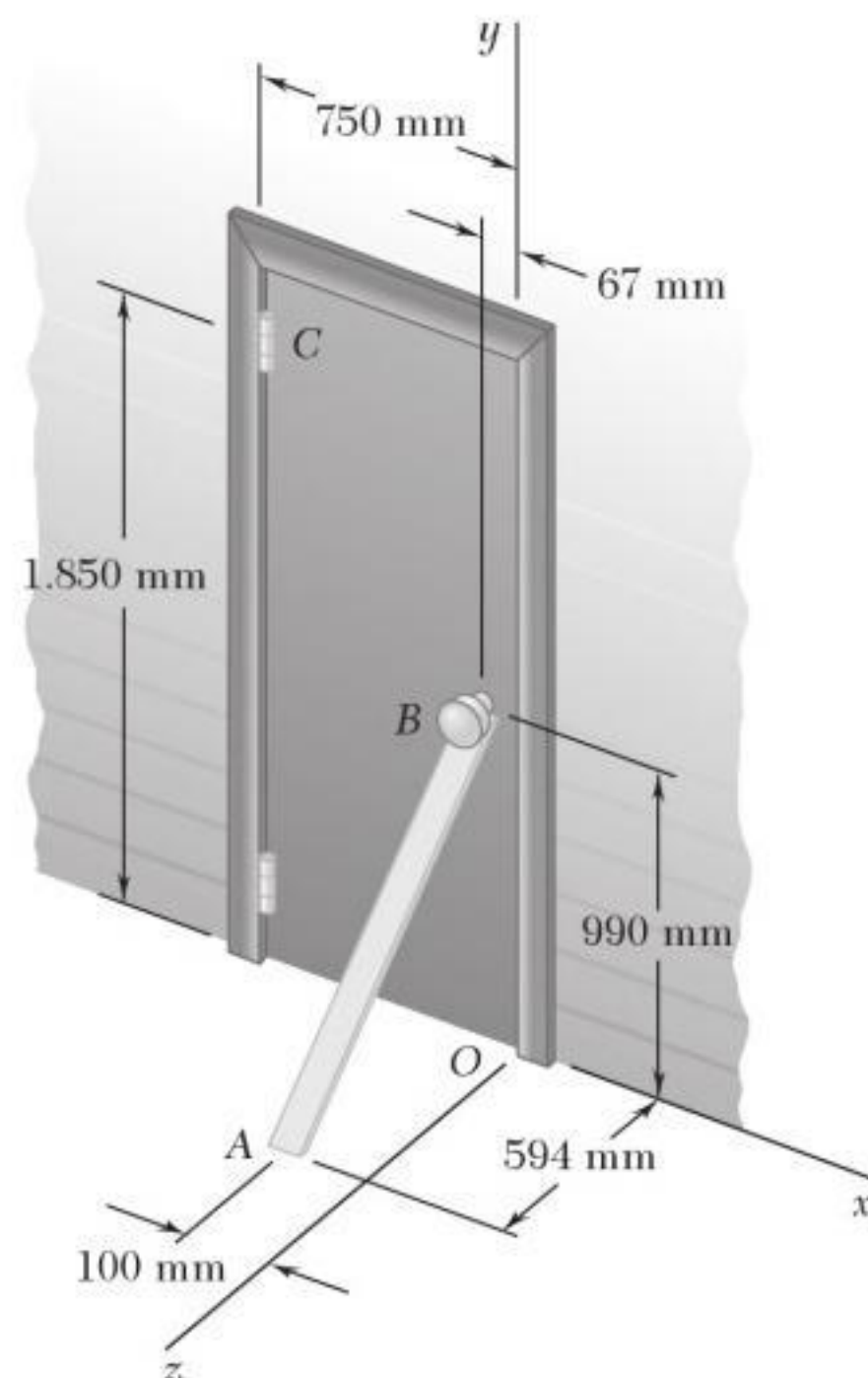


Figura P3.94

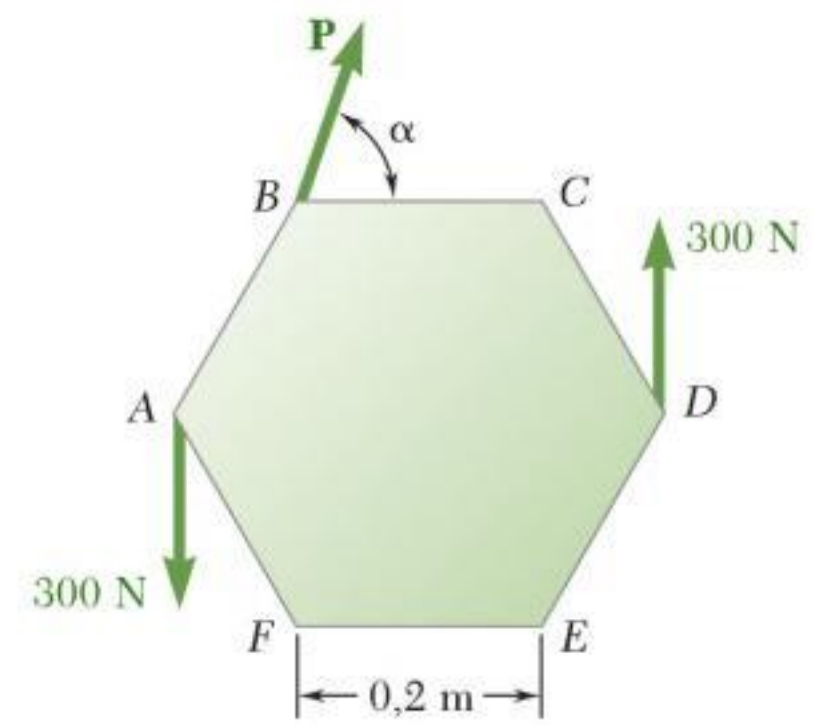


Figura P3.91

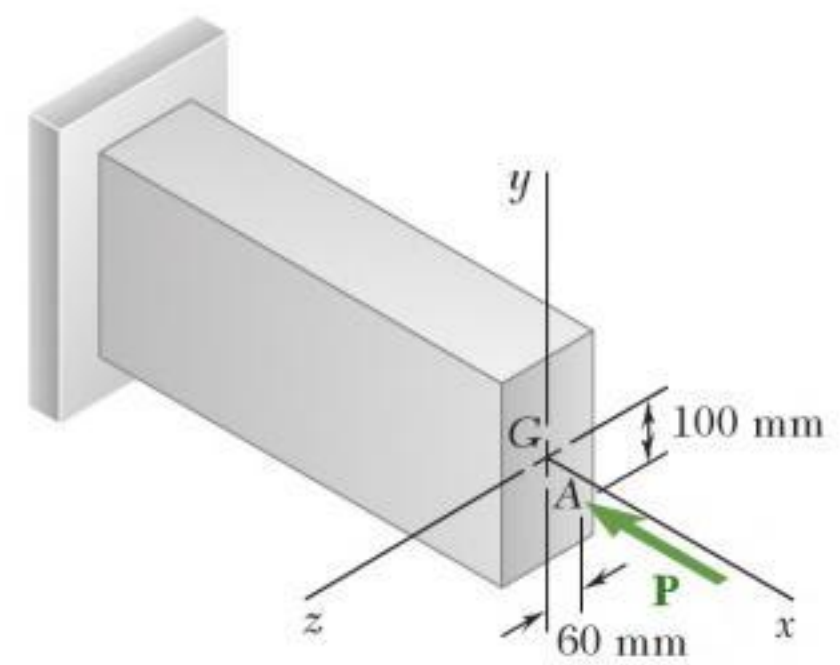


Figura P3.93



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 3.99** Uma força \mathbf{F} de 250 N e um binário \mathbf{M} de 240 N · m são aplicados no canto A do bloco mostrado na figura. Substitua o sistema força-binário dado por um sistema força-binário equivalente no canto H .

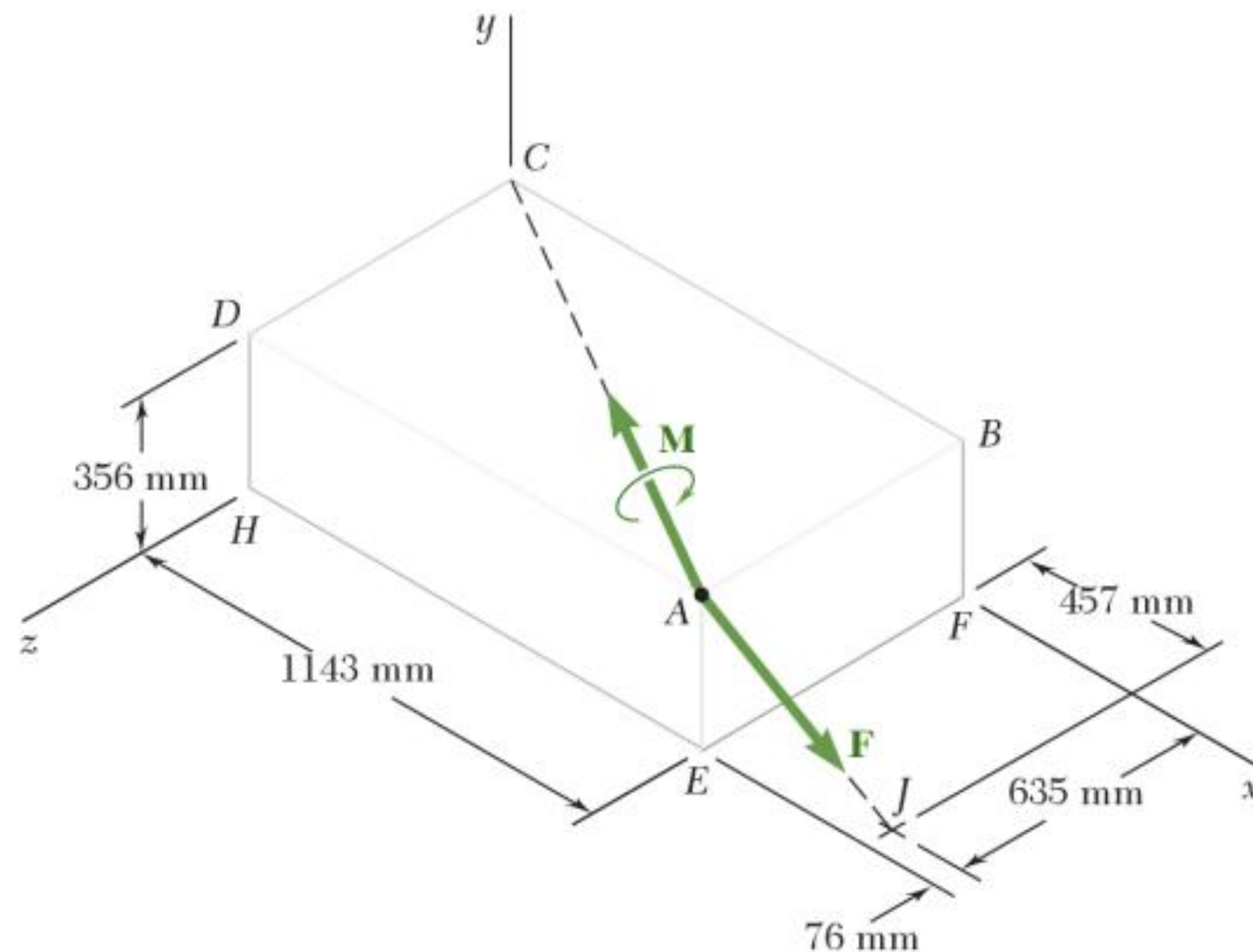


Figura P3.99

- 3.100** O manipulador de uma esmeriladora industrial em miniatura pesa 2,7 N e seu centro de gravidade está sobre o eixo y . O cabeçote do manipulador fica recuado no plano xz de modo que a linha BC forma um ângulo de 25° com a direção x . Mostre que o peso do manipulador e os dois binários \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 podem ser substituídos por uma força única equivalente. Além disso, considerando que $M_1 = 0,076 \text{ N} \cdot \text{m}$ e $M_2 = 0,073 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine (a) a intensidade e a direção da força equivalente, (b) o ponto em que sua linha de ação intercepta o plano xz .

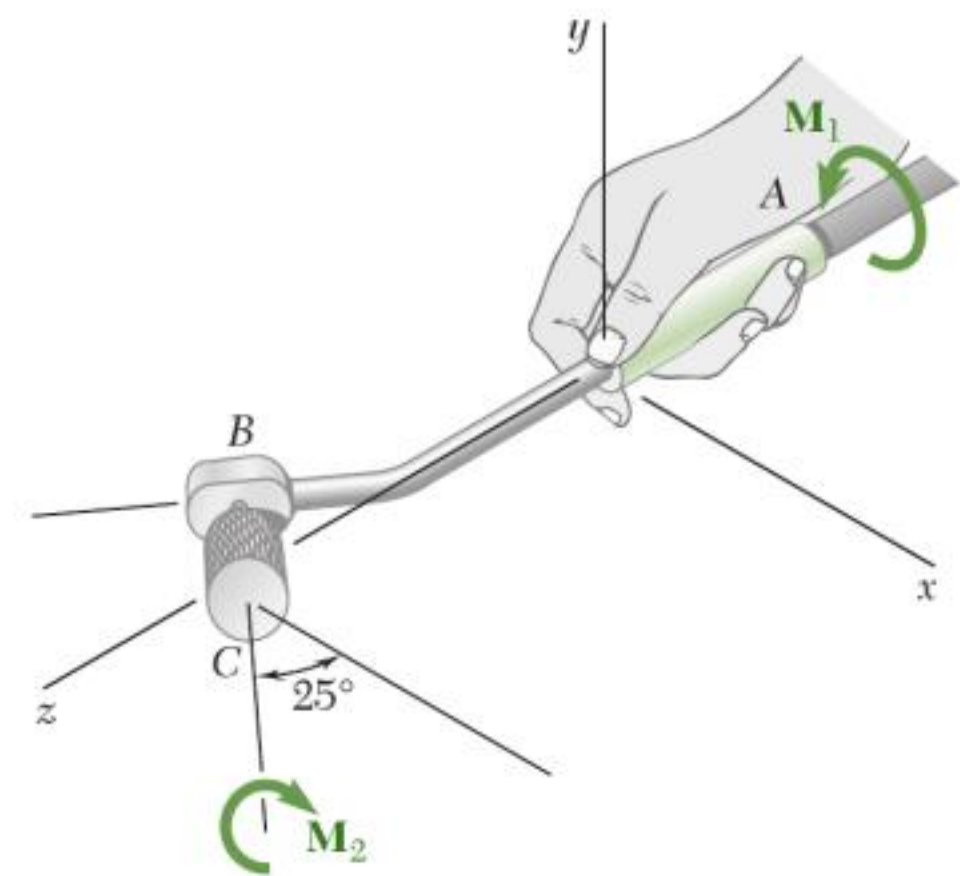


Figura P3.100

3.17 Redução de um sistema de forças a uma força e um binário

Considere um sistema de forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ atuando sobre um corpo rígido nos pontos A_1, A_2, A_3, \dots , definidos pelos vetores de posição $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$, etc. (Fig. 3.41a). Como foi visto na seção anterior, \mathbf{F}_1 pode ser movida de A_1 para um dado ponto O se um binário de momento \mathbf{M}_1 , igual ao mo-

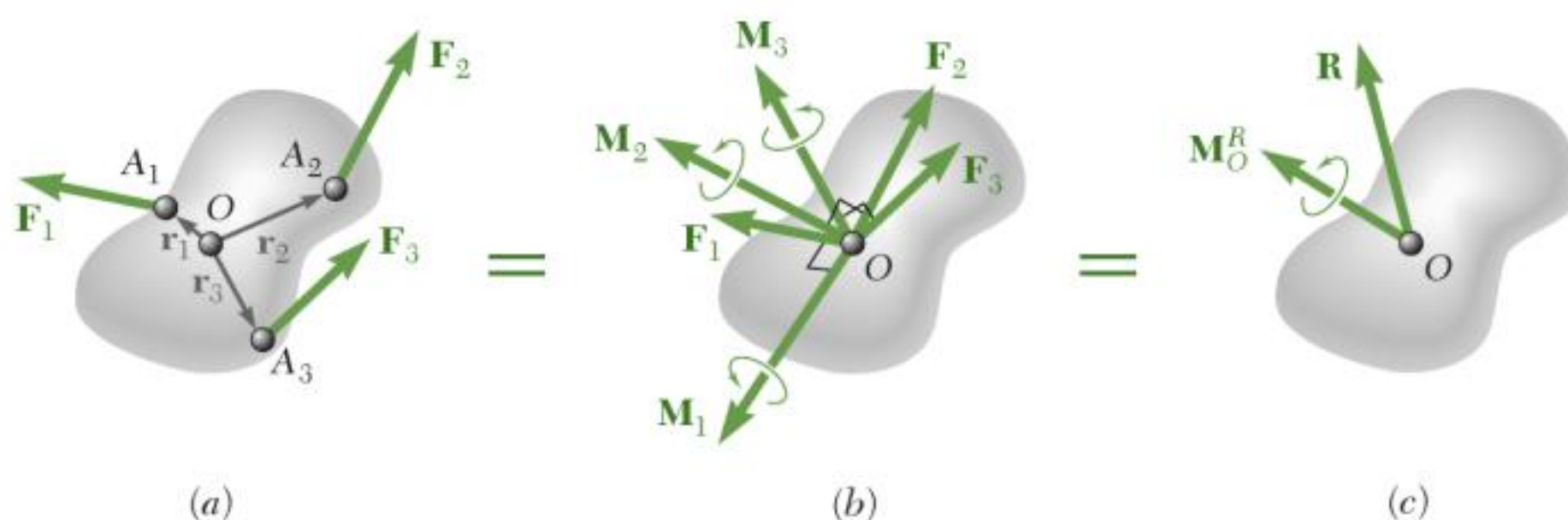


Figura 3.41



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

3.18 Sistemas equivalentes de forças

Vimos na seção anterior que qualquer sistema de forças que atua sobre um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário em um dado ponto O . Esse sistema força-binário equivalente determina o efeito de um dado sistema de forças sobre o corpo rígido. Logo, dois sistemas de forças são equivalentes se puderem ser reduzidos ao mesmo sistema força-binário em um dado ponto O . Lembrando que o sistema força – binário em O é definido pelas relações (3.52), estabelecemos que dois sistemas de forças, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, e $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots$, que atuam sobre o mesmo corpo rígido, são equivalentes se, e somente se, as somas das forças e as somas dos momentos em relação a um dado ponto O das forças dos dois sistemas forem, respectivamente, iguais. Expressas matematicamente, as condições necessárias e suficientes para que os dois sistemas de forças sejam equivalentes são:

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{e} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Observe que, para provar que dois sistemas de forças são equivalentes, a segunda das relações (3.57) deve ser estabelecida com respeito a *apenas um ponto* O . Contudo, ela valerá com respeito a *qualquer ponto* se os dois sistemas forem equivalentes.

Decompondo as forças e os momentos em (3.57) em seus componentes retangulares, podemos expressar da seguinte maneira as condições necessárias e suficientes para a equivalência de dois sistemas de forças que atuam sobre um corpo rígido:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \quad (3.58)$$

Essas equações têm um significado físico simples. Elas expressam que dois sistemas de forças são equivalentes se tenderem a imprimir ao corpo rígido (1) a mesma translação nas direções x , y e z , respectivamente, e (2) a mesma rotação em torno dos eixos, x , y e z , respectivamente.

3.19 Sistemas equipolentes de vetores

Geralmente, quando dois sistemas de vetores satisfazem as Eqs. (3.57) ou (3.58), ou seja, quando suas resultantes e seus momentos resultantes em relação a um ponto arbitrário O são respectivamente iguais, diz-se que os dois sistemas são *equipolentes*. O resultado estabelecido na seção anterior pode então ser escrito do seguinte modo: *Se dois sistemas de forças que atuam sobre um corpo rígido forem equipolentes, então eles serão também equivalentes.*

É importante observar que esse enunciado não se aplica a *qualquer* sistema de vetores. Considere, por exemplo, o sistema de forças que atua sobre um conjunto de partículas independentes que *não* forma um corpo rígido. Pode acontecer de um sistema de forças diferente que atua sobre as mesmas partículas ser equipolente ao primeiro; ou seja, ele pode ter a mesma resultante e o mesmo momento resultante. Todavia, como forças diferentes irão agora atuar sobre as várias partículas, seus efeitos sobre elas serão diferentes; os dois sistemas, embora equipolentes, *não* são equivalentes.



Foto 3.3 As forças exercidas pelas crianças sobre o carrinho podem ser substituídas por um sistema força-binário equivalente ao se analisar o movimento do carrinho.

3.20 Casos particulares de redução de um sistema de forças

Vimos na Seção 3.17 que qualquer sistema de forças que atuam sobre um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário equivalente em O , consistido em uma força \mathbf{R} igual à soma das forças do sistema e um vetor binário \mathbf{M}_O^R de momento igual ao momento resultante do sistema.

Quando $\mathbf{R} = 0$, o sistema força-binário reduz-se ao vetor binário \mathbf{M}_O^R . O sistema de forças dado pode, então, ser reduzido a um binário único, denominado *binário resultante* do sistema.

Vamos investigar as condições em que um dado sistema de forças pode ser reduzido a uma força única. Segue-se da Seção 3.16 que o sistema força-binário em O pode ser substituído por uma força única \mathbf{R} que atua ao longo de uma nova linha de ação se \mathbf{R} e \mathbf{M}_O^R forem mutuamente perpendiculares. Logo, os sistemas de forças que podem ser reduzidos a uma força única, ou resultante, são os sistemas para os quais a força \mathbf{R} e o vetor binário \mathbf{M}_O^R são mutuamente perpendiculares. Essa condição não é geralmente satisfeita por sistemas de forças no espaço, mas será satisfeita por sistemas que consistem em (1) forças concorrentes, (2) forças coplanares ou (3) forças paralelas. Esses três casos serão discutidos em separado.

1. *Forças concorrentes* são aplicadas ao mesmo ponto e, portanto, podem ser somadas diretamente para se obter sua resultante \mathbf{R} . Logo, elas sempre se reduzem a uma força única. Forças concorrentes foram tratadas em detalhe no Cap. 2.
2. *Forças coplanares* atuam no mesmo plano, que pode ser considerado como sendo o plano da figura (Fig. 3.43a). A soma \mathbf{R} das forças do sistema também ficará no plano da figura, ao passo que o momento de cada força em relação a O e, portanto, o momento resultante \mathbf{M}_O^R será perpendicular a esse plano. Logo, o sistema força-binário em O consiste em uma força \mathbf{R} e um vetor binário \mathbf{M}_O^R que são mutuamente perpendiculares (Fig. 3.43b).^{*} Pode-se reduzi-los a uma força única \mathbf{R} movendo-se \mathbf{R} no plano da figura até que seu momento em relação a O tome-se igual a \mathbf{M}_O^R . A distância de O até a linha de ação de \mathbf{R} é $d = M_O^R / R$ (Fig. 3.43c).

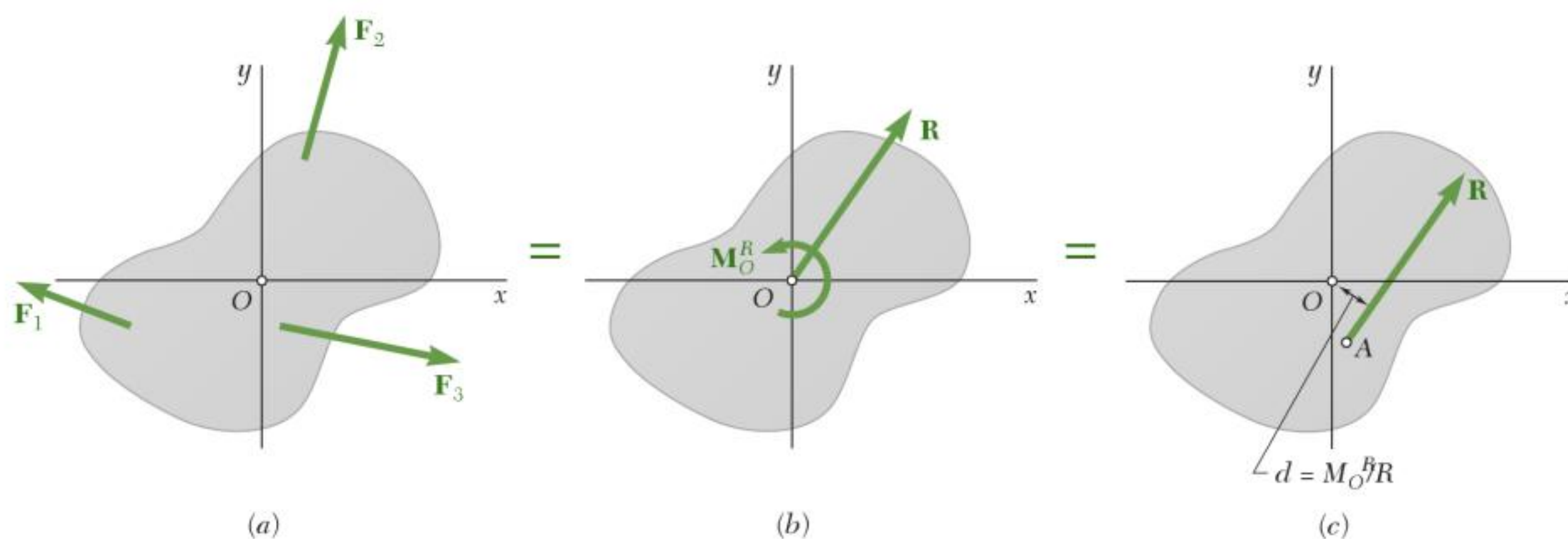


Figura 3.43

^{*} Por ser perpendicular ao plano da figura, o vetor binário \mathbf{M}_O^R é representado pelo símbolo \curvearrowright . Um binário anti-horário \curvearrowright representa um vetor apontando para fora do papel, e um binário horário \curvearrowleft representa um vetor apontando para dentro do papel.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



Foto 3.4 As forças paralelas do vento atuando sobre as placas de sinalização de uma rodovia podem ser reduzidas a uma força única equivalente. A determinação dessa força pode simplificar o cálculo das forças que atuam sobre os apoios da estrutura em que as placas estão fixadas.

nário \mathbf{M}_O^R que são mutuamente perpendiculares (Fig. 3.45b). Eles podem ser reduzidos a uma força única \mathbf{R} (Fig. 3.45c) ou, se $\mathbf{R} = 0$, a um binário único de momento \mathbf{M}_O^R .

Na prática, o sistema força-binário em O será caracterizado pelos componentes:

$$R_y = \Sigma F_y \quad M_x^R = \Sigma M_x \quad M_z^R = \Sigma M_z \quad (3.60)$$

A redução do sistema a uma força única pode ser efetuada movendo-se \mathbf{R} para um novo ponto de aplicação $A(x, 0, z)$ escolhido de modo que o momento de \mathbf{R} em relação a O fique igual a \mathbf{M}_O^R .

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y\mathbf{j} &= M_x^R\mathbf{i} + M_z^R\mathbf{k} \end{aligned}$$

Calculando os produtos vetoriais e igualando os coeficientes dos vetores unitários correspondentes em ambos os membros da equação, obtemos duas equações escalares que definem as coordenadas de A :

$$-zR_y = M_x^R \quad xR_y = M_z^R$$

Essas equações expressam que os momentos de \mathbf{R} em relação aos eixos x e z devem ser iguais a M_x^R e M_z^R , respectivamente.

*3.21 Redução de um sistema de forças a um torsor

No caso geral de forças no espaço, o sistema força-binário equivalente em O consiste em uma força \mathbf{R} e um vetor binário \mathbf{M}_O^R que não são perpendiculares e nenhum deles é nulo (Fig. 3.46a). Logo, o sistema de forças *não* pode ser reduzido a uma força única ou a um binário único. O vetor binário, porém, pode ser substituído por dois outros vetores binários obtidos ao decompor \mathbf{M}_O^R em um componente \mathbf{M}_1 ao longo de \mathbf{R} e um componente \mathbf{M}_2 em um plano perpendicular a \mathbf{R} (Fig. 3.46b). O vetor binário \mathbf{M}_2 e a força \mathbf{R} podem, assim, ser substituídos por uma força única \mathbf{R} que atua ao longo de uma nova linha de ação. Logo, o sistema de forças original reduz-se a \mathbf{R} e ao vetor binário \mathbf{M}_1 (Fig. 3.46c), ou seja, a \mathbf{R} e a um binário que atua no plano perpendicular a \mathbf{R} . Esse sistema força-binário particular é denominado *torsor* e essa combinação resultante de empurrar e torcer é encontrada em operações de rosqueamento de parafusos. A linha de ação de \mathbf{R} é conhecida como *eixo do torsor* e a razão $p = M_1/R$

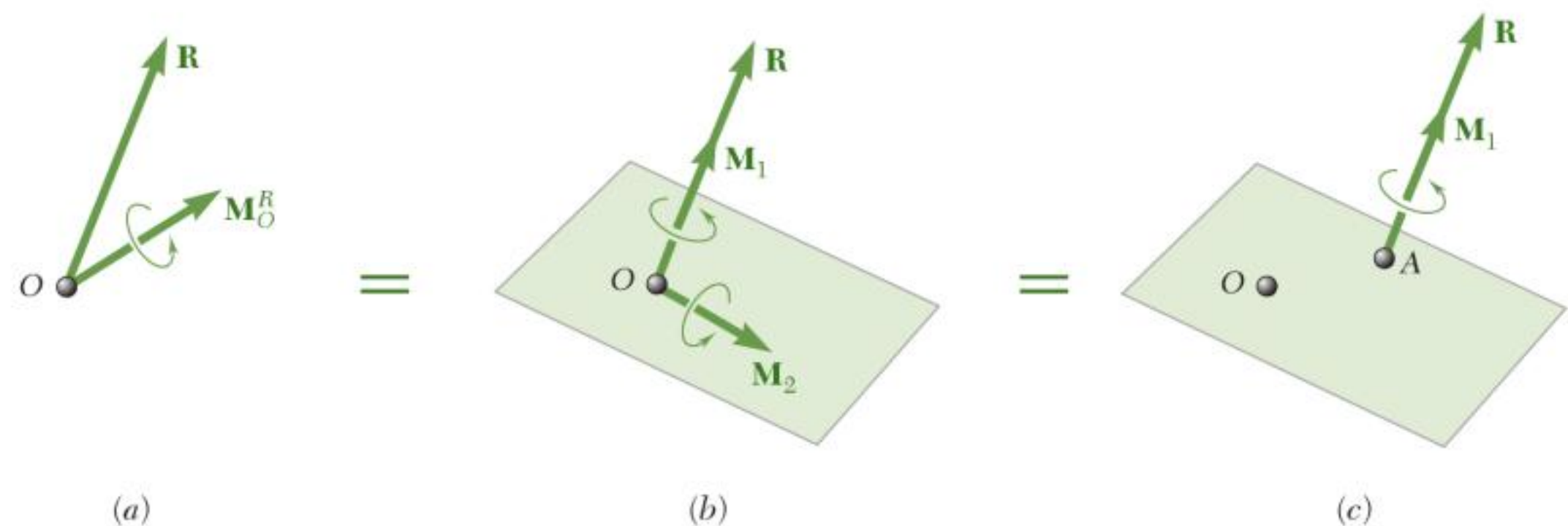


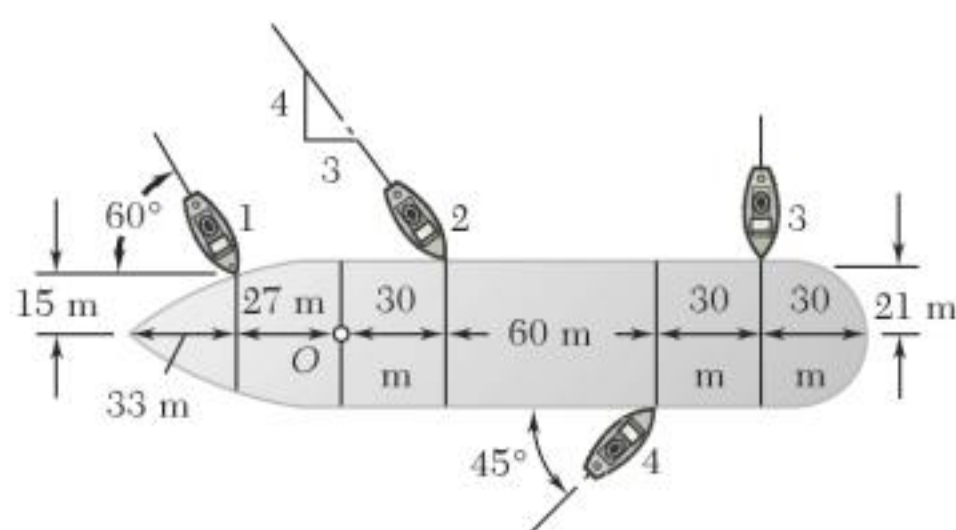
Figura 3.46



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

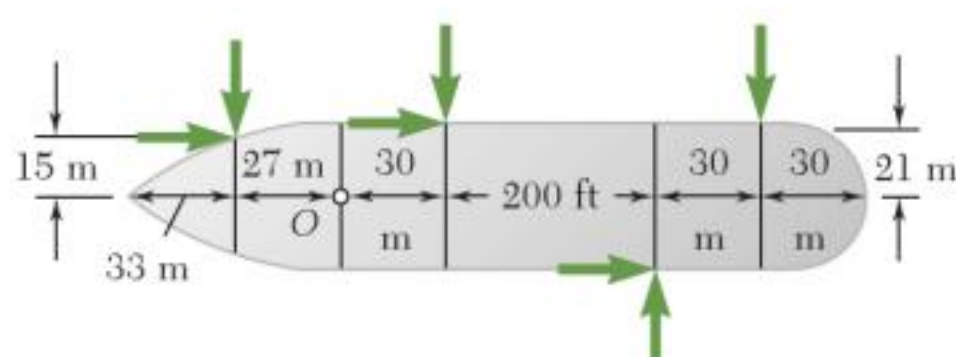


You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.9

Quatro rebocadores são usados para trazer um transatlântico ao cais. Cada rebocador exerce em força de 22.500 N na direção mostrada na figura. Determine (a) o sistema força-binário equivalente no mastro de proa O , (b) o ponto sobre o casco no qual um rebocador único, mais potente, deva empurrar para produzir o mesmo efeito dos quatro rebocadores originais.



SOLUÇÃO

a. Sistema força-binário em O . Cada uma das forças dadas é decomposta nos componentes no diagrama apresentado (a unidade das forças são em kN). O sistema força-binário em O equivalente ao sistema de forças dado consiste em uma força \mathbf{R} e um binário \mathbf{M}_O^R definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (11,25\mathbf{i} - 19,49\mathbf{j}) + (13,5\mathbf{i} - 18\mathbf{j}) + (22,5\mathbf{j}) + (15,91\mathbf{i} + 15,91\mathbf{j}) \\ &= 40,66\mathbf{i} - 44,08\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (-27\mathbf{i} + 15\mathbf{j}) \times (11,25\mathbf{i} - 19,49\mathbf{j}) \\ &\quad + (30\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (13,5\mathbf{i} - 18\mathbf{j}) \\ &\quad + (120\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (-22,5\mathbf{j}) \\ &\quad + (90\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (15,91\mathbf{i} + 15,91\mathbf{j}) \\ &= (526,23 - 168,75 - 540 - 283,5 - 2.700 + 1.431,9 + 334,11)\mathbf{k} \\ &= -1.400\mathbf{k}\end{aligned}$$

Logo, o sistema força-binário equivalente em O é:

$$\mathbf{R} = (40,66 \text{ kN})\mathbf{i} - (44,08 \text{ kN})\mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^R = -(1.400 \text{ kN} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

ou

$$\mathbf{R} = 59,97 \text{ kN} \searrow 47,3^\circ \quad \mathbf{M}_O^R = 1.400 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow \blacktriangleleft$$

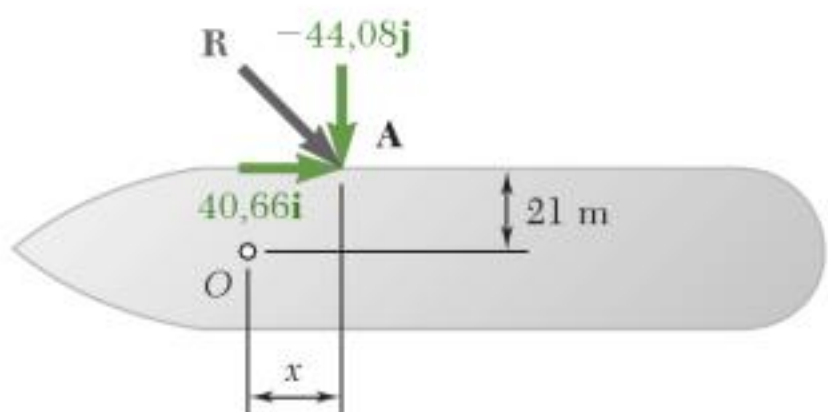
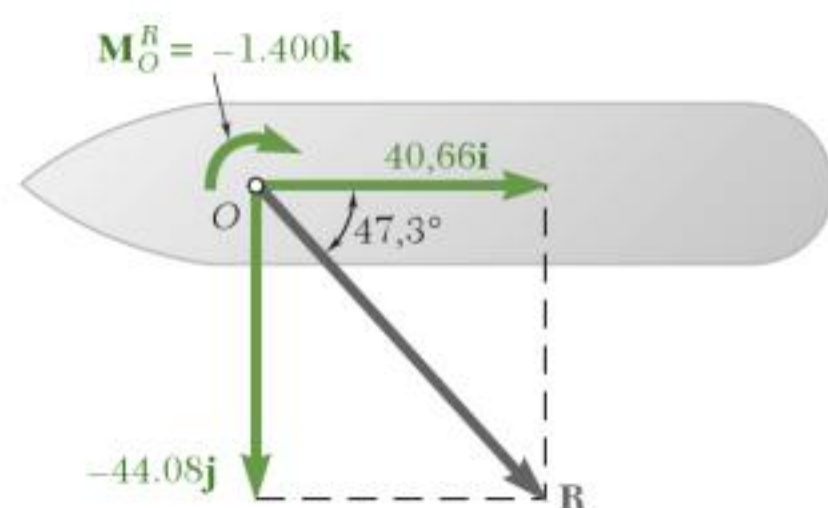
Observação: como todas as forças estão contidas no plano da figura, poderíamos esperar que a soma de seus momentos fosse perpendicular a esse plano. Observe que o momento de cada componente de força poderia ser obtido diretamente do diagrama efetuando-se primeiro o produto da sua intensidade e da distância perpendicular até O e, em seguida, atribuindo-se a esse produto um sinal positivo ou negativo, dependendo do sentido do momento.

b. Rebocador único. A força exercida por um rebocador único deve ser igual a \mathbf{R} e seu ponto de aplicação A deve ser tal que o momento de \mathbf{R} em relação a O seja igual a \mathbf{M}_O^R . Observando que a posição do ponto A é:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$$

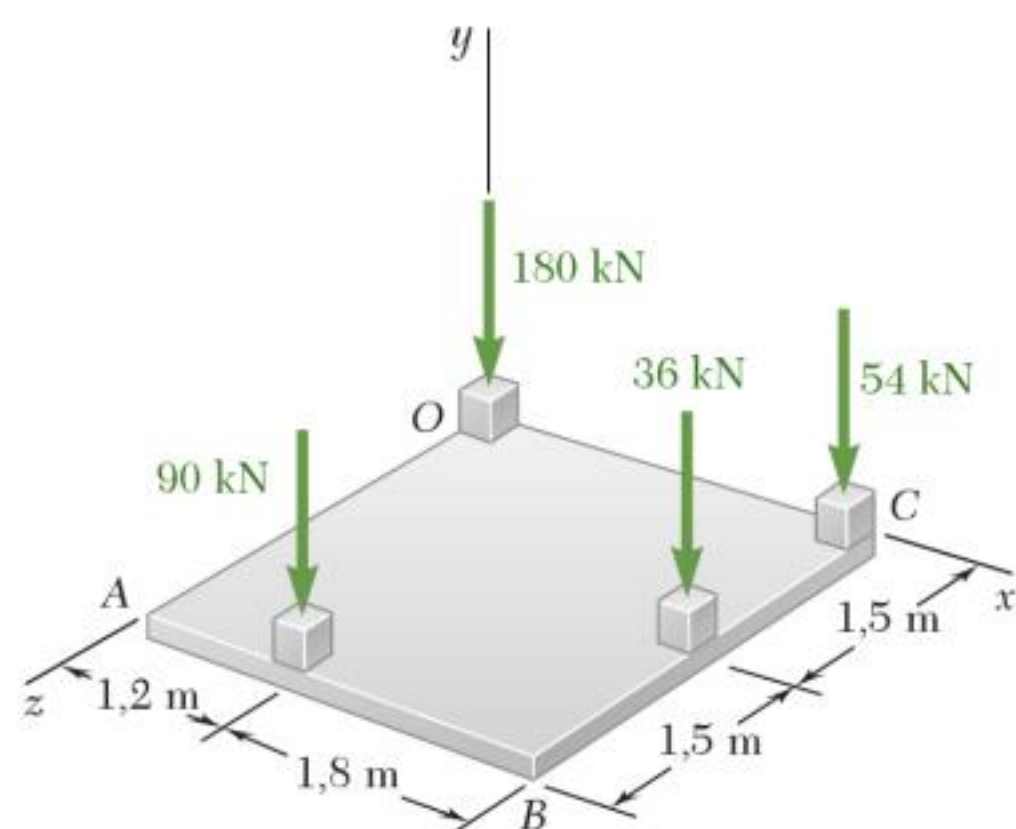
temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (40,66\mathbf{i} - 44,08\mathbf{j}) &= -1.400\mathbf{k} \\ -x(44,08)\mathbf{k} - 853,66\mathbf{k} &= -1.400\mathbf{k} \quad x = 12,39\text{m} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$





You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.11

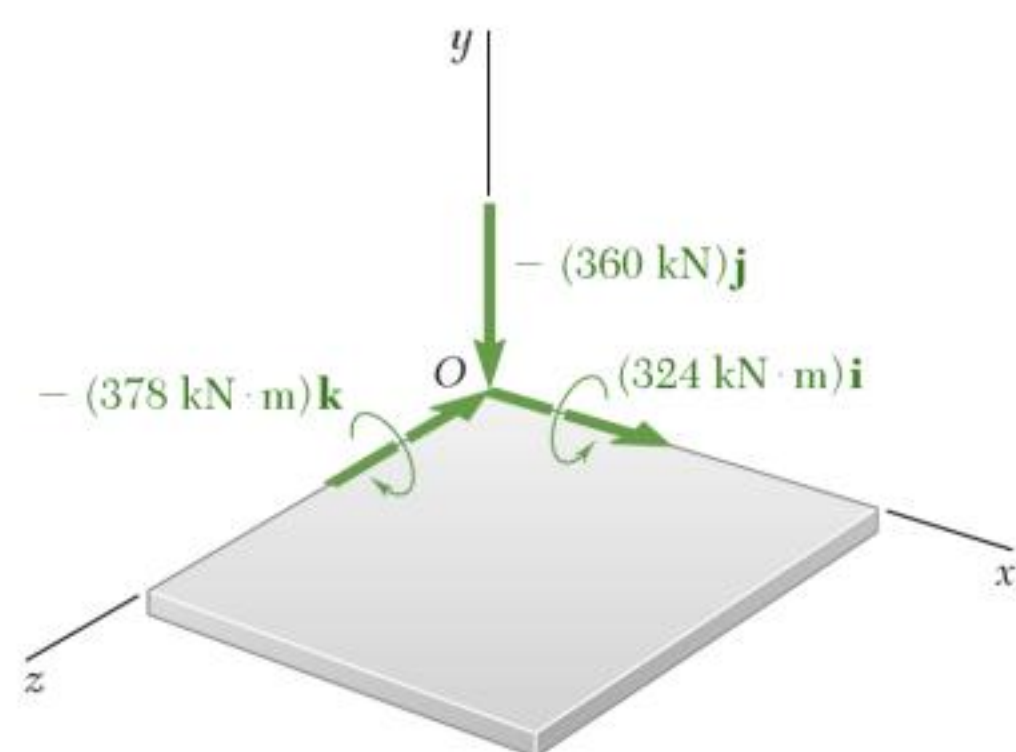
Uma laje de fundação quadrada apoia os quatro pilares como mostrado na figura. Determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante das quatro cargas.

SOLUÇÃO

Primeiro, reduzimos o sistema de forças a um sistema de força-binário na origem O do sistema de coordenadas. Esse sistema força-binário consiste em uma força \mathbf{R} e um binário \mathbf{M}_O^R definidos da seguinte maneira:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Os vetores posição dos pontos de aplicação das várias forças são determinados e os cálculos são distribuídos em forma de tabela:



$\mathbf{r}, \text{ m}$	$\mathbf{F}, \text{ kN}$	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}, \text{ kN} \cdot \text{ m}$
0	$-180\mathbf{j}$	0
$3\mathbf{i}$	$-54\mathbf{j}$	$-162\mathbf{k}$
$3\mathbf{i} + 1,5\mathbf{k}$	$-36\mathbf{j}$	$54\mathbf{i} - 108\mathbf{k}$
$1,2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$	$-90\mathbf{j}$	$270\mathbf{i} - 108\mathbf{k}$
	$\mathbf{R} = -360\mathbf{j}$	$\mathbf{M}_O^R = 324\mathbf{i} - 378\mathbf{k}$

Como a força \mathbf{R} e o vetor binário \mathbf{M}_O^R são perpendiculares entre si, o sistema força-binário obtido pode ainda ser reduzido a uma força única \mathbf{R} . O novo ponto de aplicação de \mathbf{R} será escolhido no plano da laje de modo que o momento \mathbf{R} em relação a O seja igual a \mathbf{M}_O^R . Dado \mathbf{r} o vetor posição do ponto de aplicação desejado e x e z as suas coordenadas, podemos escrever

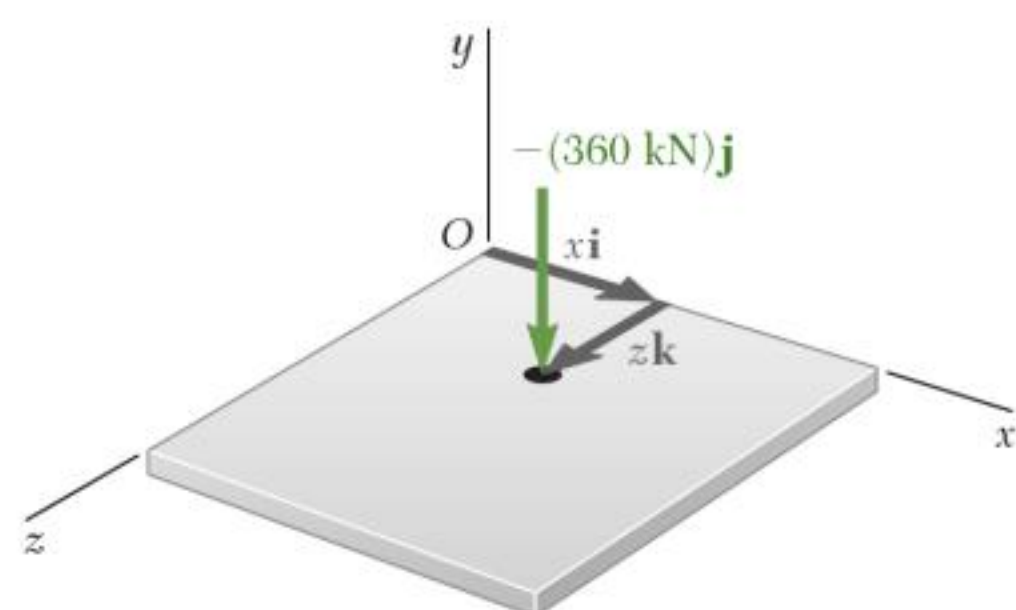
$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-360\mathbf{j}) &= 324\mathbf{i} - 378\mathbf{k} \\ -360x\mathbf{k} + 360z\mathbf{i} &= 324\mathbf{i} - 378\mathbf{k} \end{aligned}$$

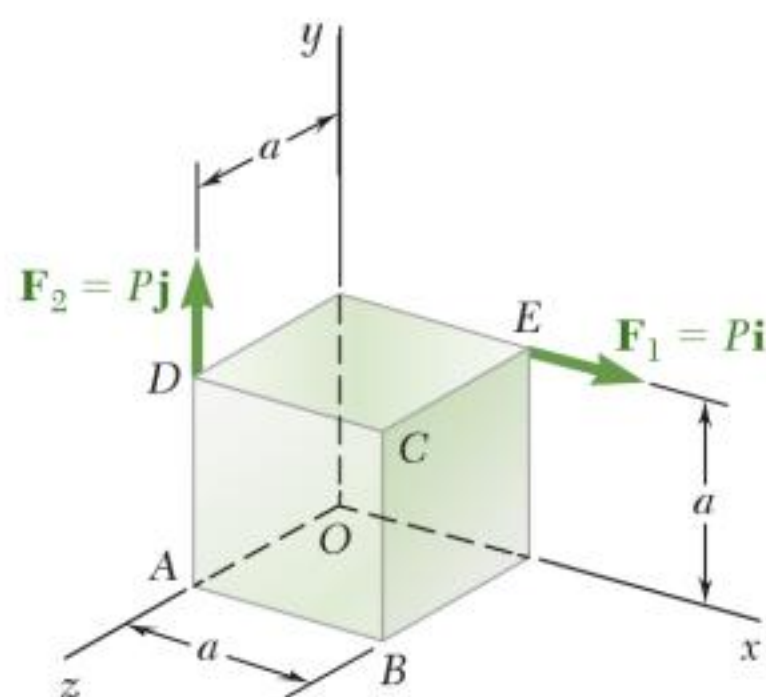
de onde temos

$$\begin{aligned} -360x &= -378 & 360z &= 324 \\ x &= 1,05 \text{ m} & z &= 0,9 \text{ m} \end{aligned}$$

Concluimos que a resultante do sistema de forças dado é:

$$\mathbf{R} = 360 \text{ kN} \downarrow \quad x = 1,5 \text{ m}, z = 0,9 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESOLVIDO 3.12

Duas forças de igual intensidade P atuam sobre um cubo de aresta a como mostra a figura. Substitua as duas forças por um tissor equivalente e determine (a) a intensidade e a direção da força resultante \mathbf{R} , (b) o passo do tissor, (c) o ponto do tissor que intercepta o plano yz .

SOLUÇÃO

Sistema força-binário equivalente em O . Primeiro, determinamos o sistema força-binário equivalente na origem O . Observamos que os vetores posição dos pontos de aplicação E e D das duas forças dadas são $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. A resultante \mathbf{R} das duas forças e o momento resultante \mathbf{M}_O^R delas em relação a O são:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^R &= \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j} \\ &= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2)$$

a. Força resultante \mathbf{R} . Segue-se da Eq. (1) e do esquema ao lado que a força resultante \mathbf{R} tem intensidade $R = P\sqrt{2}$, está no plano xy e forma ângulos de 45° com eixos x e y . Logo:

$$R = P\sqrt{2} \quad \theta_x = \theta_y = 45^\circ \quad \theta_z = 90^\circ \quad \blacktriangleleft$$

b. Passo do tissor. Retomando a fórmula (3.62) da Seção 3.21 e as Eqs. (1) e (2) anteriores, temos:

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \quad p = -\frac{a}{2} \quad \blacktriangleleft$$

c. Eixo do tissor. Segue-se dos resultados anteriores e da Eq. (3.61) que o tissor consiste na força \mathbf{R} encontrada em (1) e no vetor binário:

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (3)$$

Para encontrar o ponto em que o eixo do tissor intercepta o plano yz , demonstramos que o momento do tissor em relação ao ponto O é igual ao momento resultante \mathbf{M}_O^R do sistema original:

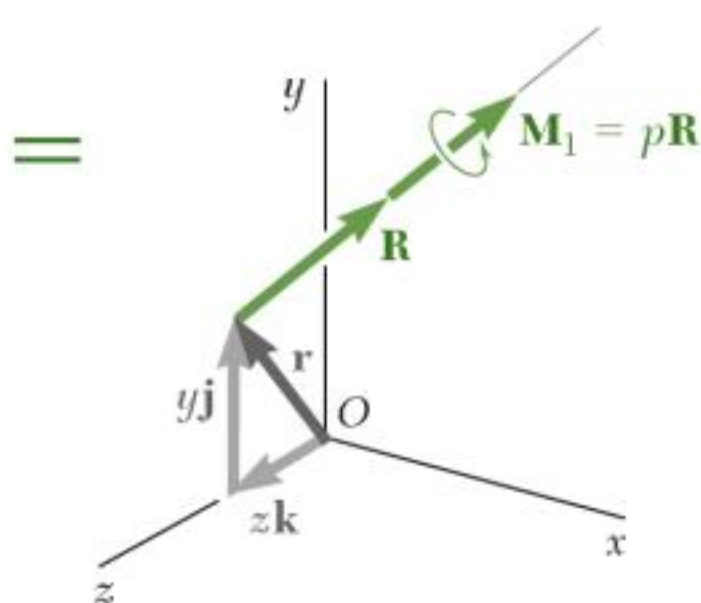
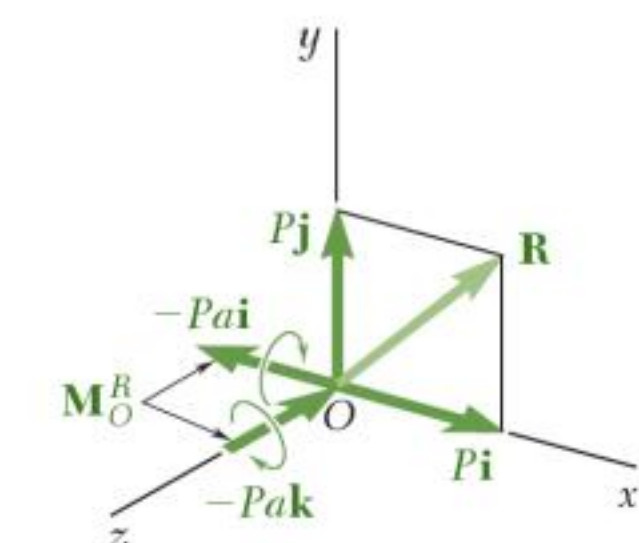
$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

ou, observando que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e substituindo \mathbf{R} , \mathbf{M}_O^R e \mathbf{M}_1 das Eqs. (1), (2) e (3):

$$\begin{aligned} -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) &= -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \\ -\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} &= -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k} \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de \mathbf{k} e, em seguida, os coeficientes de \mathbf{j} , encontramos:

$$y = a \quad z = a/2 \quad \blacktriangleleft$$





You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

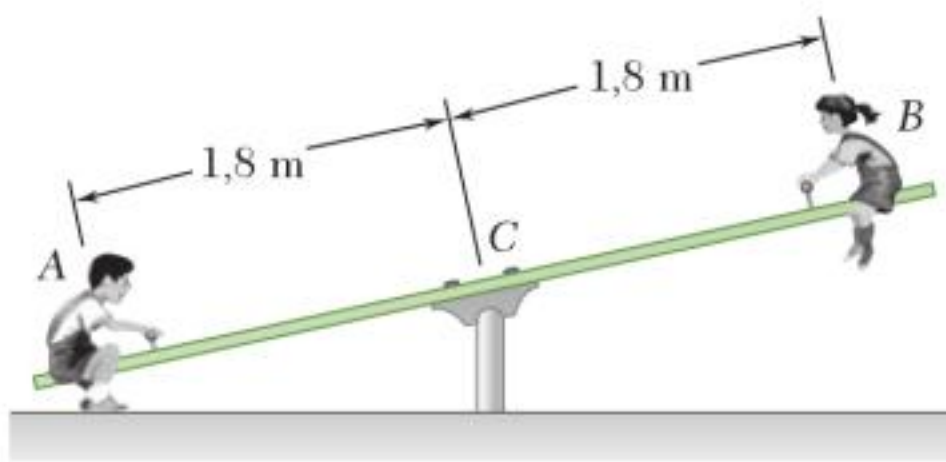


Figura P3.105

3.105 Os pesos de duas crianças sentadas nas extremidades A e B de uma gangorra são 370 N e 280 N , respectivamente. Onde deverá sentar-se uma terceira criança de modo que a resultante dos pesos das três crianças passe pelo ponto C se a criança tiver um peso de (a) 260 N , (b) 230 N .

3.106 Três refletores de palco são montados em um tubo, como mostra a figura. As luzes em A e B pesam 18 N cada uma, enquanto a outra em C pesa 15 N . (a) Se $d = 0,60\text{ m}$, determine a distância do ponto D até a linha de ação da resultante dos pesos dos três refletores. (b) Determine o valor de d de modo que a resultante dos pesos passe pelo ponto médio do tubo.

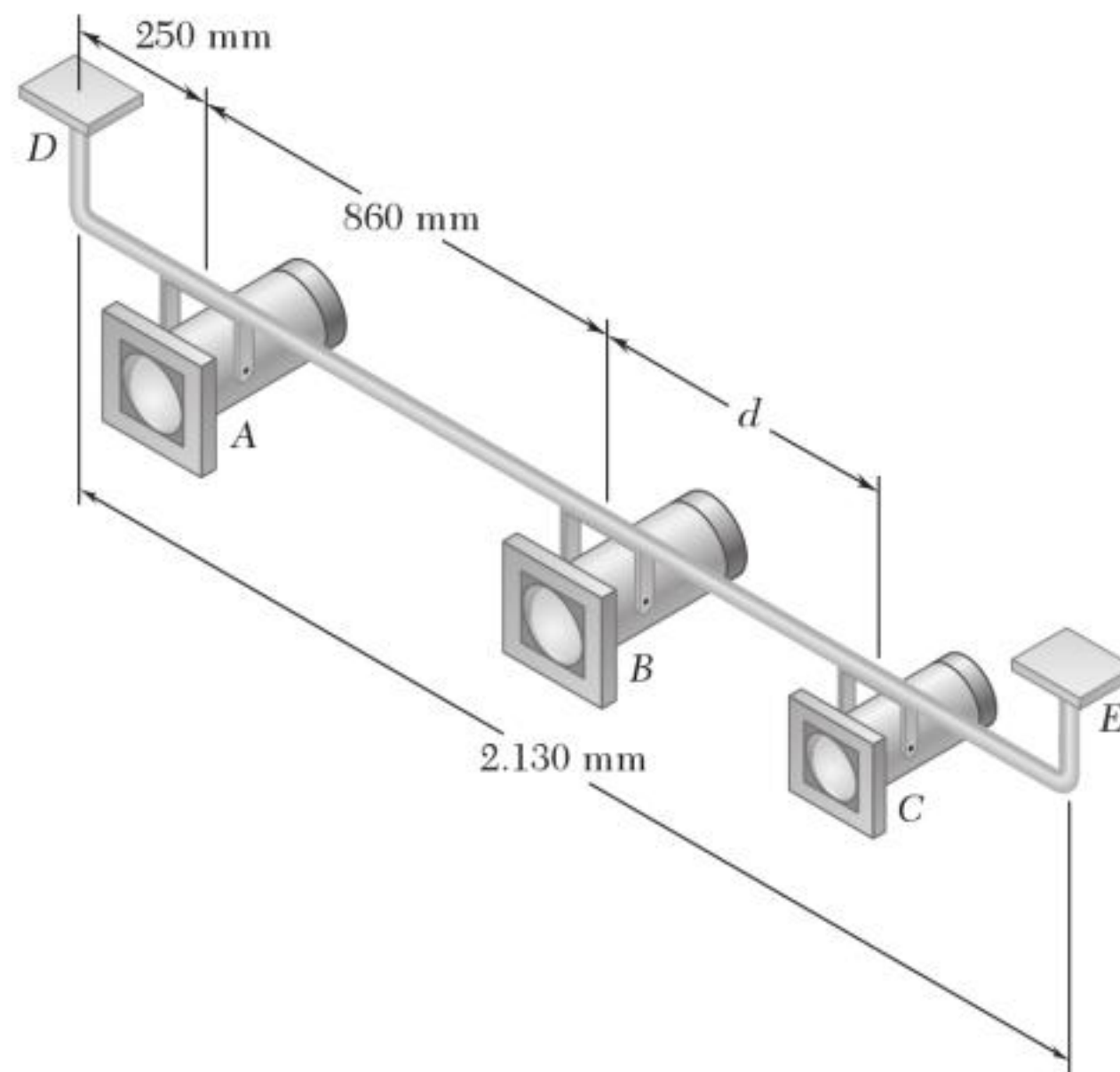


Figura P3.106

3.107 Uma viga suporta três cargas com intensidade indicada na figura e uma quarta carga cuja intensidade é função da posição. Se $b = 1,5\text{ m}$ e as cargas forem representadas por uma única força equivalente, determine (a) o valor de a tal que a distância do apoio A até a linha de ação da força equivalente seja máxima, (b) a intensidade da força equivalente e seu ponto de aplicação na viga.

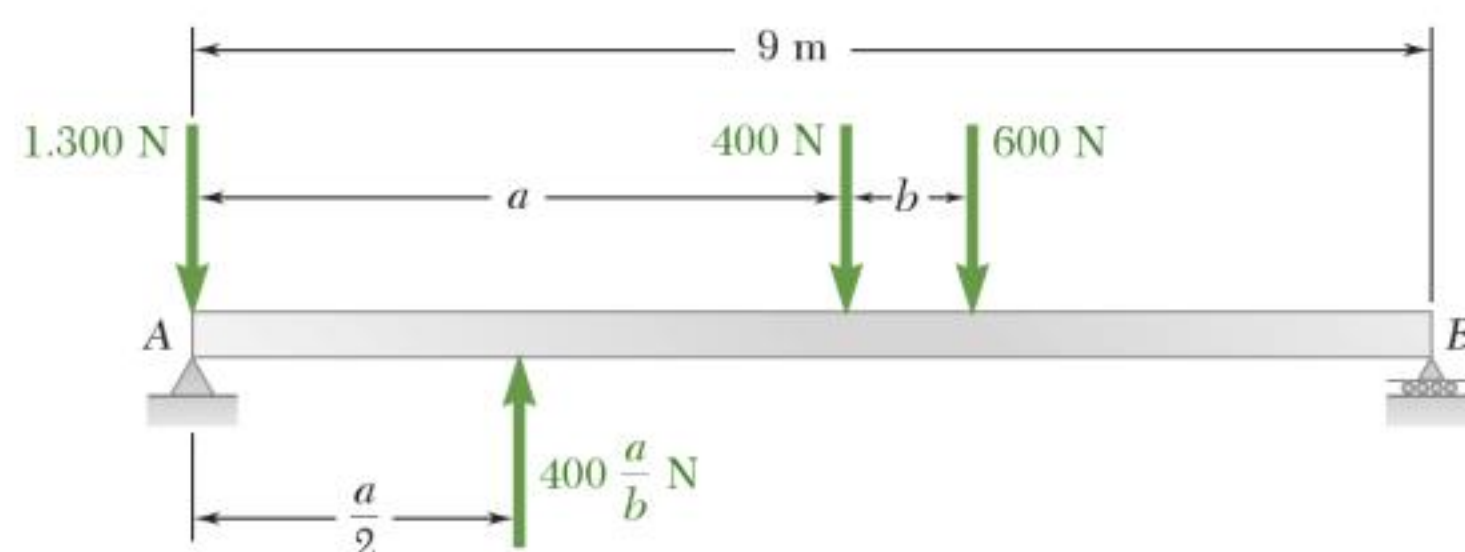


Figura P3.107

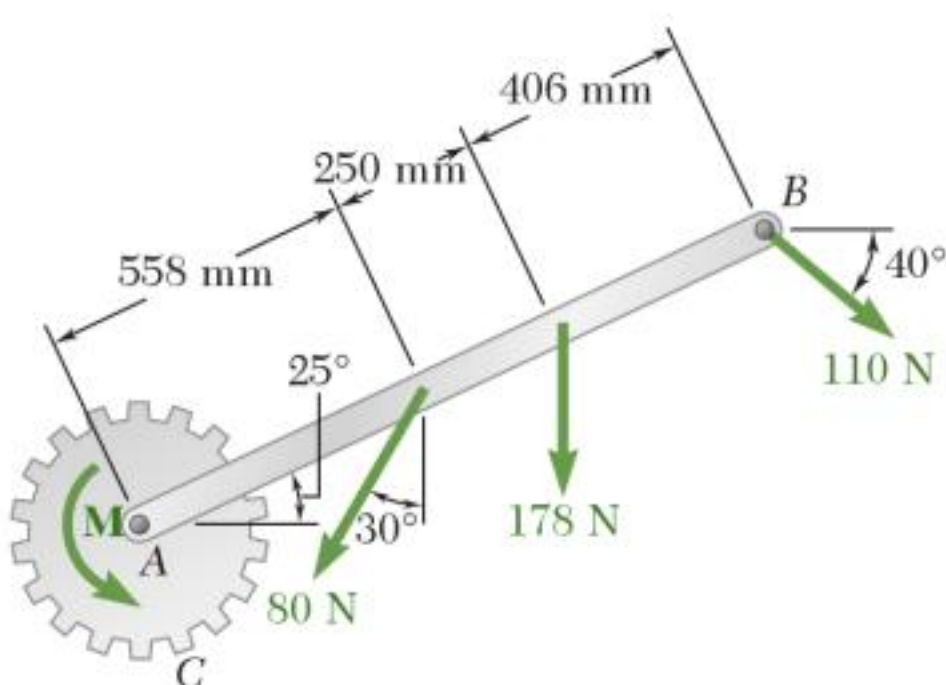


Figura P3.108

3.108 A engrenagem C está firmemente ligada ao braço AB . Se as forças e o binário mostrados na figura podem ser reduzidos a uma força única equivalente em A , determine a força equivalente e a intensidade do binário M .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 3.124** Um mecânico substitui um sistema de exaustão de carro travando firmemente o conversor catalítico FG montado nos suporte H e I e então, libera as montagens do silencioso e do cano de escape. Para posicionar o cano ejetor AB , ele empurra e levanta em A enquanto puxa para baixo em B . (a) Substitua o sistema de força dado com um sistema de força-binário em D . (b) Descubra se o tubo CD tende a rodar no sentido horário ou anti-horário em relação ao silencioso DE , como previsto pelo mecânico.

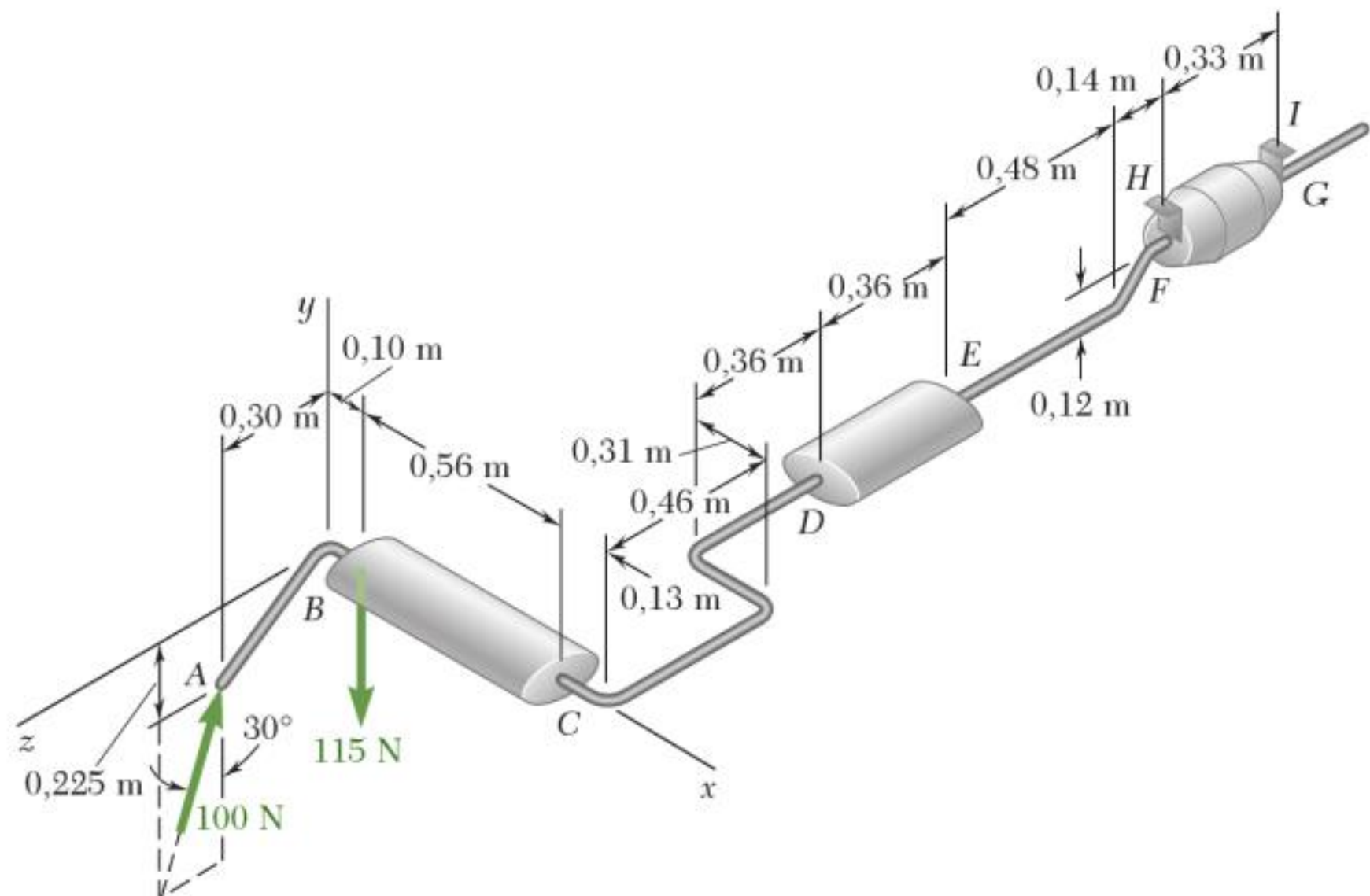


Figura P3.124

- 3.125** Para o sistema de exaustão do Problema 3.124, (a) substitua o sistema de força por um sistema força-binário equivalente em F , onde o cano de escape é conectado ao conversor catalítico, (b) determine se o tubo EF tende a rodar no sentido horário ou anti-horário, como previsto pelo mecânico.
- 3.126** O conjunto cabeçote-motor de uma furadeira radial de coluna estava originalmente posicionado com o braço AB paralelo ao eixo z e com o eixo do mandril e da broca paralelo ao eixo y . O conjunto foi, então, girado 25° em torno do eixo y e 20° em torno da linha de centro do braço horizontal AB , trazendo-o para a posição mostrada na figura. O processo de furação teve início ligando-se o motor e girando-se as alavancas de ajuste para se colocar a broca em contato com a peça. Substitua a força e o binário exercido pela furadeira por um sistema força-binário equivalente ao centro O da base da coluna vertical.

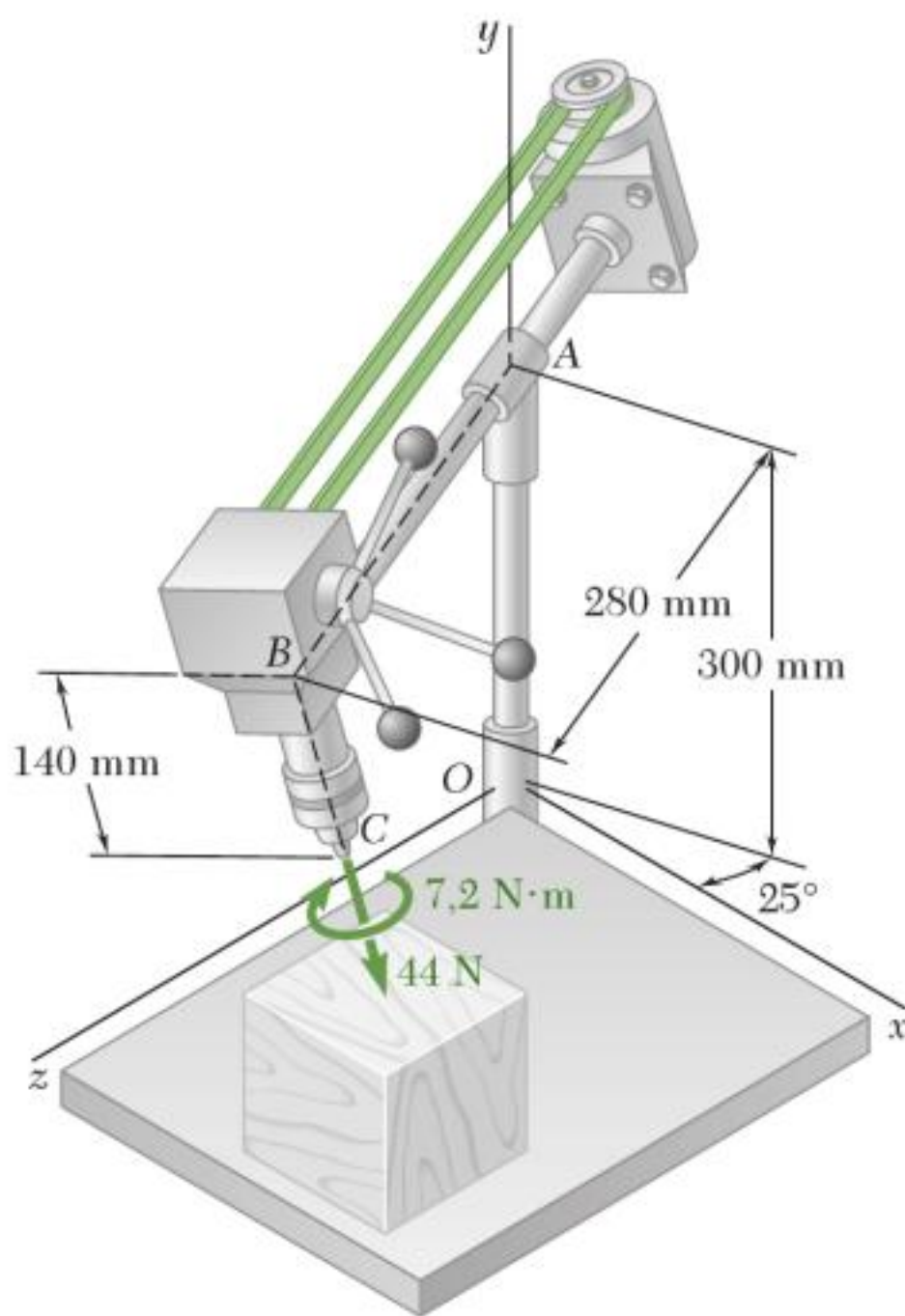


Figura P3.126

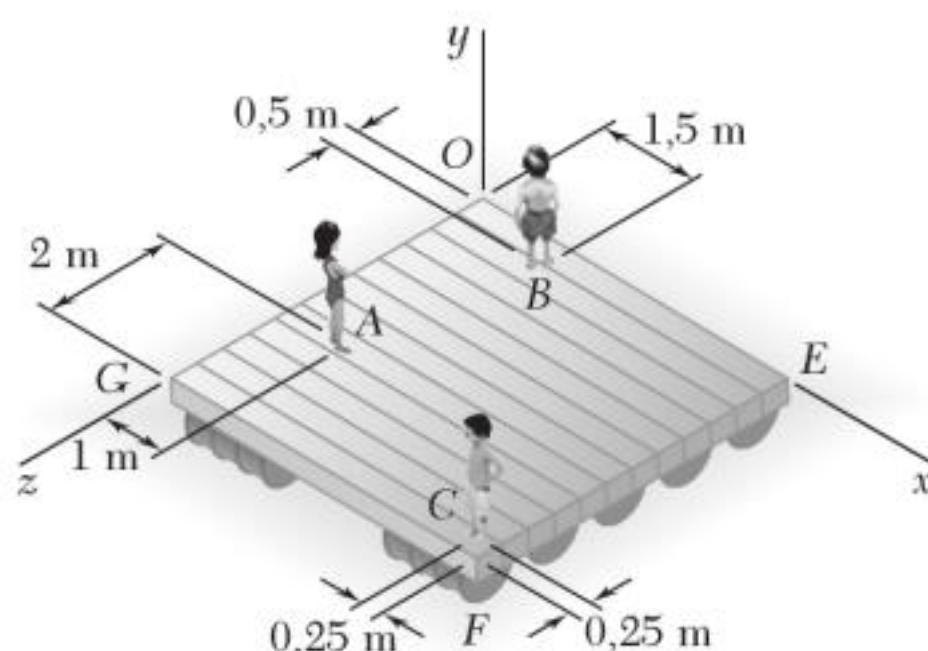


Figura P3.127 e P3.128

- 3.127** Três crianças estão em pé sobre uma balsa de 5×5 m. Se os pesos das crianças nos pontos A , B e C são de 375 N, 260 N e 400 N, respectivamente, determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante dos três pesos.
- 3.128** Três crianças estão em pé sobre uma balsa de 5×5 m. Os pesos das crianças nos pontos A , B e C são de 375 N, 260 N e 400 N, respectivamente. Se uma quarta criança de peso 425 N subir na balsa, determine onde ela deve ficar se as outras crianças permanecerem nas posições mostradas na figura e a linha de ação da resultante dos quatro pesos passar através do centro da balsa.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

REVISÃO E RESUMO

Princípio da transmissibilidade

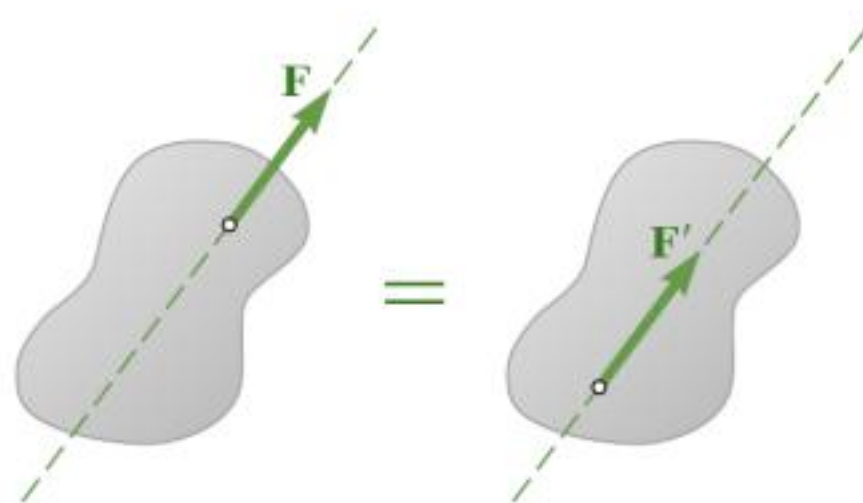


Figura 3.48

Neste capítulo estudamos o efeito das forças exercidas sobre um corpo rígido. Primeiro, aprendemos a distinguir forças *externas* e forças *internas* [Seção 3.2] e vimos que, de acordo com o *princípio da transmissibilidade*, o efeito de uma força externa sobre um corpo rígido permanece inalterado se essa força for movida ao longo da sua linha de ação [Seção 3.3]. Em outras palavras, duas forças \mathbf{F} e \mathbf{F}' que atuem sobre um corpo rígido em dois pontos diferentes terão o mesmo efeito sobre esse corpo se tiverem a mesma intensidade, a mesma linha de ação e o mesmo sentido (Fig. 3.48). Duas forças assim são ditas *equivalentes*.

Antes de prosseguirmos com a discussão sobre *sistemas de forças equivalentes*, apresentamos o conceito de *produto vetorial de dois vetores* [Seção 3.4]. O produto vetorial

Produto vetorial de dois vetores

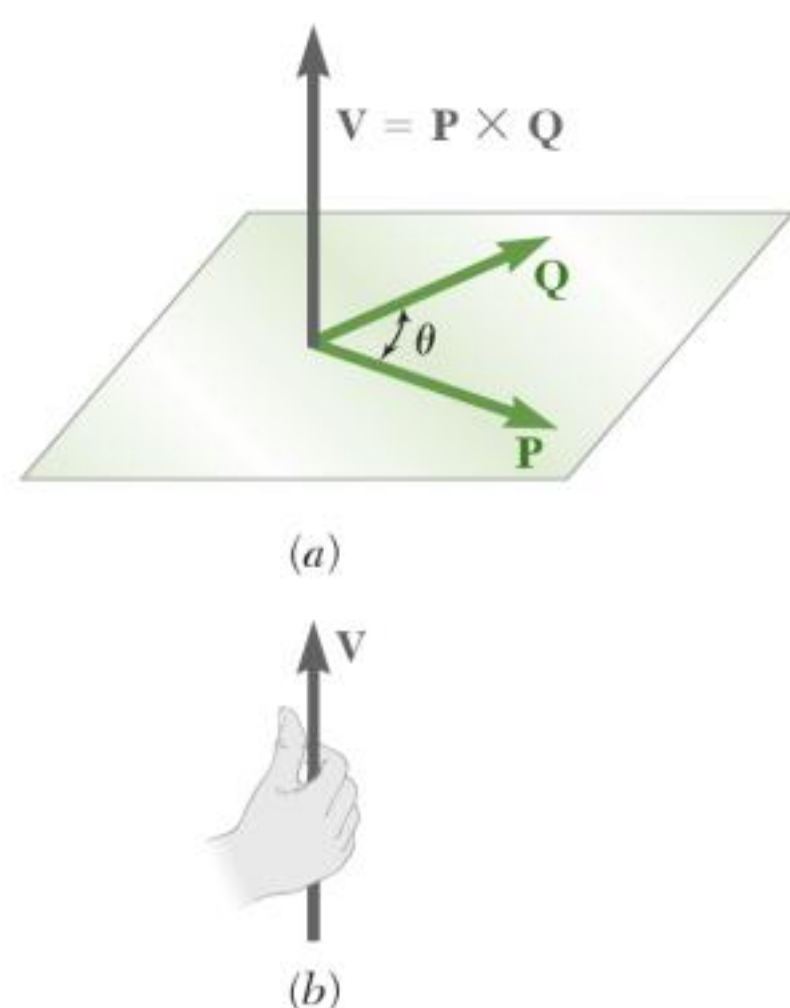


Figura 3.49

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

dos vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} foi definido como um vetor perpendicular ao plano que contém \mathbf{P} e \mathbf{Q} . (Fig. 3.49), de intensidade

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

e direcionado de modo que uma pessoa localizada na ponta de \mathbf{V} observará como anti-horária a rotação ao longo de θ que faz o vetor \mathbf{P} ficar alinhado com o vetor \mathbf{Q} . Os três vetores \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{V} – tomados nessa ordem – formam uma *tríade orientada diretamente*. Segue-se que os produtos vetoriais $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ são representados por vetores opostos. Temos

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Segue-se também da definição de produto vetorial de dois vetores que os produtos vetoriais dos vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

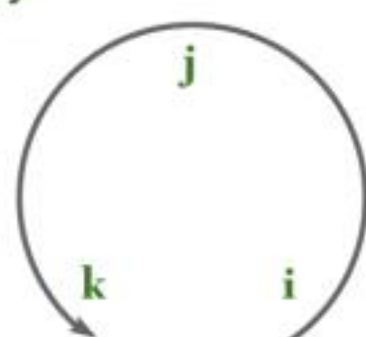


Figura 3.50

e assim por diante. O sinal do produto vetorial de dois vetores unitários pode ser obtido arranjando-se as três letras que representam os vetores unitários em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.50): o produto vetorial de dois vetores unitários será positivo se seguirem um ao outro em ordem anti-horária, e negativo se seguirem um ao outro em ordem horária.

Os *componentes retangulares do produto vetorial* \mathbf{V} de dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} são expressos [Seção 3.5] como:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Usando um determinante, temos também:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Componentes retangulares do produto vetorial



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

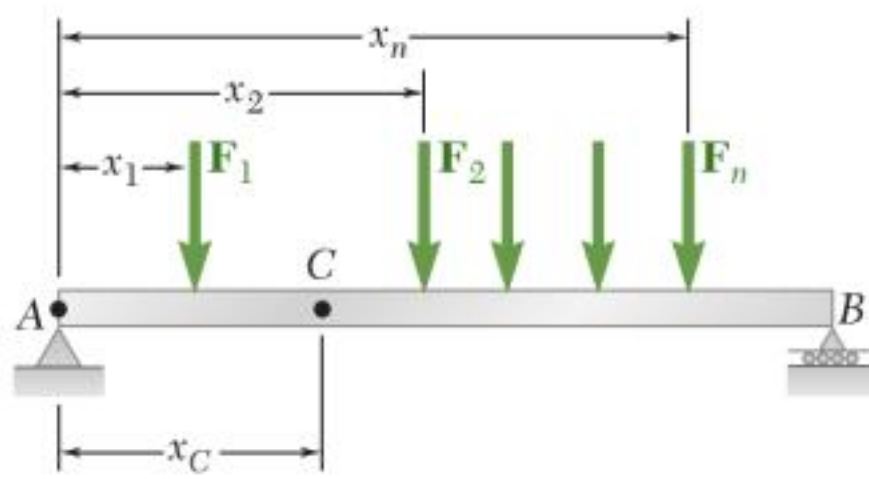


Figura P3.C1

3.C1 Uma viga AB está sujeita a várias forças verticais, como mostra a figura. Usando um aplicativo computacional determine a intensidade da resultante das forças e a distância x_c até o ponto C , o ponto em que a linha de ação da resultante intercepta AB . Use esse programa para resolver (a) o Problema Resolvido 3.8c (b) o Problema 3.106.

3.C2 Usando um aplicativo computacional determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante das forças verticais P_1, P_2, \dots, P_n , que atuam nos pontos A_1, A_2, \dots, A_n , que estão localizados no plano xz . Use esse programa para resolver (a) o Problema Resolvido 3.11, (b) o Problema 3.127, (c) o Problema 3.129.

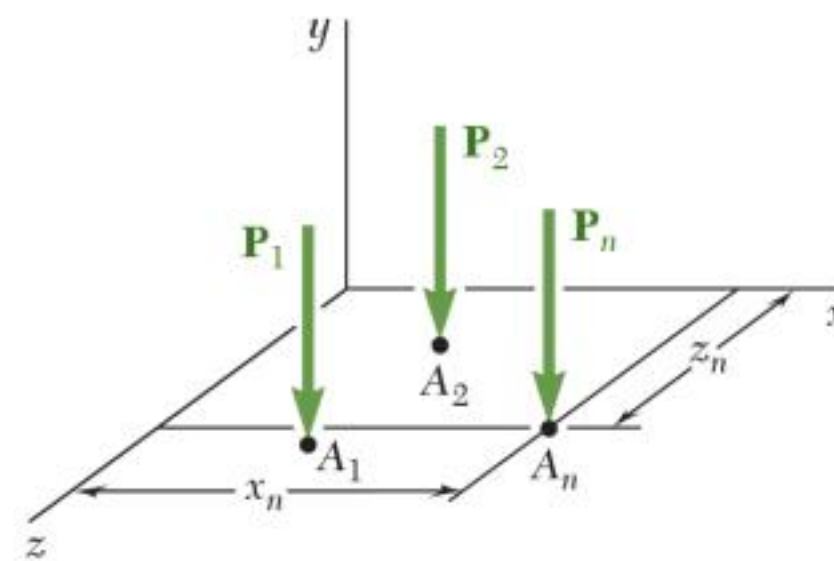


Figura P3.C2

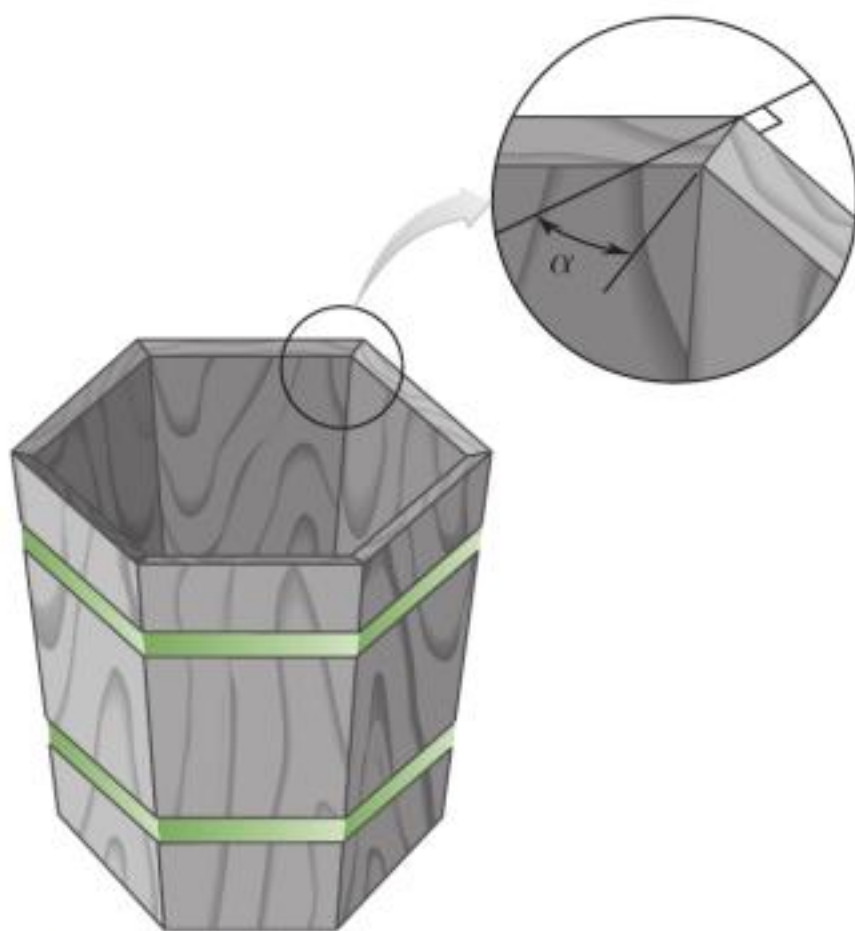


Figura P3.C3

3.C3 Um amigo lhe pede ajuda em um projeto de vasos para o plantio de flores. Os vasos devem ter 4, 5, 6 ou 8 lados, com inclinações para fora de 10° , 20° ou 30° . Usando um aplicativo computacional determine o ângulo de chanfro α para cada um dos doze projetos de vaso. (Dica: o ângulo de chanfro α é igual à metade do ângulo formado pelas normais internas de dois lados adjacentes.)

3.C4 Um fabricante de enrolador para mangueiras quer determinar o momento da força F sobre o eixo AA' . A intensidade da força em newtons é definida pela relação $F = 300(1 - x/L)$, onde x é o comprimento da mangueira dobrada num suporte de diâmetro de 0,6 m e L é o comprimento total da mangueira. Usando um aplicativo computacional calcule o momento requerido para uma mangueira de 30 m de comprimento e 50 mm de diâmetro. Iniciando com $x = 0$, calcule o momento após cada revolução do enrolador até que a mangueira esteja totalmente enrolada no suporte.

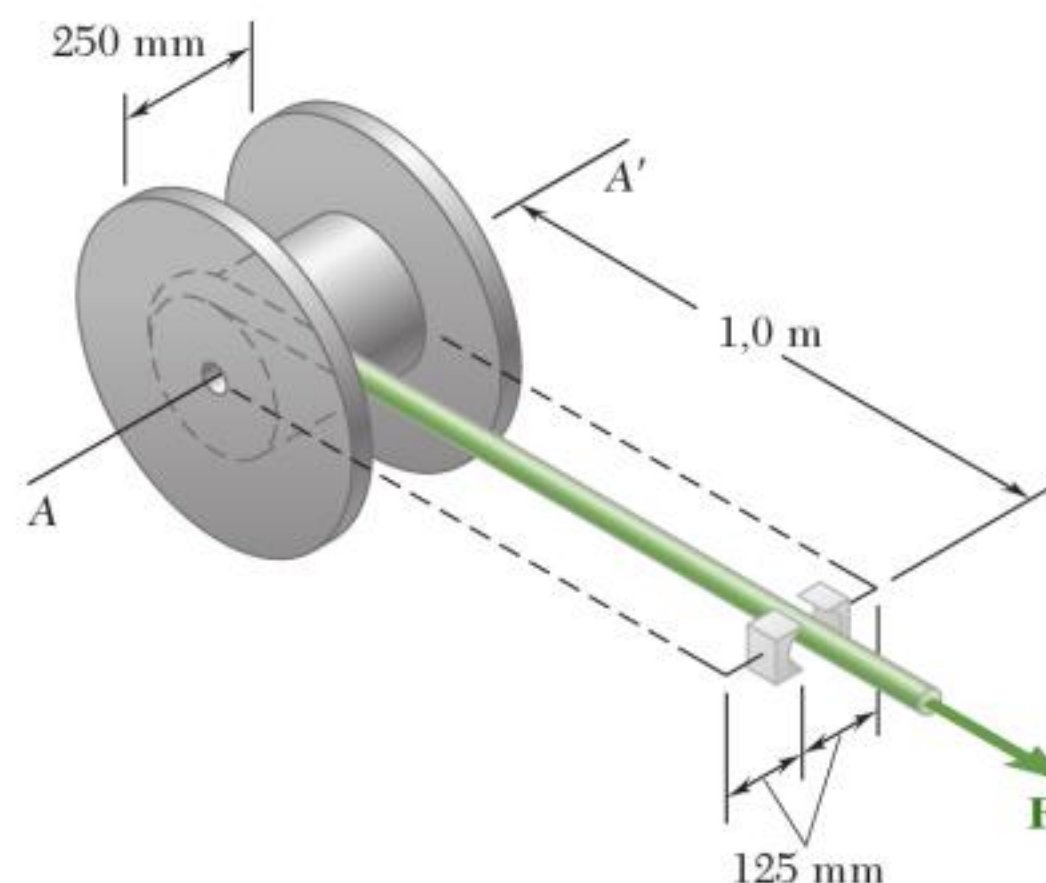


Figura P3.C4



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4

Equilíbrio de corpos rígidos

- 4.1 Introdução
- 4.2 Diagrama de corpo livre
- 4.3 Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional
- 4.4 Equilíbrio de um corpo rígido em duas dimensões
- 4.5 Reações estaticamente indeterminadas e vinculações parciais
- 4.6 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de duas forças
- 4.7 Equilíbrio de um corpo sujeito à ação de três forças
- 4.8 Equilíbrio de um corpo rígido em três dimensões
- 4.9 Reações em apoios e conexões para uma estrutura tridimensional

4.1 Introdução

Vimos no capítulo anterior que as forças externas exercidas sobre um corpo rígido podem ser reduzidas a um sistema força-binário em algum ponto arbitrário O . Quando a força e o binário são iguais a zero, as forças externas formam um sistema equivalente a zero, e diz-se que o corpo rígido está em *equilíbrio*.

As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido, portanto, podem ser obtidas estabelecendo-se \mathbf{R} e \mathbf{M}_O^R iguais a zero nas relações (3.52) da Seção 3.17:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Decompondo cada força e cada momento em seus componentes retangulares, podemos indicar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido com as seis equações escalares seguintes:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Podem-se utilizar as equações obtidas para determinar forças desconhecidas aplicadas ao corpo rígido ou reações desconhecidas exercidas sobre ele por seus apoios. Notamos que as Eqs. (4.2) provam o fato de que os componentes das forças externas nas direções x , y e z estão equilibradas; já as Eqs. (4.3) indicam o fato de que os momentos das forças externas em torno dos eixos x , y e z estão equilibrados. Portanto, para um corpo rígido em equilíbrio, o sistema de forças externas não causa qualquer movimento translacional ou rotacional ao corpo considerado.

Para escrever as equações de equilíbrio para um corpo rígido, é essencial primeiro identificar todas as forças que atuam sobre esse corpo e, então, desenhar o *diagrama de corpo livre* correspondente. Neste capítulo consideramos primeiro o equilíbrio de *estruturas bidimensionais* sujeitas a forças contidas em seus planos e aprendemos como desenhar seus diagramas de corpo livre. Além das forças *exercidas* numa estrutura, vamos estudar as *reações* exercidas sobre a estrutura por seus apoios. Uma reação específica será associada a cada tipo de apoio. Iremos aprender como determinar se a estrutura está adequadamente apoiada, de modo que possamos saber antecipadamente se as equações de equilíbrio podem ser resolvidas para forças e reações desconhecidas.

Mais adiante neste capítulo, trataremos do equilíbrio de estruturas tridimensionais, e o mesmo tipo de análise será feito para essas estruturas e seus apoios.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4.4 Equilíbrio de um corpo rígido em duas dimensões

As condições estabelecidas na Seção 4.1 para o equilíbrio de um corpo rígido tornam-se consideravelmente mais simples para o caso de uma estrutura bidimensional. Escolhendo os eixos x e y no plano da estrutura, temos

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

para cada uma das forças aplicadas à estrutura. Portanto, as seis equações de equilíbrio deduzidas na Seção 4.1 se reduzem a

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0 \quad (4.4)$$

e as três identidades triviais, $0 = 0$. Como $\Sigma M_O = 0$, deve ser satisfeita independentemente da escolha da origem O , podemos escrever as equações de equilíbrio para uma estrutura bidimensional na forma mais geral.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

onde A é um ponto qualquer no plano da estrutura. As três equações obtidas podem ser resolvidas para no máximo *três incógnitas*.

Vimos na seção precedente que as forças desconhecidas incluem as reações e que o número de incógnitas correspondentes a uma dada reação depende do tipo de apoio ou conexão produzido por essa reação. Retomando a Seção 4.3, observamos que as equações de equilíbrio (4.5) podem ser aplicadas para se determinar as reações produzidas por dois roletes e um cabo, um engaste, ou um rolete e um pino ajustado em furo, etc.

Considere a Fig. 4.2a, na qual a treliça mostrada está sujeita às forças dadas \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{S} . A treliça é mantida no lugar por um pino em A e um rolete em B . O pino impede o ponto A de se mover exercendo na treliça uma força que pode ser decomposta nos componentes \mathbf{A}_x e \mathbf{A}_y ; o rolete impede a rotação da treliça em torno de A exercendo a força vertical \mathbf{B} . O diagrama de corpo livre da treliça é mostrado na Fig. 4.2b que inclui as reações \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y e \mathbf{B} , assim como as forças aplicadas \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{S} e o peso \mathbf{W} da treliça. Considerando que a soma dos momentos em relação a A de todas as forças mostradas na Fig. 4.2b é igual a zero, podemos escrever a equação $\Sigma M_A = 0$, que pode ser usada para se determinar a intensidade B , uma vez que essa equação não contém A_x ou A_y . A seguir, considerando que a soma dos componentes em x e a soma dos componentes em y das forças são iguais a zero, podemos escrever as equações $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, das quais podemos obter os componentes A_x e A_y respectivamente.

Poderíamos obter uma equação adicional considerando que a soma dos momentos das forças externas em relação a um ponto diferente de A é zero, como, por exemplo, $\Sigma M_B = 0$. Tal afirmação, no entanto, não contém qualquer informação nova, pois já foi estabelecido que o sistema de forças mostrado na Fig. 4.2b é equivalente a zero. A equação adicional *não é independente* e não pode ser usada para se determinar

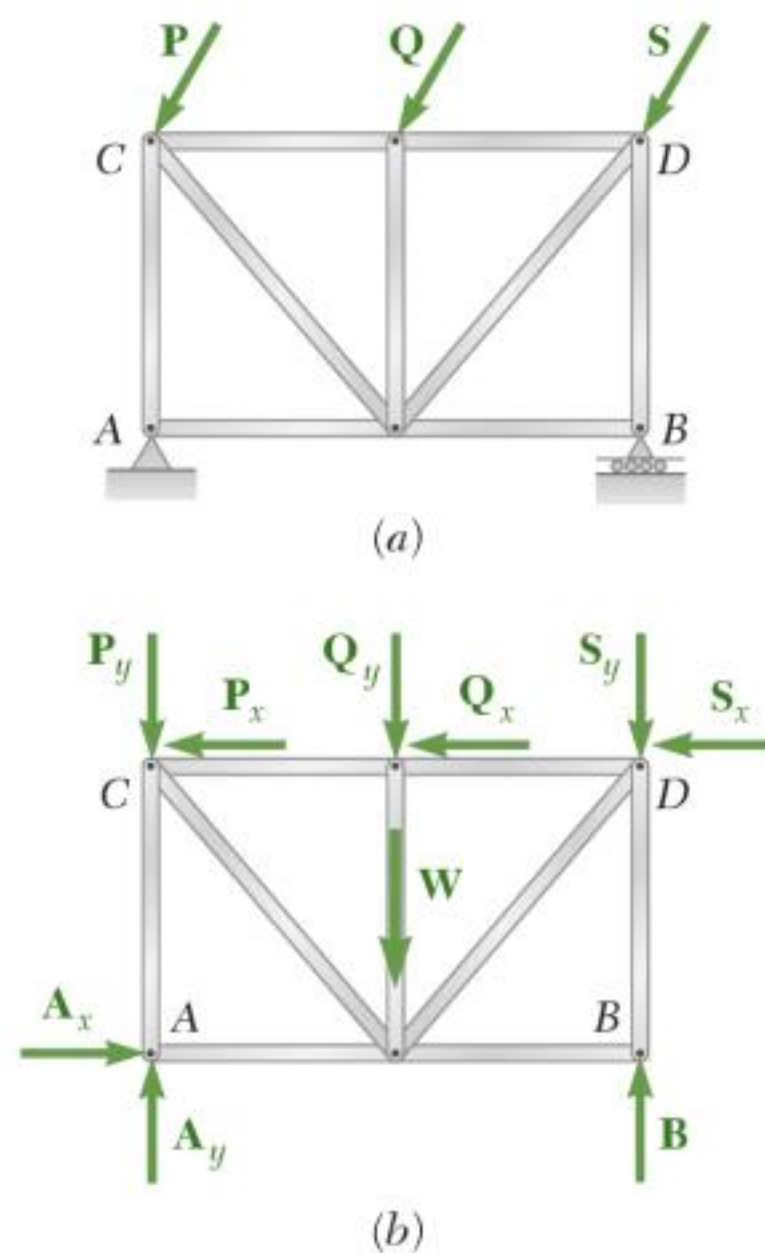


Figura 4.2



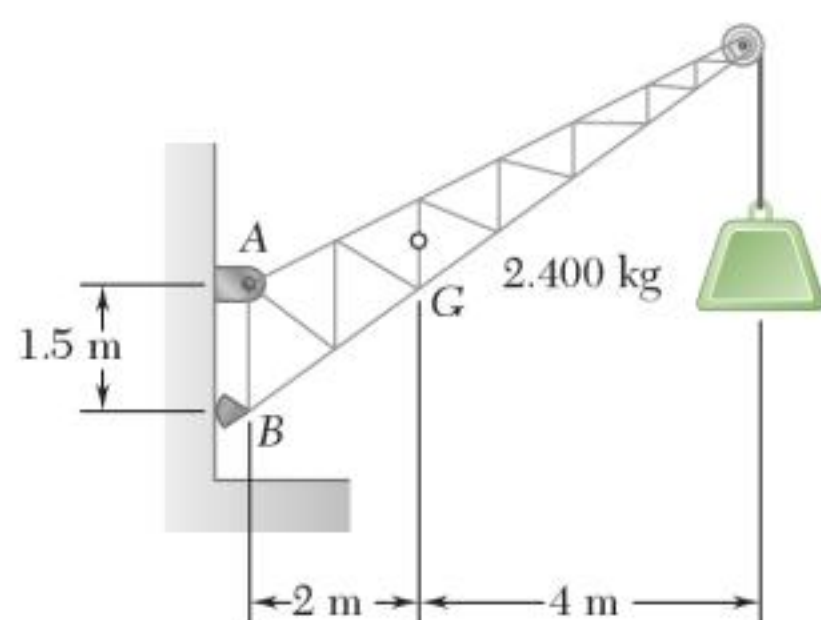
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

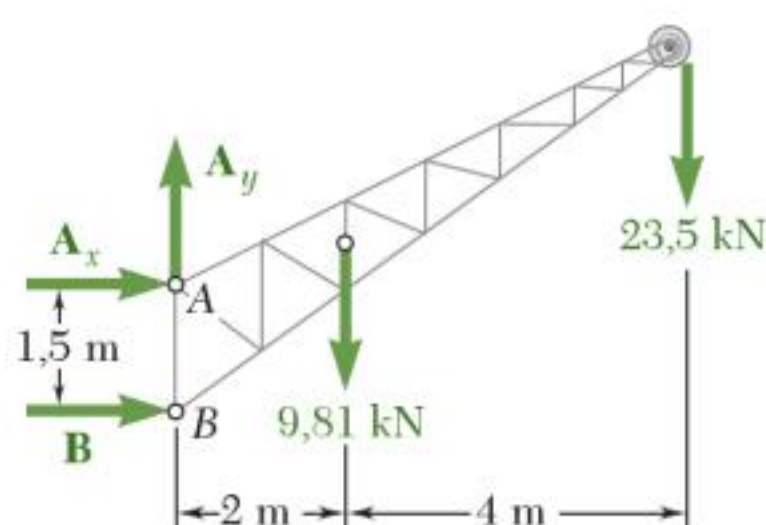


You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 4.1

Um guindaste fixo tem massa de 1.000 kg e é usado para suspender um caixote de 2.400 kg. Ele é mantido na posição indicada na figura por um pino em A e um suporte basculante em B. O centro de gravidade do guindaste está localizado em G. Determine os componentes das reações em A e B.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre do guindaste. Multiplicando as massas do guindaste e do caixote por $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, obtemos os pesos correspondentes, ou seja, 9.810 N, ou 9,81 kN, e 23.500 N, ou 23,5 kN. A reação no pino A é uma força de direção desconhecida e é representada por seus componentes A_x e A_y . A reação no suporte basculante B é perpendicular à superfície deste; portanto, ela é horizontal. Admitimos que A_x , A_y e B atuam nas direções e sentidos mostrados.

Cálculo de B. Expressamos que a soma dos momentos de todas as forças em relação ao ponto A é zero. A equação obtida não conterá A_x nem A_y , pois os momentos de A_x e A_y em relação a A são nulos. Multiplicando a intensidade de cada força por sua distância perpendicular a partir de A, temos:

$$+\uparrow \Sigma M_A = 0: \quad +B(1,5 \text{ m}) - (9,81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23,5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$

$$B = +107,1 \text{ kN} \quad \mathbf{B = 107,1 \text{ kN} \rightarrow \blacktriangleleft}$$

Como o resultado é positivo, a reação tem a direção que lhe atribuímos anteriormente.

Cálculo de A_x . Determina-se a intensidade de A_x expressando-se que a soma dos componentes horizontais de todas as forças externas é nula.

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x + 107,1 \text{ kN} = 0$$

$$A_x = -107,1 \text{ kN} \quad \mathbf{A_x = 107,1 \text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft}$$

Como o resultado é negativo, o sentido de A_x é oposto ao assumido originalmente.

Cálculo de A_y . A soma dos componentes verticais também deve ser nula.

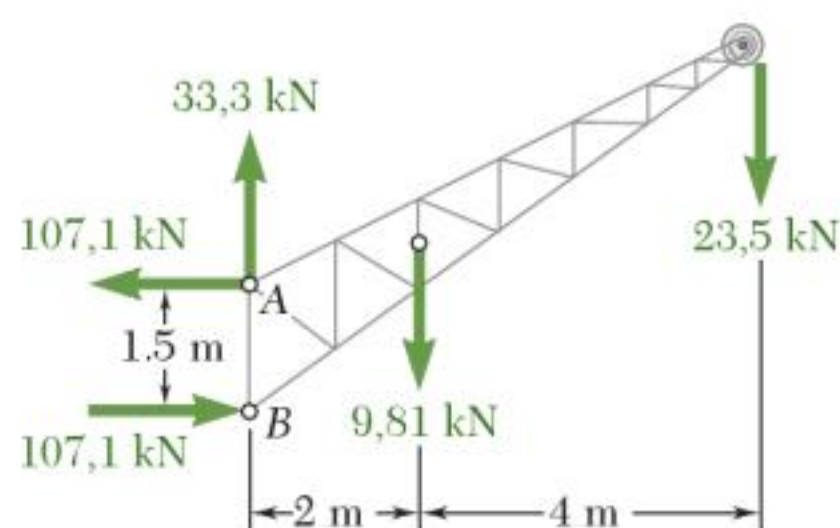
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 9,81 \text{ kN} - 23,5 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33,3 \text{ kN} \quad \mathbf{A_y = 33,3 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft}$$

Adicionando vetorialmente os componentes A_x e A_y , descobrimos que a reação em A é 112,2 kN $\searrow 17,3^\circ$.

Verificação. Os valores obtidos para as reações podem ser verificados recordando-se que a soma dos momentos de todas as forças externas em relação a qualquer ponto deve ser nula. Por exemplo, considerando-se o ponto B, temos:

$$+\uparrow \Sigma M_B = -(9,81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23,5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107,1 \text{ kN})(1,5 \text{ m}) = 0$$





You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vimos que as forças externas aplicadas sobre um corpo rígido em equilíbrio formam um sistema de forças equivalente a zero. Para resolver um problema de equilíbrio, sua primeira tarefa é traçar um *diagrama de corpo livre* claro e em uma escala adequada, no qual você irá representar todas as forças externas e as dimensões relevantes. Tanto as forças conhecidas quanto as forças desconhecidas devem ser incluídas.

Para um corpo rígido bidimensional, as reações nos apoios podem envolver uma, duas ou três incógnitas, dependendo do tipo de apoio (Fig. 4.1). Para uma solução bem-sucedida de um problema, um diagrama de corpo livre correto é essencial. Nunca devemos prosseguir com a solução de um problema enquanto não estivermos seguros de que seu diagrama de corpo livre inclui todas as cargas, todas as reações e o peso do corpo (se for o caso).

1. Podemos escrever três equações de equilíbrio e resolvê-las para três *incógnitas*. As três equações podem ser:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

Porém, há geralmente vários conjuntos de equações que podem ser escritos, tais como

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$$

onde o ponto *B* é escolhido de modo que a linha *AB* não seja paralela ao eixo *y*, ou

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$$

onde os pontos *A*, *B* e *C* não devem ser colineares.

2. Para simplificar a solução, pode ser útil aplicar uma das seguintes técnicas de solução, se for aplicável:

- a.** Pela soma dos momentos em relação ao ponto de interseção das linhas de ação de duas forças desconhecidas, obteremos uma equação com uma única incógnita.
- b.** Pela soma dos componentes numa direção perpendicular a duas forças desconhecidas paralelas, obteremos uma equação com uma única incógnita.

3. Depois de traçar seu diagrama de corpo livre, podemos encontrar uma das seguintes situações especiais:

- a.** As reações envolvem menos que três incógnitas, o corpo é considerado *parcialmente vinculado* e seu movimento é possível.
- b.** As reações envolvem mais que três incógnitas: as reações são consideradas *estaticamente indeterminadas*. Embora possamos ser capazes de calcular uma ou duas reações, não podemos determinar todas as reações.
- c.** As reações passam por um único ponto ou são paralelas: o corpo é considerado *impropriamente vinculado* e seu movimento pode ocorrer de acordo com as condições gerais de carregamento.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4.23 e 4.24 Para cada uma das placas e carregamentos mostrados nas figuras, determine as reações em A e B.

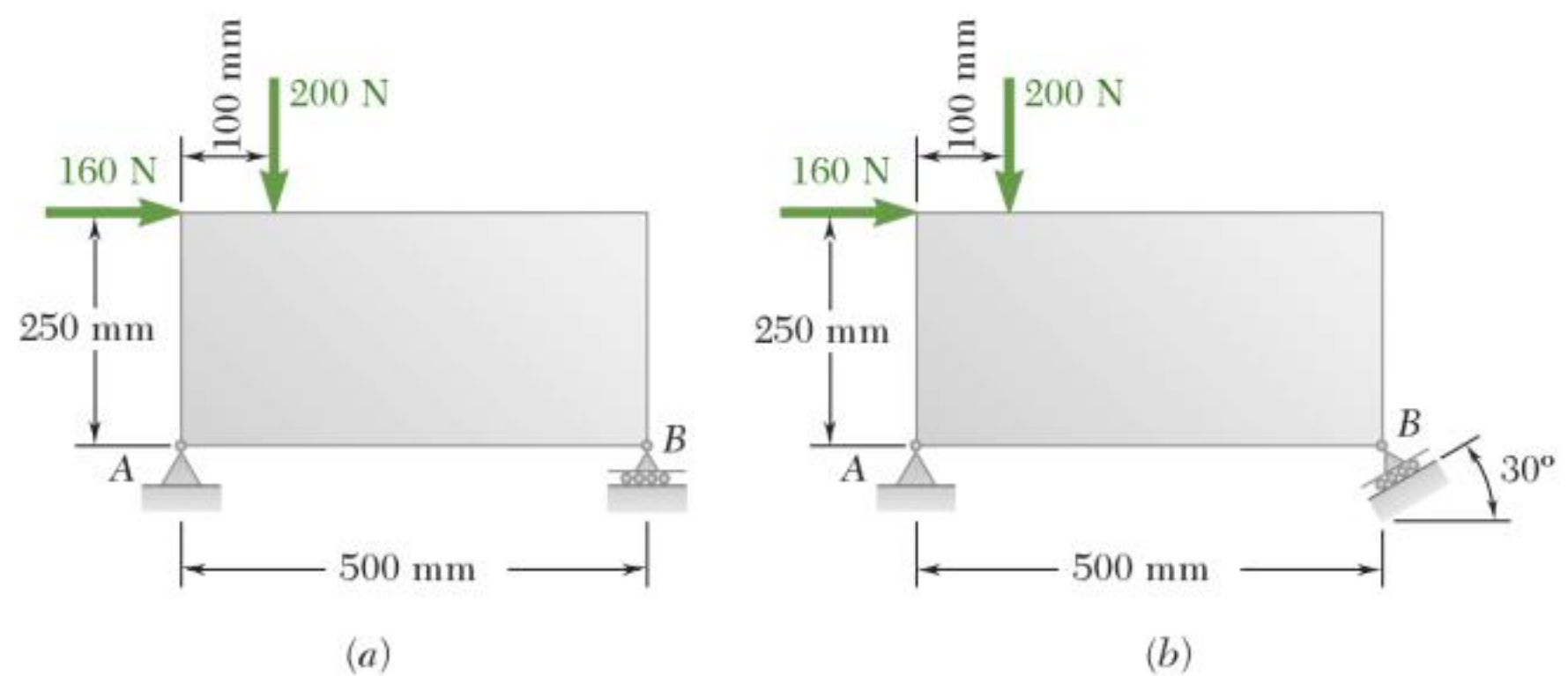


Figura P4.23

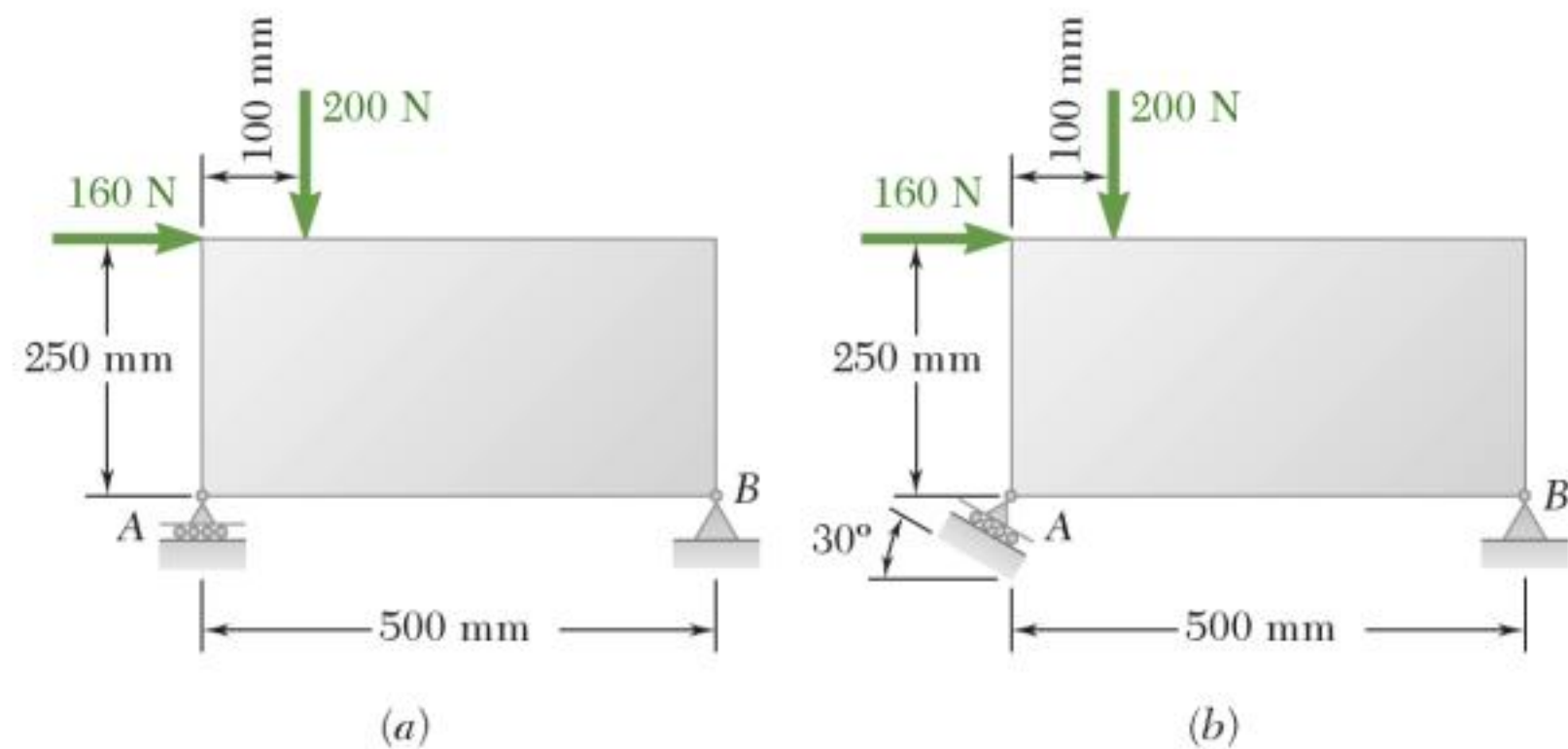


Figura P4.24

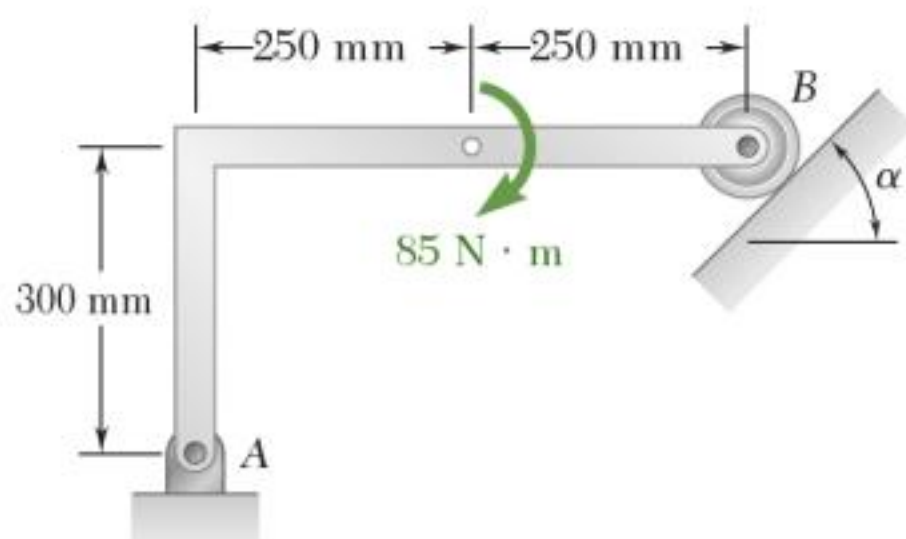


Figura P4.25

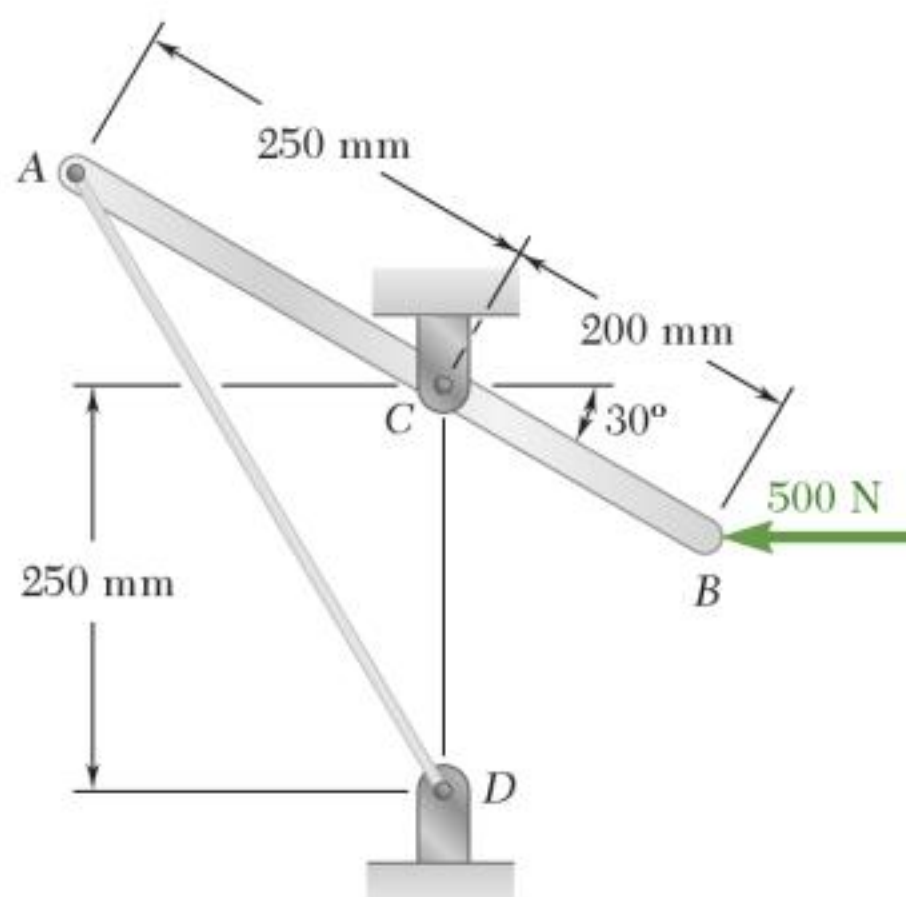


Figura P4.28

4.25 Determine as reações em A e B quando (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 90^\circ$.

4.26 A barra AB, articulada em A e presa em B ao cabo BD, suporta as cargas mostradas nas figuras. Sabendo que $d = 200$ mm, determine (a) a tração no cabo BD, (b) a reação em A.

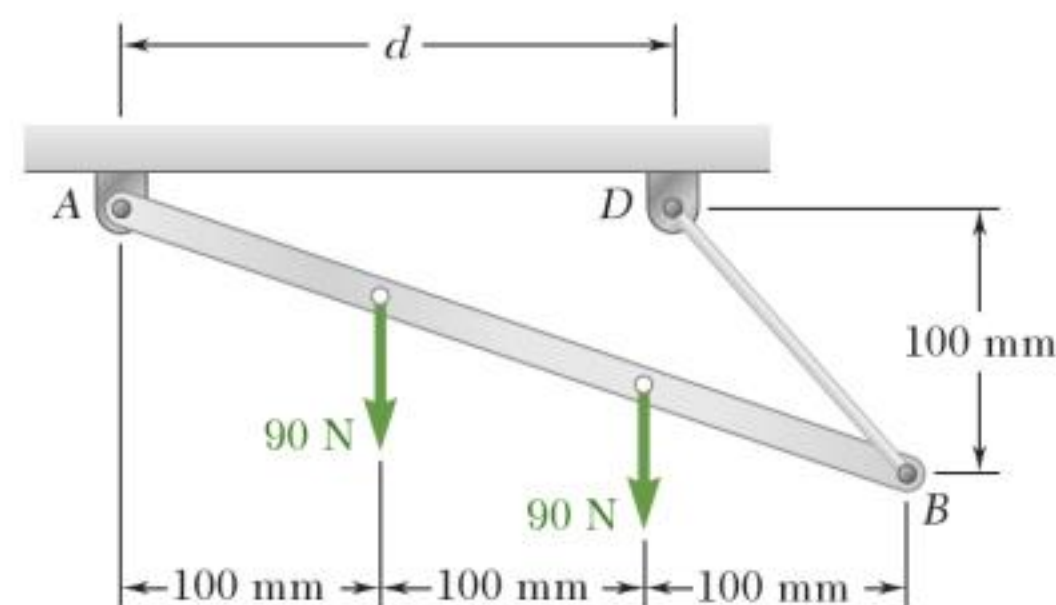


Figura P4.26 e P4.27

4.27 A haste AB, articulada em A e presa em B ao cabo BD, suporta as cargas mostradas na figura. Sabendo que $d = 150$ mm, determine (a) a tração no cabo BD, (b) a reação em A.

4.28 A alavanca AB é articulada em C e presa ao cabo de controle em A. Se a alavanca é sujeita a uma força horizontal de 500 N em B, determine (a) a tração no cabo, (b) a reação em C.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



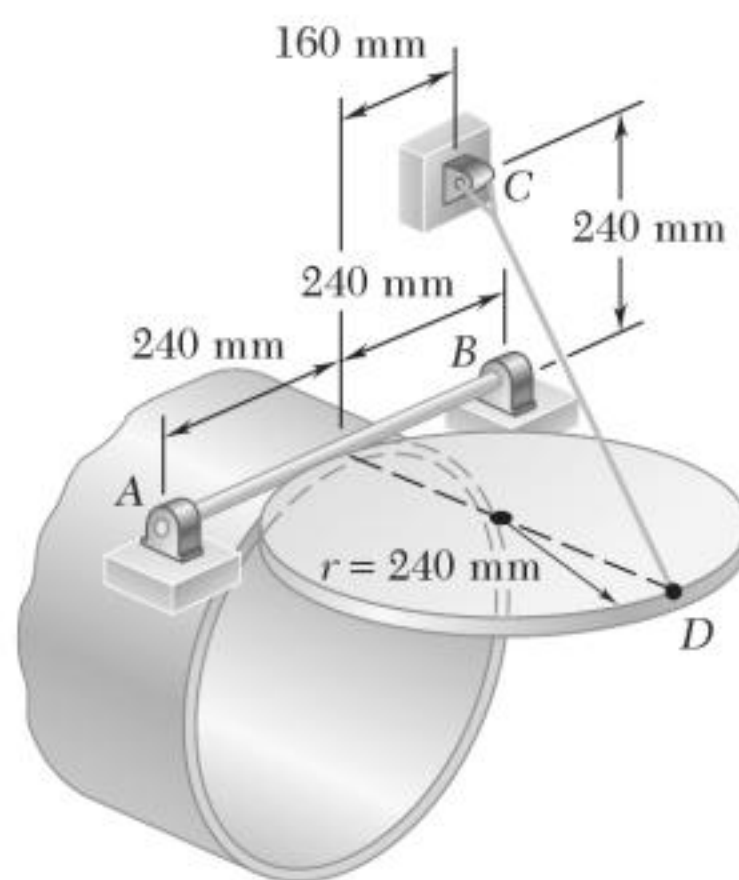
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 4.9

Uma tampa de tubulação de raio $r = 240$ mm e 30 kg de massa é mantida na posição horizontal pelo cabo CD . Considerando que o mancal em B não exerce qualquer empuxo axial, determine a tração no cabo e as reações em A e B .

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Um diagrama de corpo livre é desenhado com os eixos coordenados mostrados na figura. As forças que atuam no corpo livre são o peso da tampa

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(30 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294 \text{ N})\mathbf{j}$$

e as relações que envolvem seis incógnitas, a saber, a intensidade da força \mathbf{T} exercida pelo cabo, três componentes da força na articulação A e dois na articulação B . Os componentes \mathbf{T} são expressos em termos de intensidade desconhecida T decompondo-se o vetor \overrightarrow{DC} em componentes retangulares, da seguinte maneira

$$\overrightarrow{DC} = -(480 \text{ mm})\mathbf{i} + (240 \text{ mm})\mathbf{j} - (160 \text{ mm})\mathbf{k} \quad DC = 560 \text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T \frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k}$$

Equação de equilíbrio. Demonstramos que as forças exercidas na tampa de tubulação formam um sistema equivalente a zero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x + B_x - \frac{6}{7}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \frac{3}{7}T - 294 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{7}T)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_B = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$2r\mathbf{k} \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(-2A_y - \frac{3}{7}T + 294 \text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \frac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\frac{6}{7}T - 294 \text{ N})r\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Tornando os coeficientes dos vetores unitários iguais a zero na Eq. (2) obtemos três equações escalares, que resultam em

$$A_x = +49,0 \text{ N} \quad A_y = +73,5 \text{ N} \quad T = 343 \text{ N}$$

Estabelecendo os coeficientes dos vetores unitários iguais a zero na Eq. (1), obtemos mais três equações escalares. Depois de substituir os valores de T , A_x e A_y nessas equações, obtemos:

$$A_z = +98,0 \text{ N} \quad B_x = +245 \text{ N} \quad B_y = +73,5 \text{ N}$$

As reações A e B são, portanto:

$$\mathbf{A} = +(49,0 \text{ N})\mathbf{i} + (73,5 \text{ N})\mathbf{j} + (98,0 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

$$\mathbf{B} = +(245 \text{ N})\mathbf{i} + (73,5 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 4.115** Uma placa retangular uniforme de 100 kg de massa é sustentada na posição mostrada na figura pelas dobradiças A e B e pelo cabo DCE , que passa por um gancho sem atrito em C . Considerando que a tração é a mesma em ambas as partes do cabo, determine (a) a tração no cabo, (b) as reações em A e B . Considere que a dobradiça em B não exerce qualquer esforço axial.

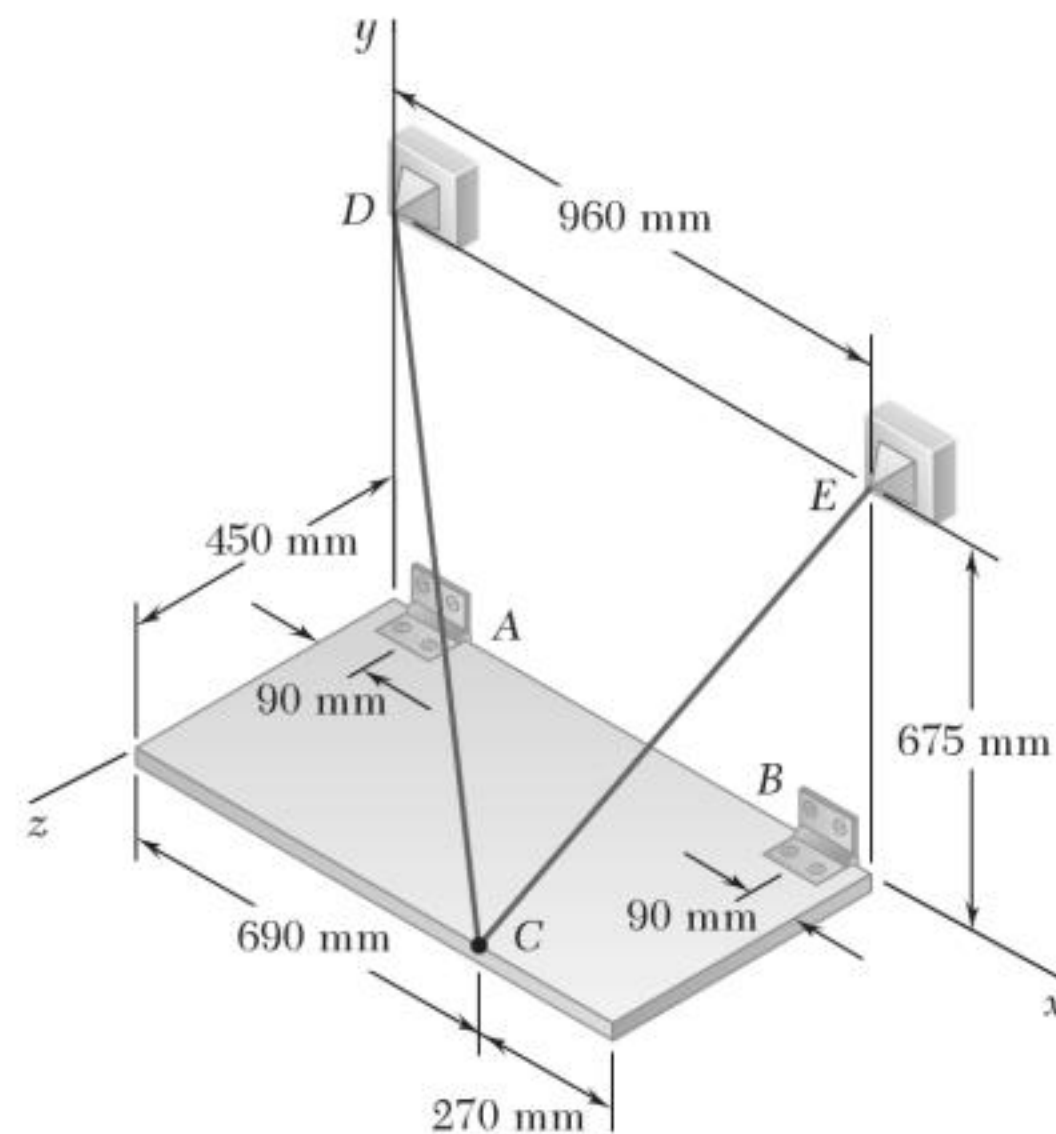


Figura P4.115

- 4.116** Resolva o Problema 4.115, considerando que o cabo DCE é substituído por um cabo preso no ponto E e no gancho em C .
- 4.117** A placa retangular mostrada na figura tem peso de 300 N e é mantida na posição mostrada pelas dobradiças A e B e pelo cabo EF . Considerando que a dobradiça em B não exerce qualquer esforço axial, determine (a) a tração no cabo e (b) as reações em A e B .

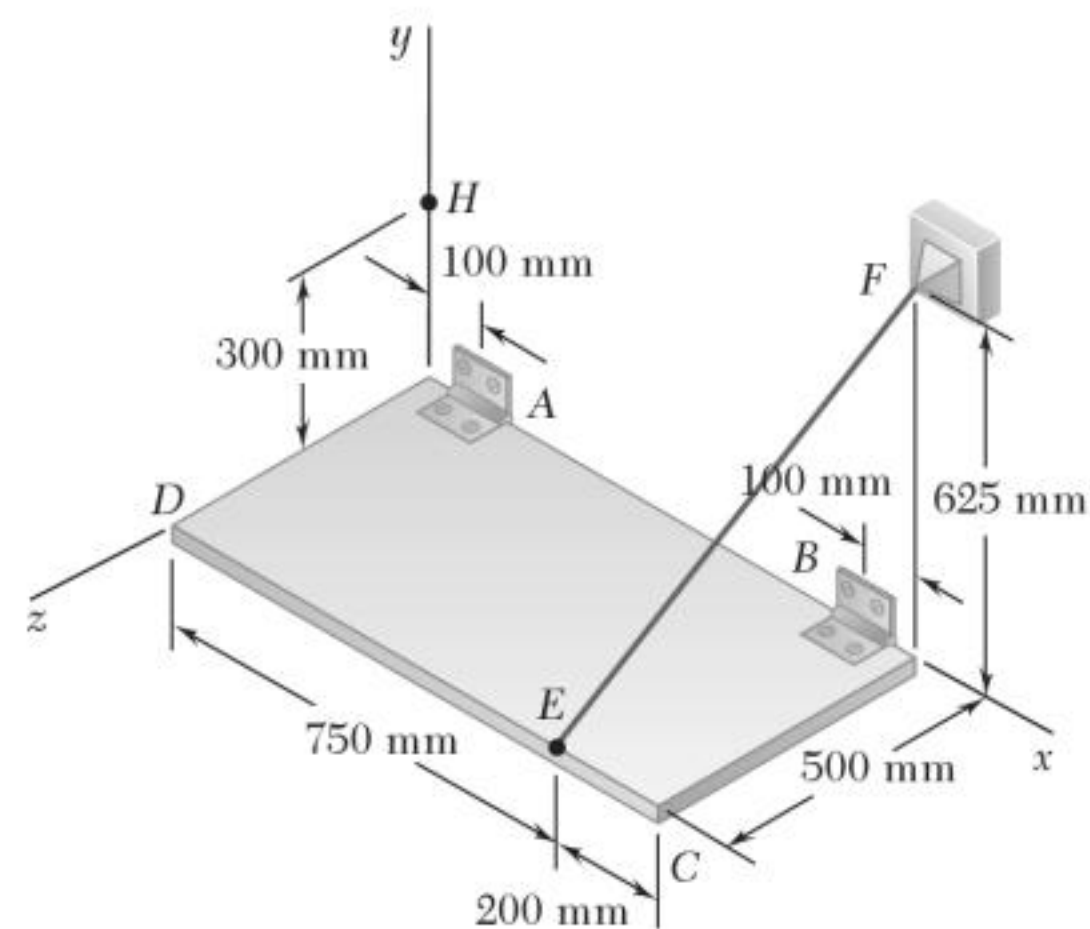


Figura P4.117

- 4.118** Resolva o Problema 4.117, considerando que o cabo EF é substituído por um cabo preso aos pontos E e H .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 4.132** Uma haste uniforme de massa de 10 kg AB é sustentada por uma rótula em A e por uma corda CG que é presa no ponto médio G da corda. Sabendo que a barra encosta sem fricção na parede vertical em B , determine (a) a tração na corda, (b) as reações em A e B .

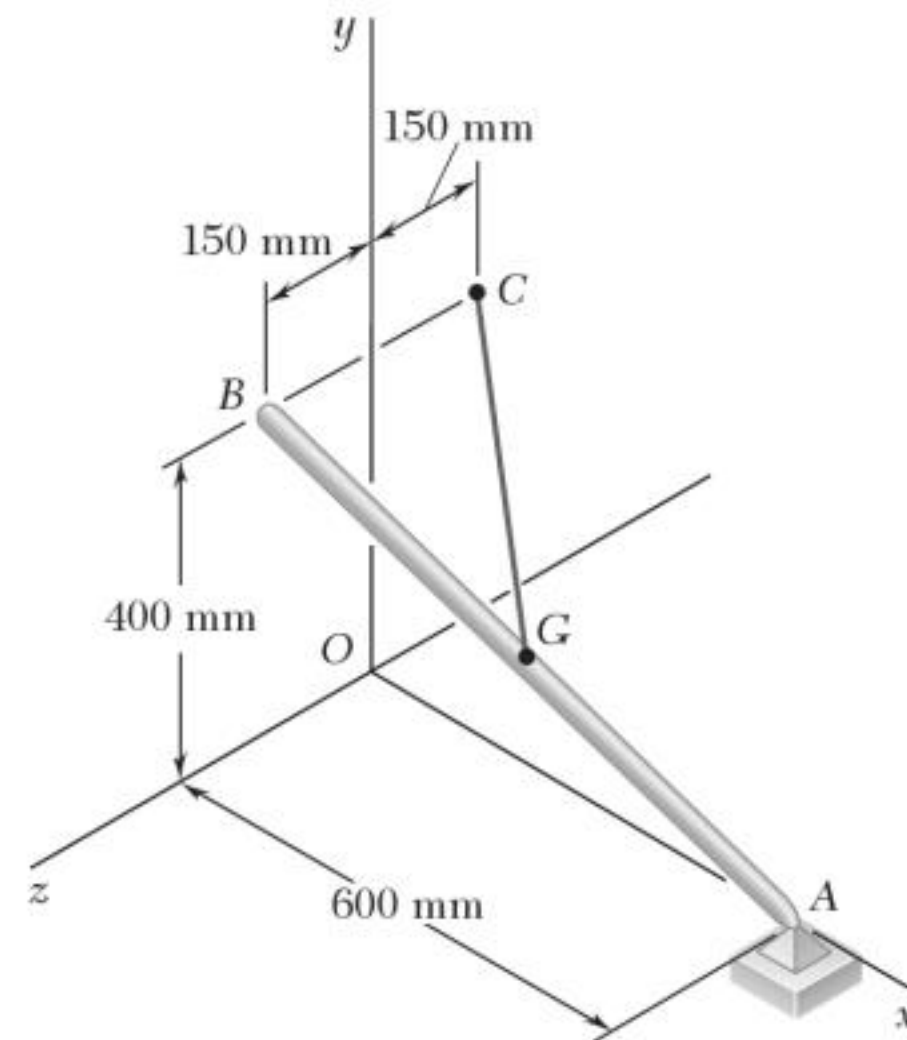


Figura P4.132

- 4.133** A haste dobrada $ABDE$ é apoiada por rótulas em A e E e pelo cabo DF . Se uma carga de 240 N é aplicada em C , tal como mostra a figura, determine a tração no cabo.

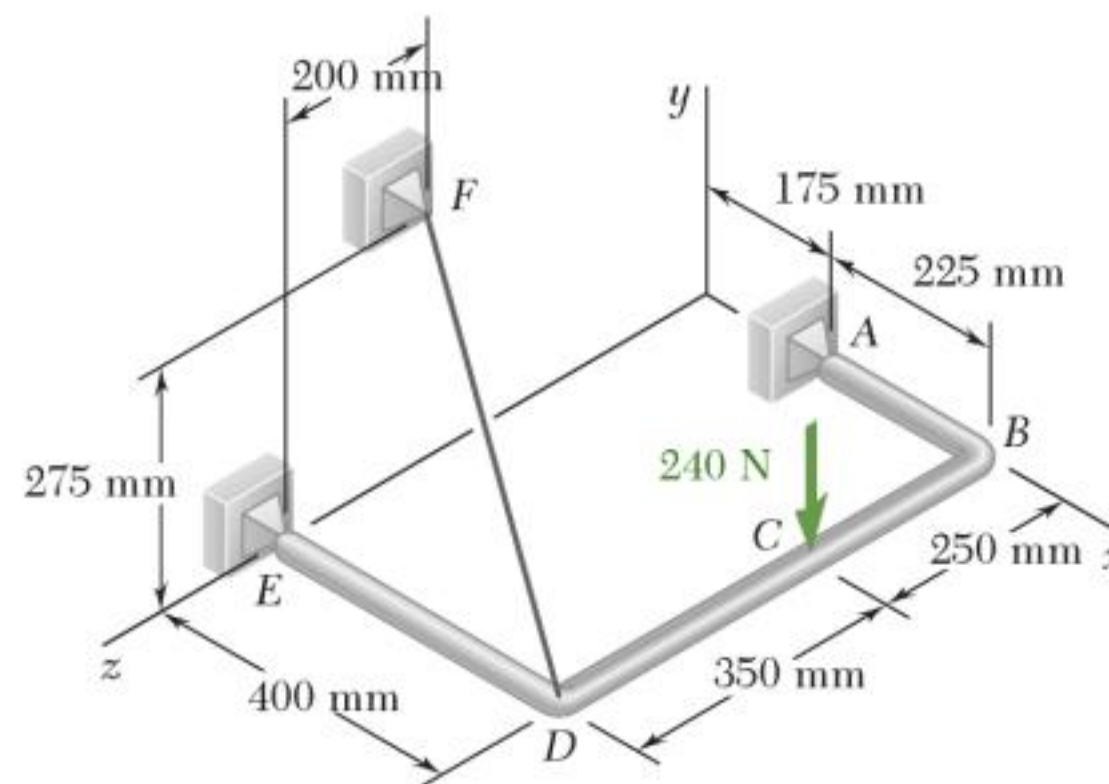


Figura P4.133

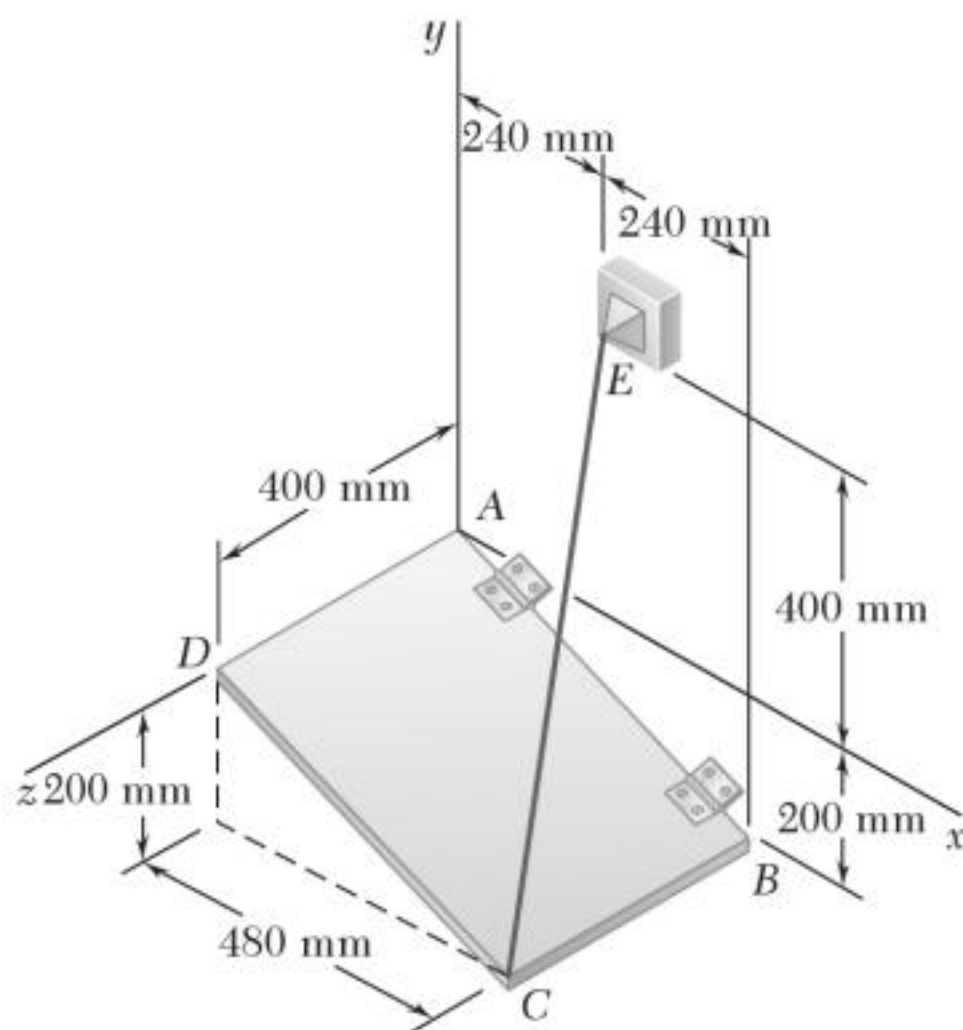


Figura P4.135

- 4.134** Resolva o Problema 4.133, considerando que o cabo DF é substituído por um cabo que conecte B e F .
- 4.135** A placa $ABCD$ de 50 kg é sustentada por dobradiças ao longo de AB e pelo arame CE . Sabendo que a placa é uniforme, determine a tração no arame.
- 4.136** Resolva o Problema 4.135, considerando que o arame CE é substituído por um arame que conecte E e D .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

equações escalares desejadas podem ser obtidas igualando-se a zero os coeficientes dos vetores unitários [Problemas Resolvidos 4.7 a 4.9].

Observamos que no máximo três componentes de reações desconhecidas podem ser eliminados dos cálculos de $\Sigma \mathbf{M}_O$ na segunda das relações (4.1) por meio de uma escolha criteriosa do ponto O . Além disso, é possível eliminar as reações em dois pontos A e B da solução de alguns problemas escrevendo-se a equação $\Sigma M_{AB} = 0$, que envolve o cálculo dos momentos das forças em relação ao eixo AB , que une os pontos A e B [Problema Resolvido 4.10].

Se as reações envolvem mais do que seis incógnitas, algumas das reações são *estaticamente indeterminadas*; se envolvem menos do que seis incógnitas, o corpo rígido é apenas *parcialmente vinculado*. Mesmo com seis ou mais incógnitas, o corpo rígido vai estar *impropriamente vinculado* se as reações associadas aos apoios dados forem paralelas ou interceptarem a mesma linha.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

4.C1 A posição da haste em forma de L mostrada na figura é controlada por um cabo preso ao ponto B . Sabendo que a haste sustenta uma carga de intensidade $P = 200 \text{ N}$, utilize um aplicativo computacional para calcular a tração T no cabo para valores de θ de 0 a 120° , usando incremento de 10° . Determine a tração máxima T e o valor correspondente de θ .

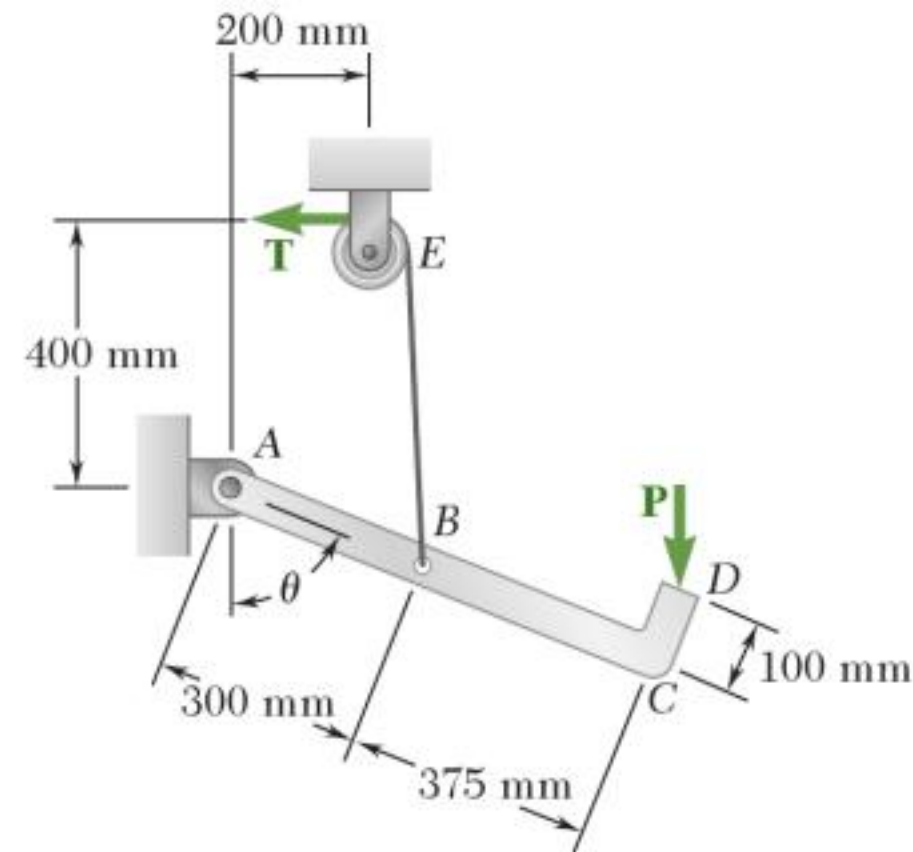


Figura P4.C1

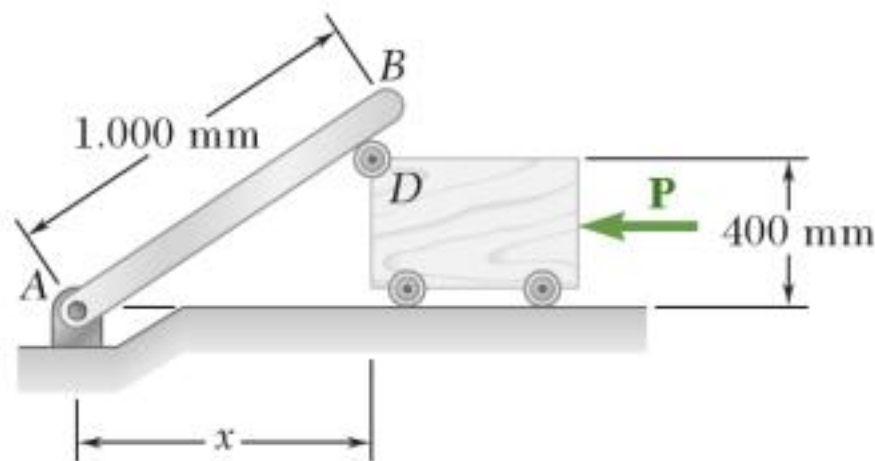


Figura P4.C2

4.C2 A posição da haste AB de massa 10 kg é controlada pelo bloco mostrado na figura, que é lentamente movimentado para a esquerda pela força P . Desprezando o efeito do atrito, utilize um aplicativo computacional para calcular a intensidade P da força para valores de x decrescendo de 750 mm a 0 usando incrementos de 50 mm . Adotando o menor incremento adequado, determine o valor máximo de P e o valor correspondente de x .

4.C3 e 4.C4 A constante da mola AB é k , e a mola não está deformada quando $\theta = 0$. Sabendo que $R = 250 \text{ mm}$, $a = 500 \text{ mm}$ e $k = 1 \text{ kN/m}$, utilize um aplicativo computacional para calcular o peso W correspondente à condição de equilíbrio para valores de θ de 0 a 90° , usando incremento de 10° . Usando o menor incremento adequado, determine o valor de θ correspondente à condição de equilíbrio quando $W = 20 \text{ N}$.

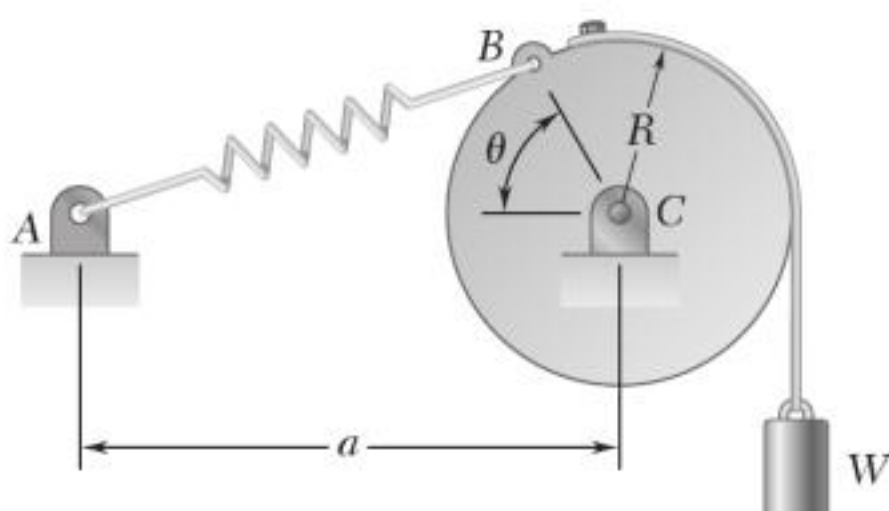


Figura P4.C3

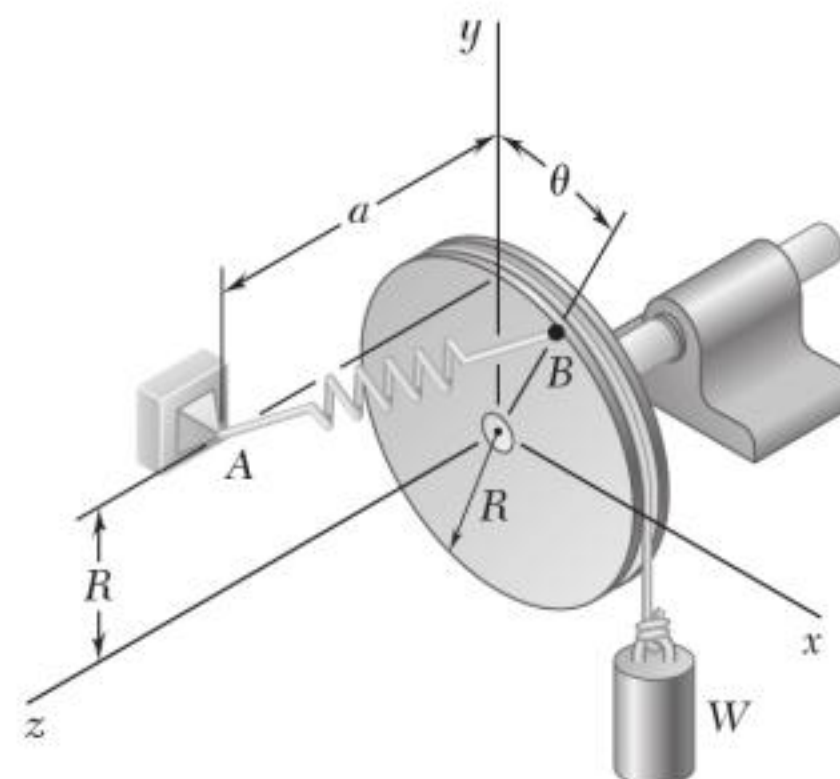


Figura P4.C4



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

5

Forças distribuídas: centroides e centros de gravidade

- 5.1 Introdução
- 5.2 Centro de gravidade de um corpo bidimensional
- 5.3 Centroides de áreas e linhas
- 5.4 Momentos de primeira ordem de áreas e linhas
- 5.5 Placas e fios compostos
- 5.6 Determinação de centroides por integração
- 5.7 Teoremas de Pappus-Guldinus
- 5.8 Cargas distribuídas sobre vigas
- 5.9 Forças sobre superfícies submersas
- 5.10 Centro de gravidade de um corpo tridimensional e centroide de um sólido
- 5.11 Corpos compostos
- 5.12 Determinação de centroides de sólidos por integração



Foto 5.1 O balanceamento preciso dos componentes de um móvel requer certo conhecimento sobre centros de gravidade e centroides, os principais tópicos deste capítulo.

5.1 Introdução

Até aqui, temos considerado que a atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido pode ser representada por uma força única \mathbf{W} . Essa força, denominada força de gravidade ou peso do corpo, era para ser aplicada no *centro de gravidade* do corpo (Seção 3.2). Na verdade, a Terra exerce uma força sobre cada uma das partículas que constituem o corpo. Logo, a ação da Terra sobre um corpo rígido deve ser representada por um grande número de pequenas forças distribuídas sobre todo o corpo. Todavia, aprenderemos neste capítulo que todas essas pequenas forças podem ser substituídas por uma força única equivalente \mathbf{W} . Também veremos como determinar o centro de gravidade, ou seja, o ponto de aplicação da resultante \mathbf{W} , para corpos de formas diversas.

Na primeira parte deste capítulo, serão levados em conta corpos bidimensionais, tais como placas planas e fios contidos em um dado plano. Serão apresentados dois conceitos estreitamente associados à determinação do centro de gravidade de uma placa ou fio: o conceito de *centroide* de uma área ou linha e o conceito de *momento de primeira ordem* de uma área ou linha em relação a um dado eixo.

Aprenderemos também que o cálculo da área de uma superfície de revolução ou do volume de um sólido de revolução está diretamente relacionado com a determinação do centroide da curva ou da superfície usada para gerar tal superfície ou sólido de revolução (Teoremas de Pappus-Guldinus). E, conforme mostram as Seções 5.8 e 5.9, a determinação do centroide de uma área simplifica a análise de vigas sujeitas a cargas distribuídas e o cálculo das forças exercidas sobre superfícies retangulares submersas, tais como comportas hidráulicas e partes de barragens.

Na parte final do capítulo, aprenderemos a determinar o centro de gravidade de um corpo tridimensional, assim como o centroide de um sólido e os momentos de primeira ordem desse sólido em relação aos planos coordenados.

ÁREAS E LINHAS

5.2 Centro de gravidade de um corpo bidimensional

Vamos considerar inicialmente uma placa plana horizontal (Fig. 5.1). Podemos dividir a placa em n pequenos elementos. As coordenadas

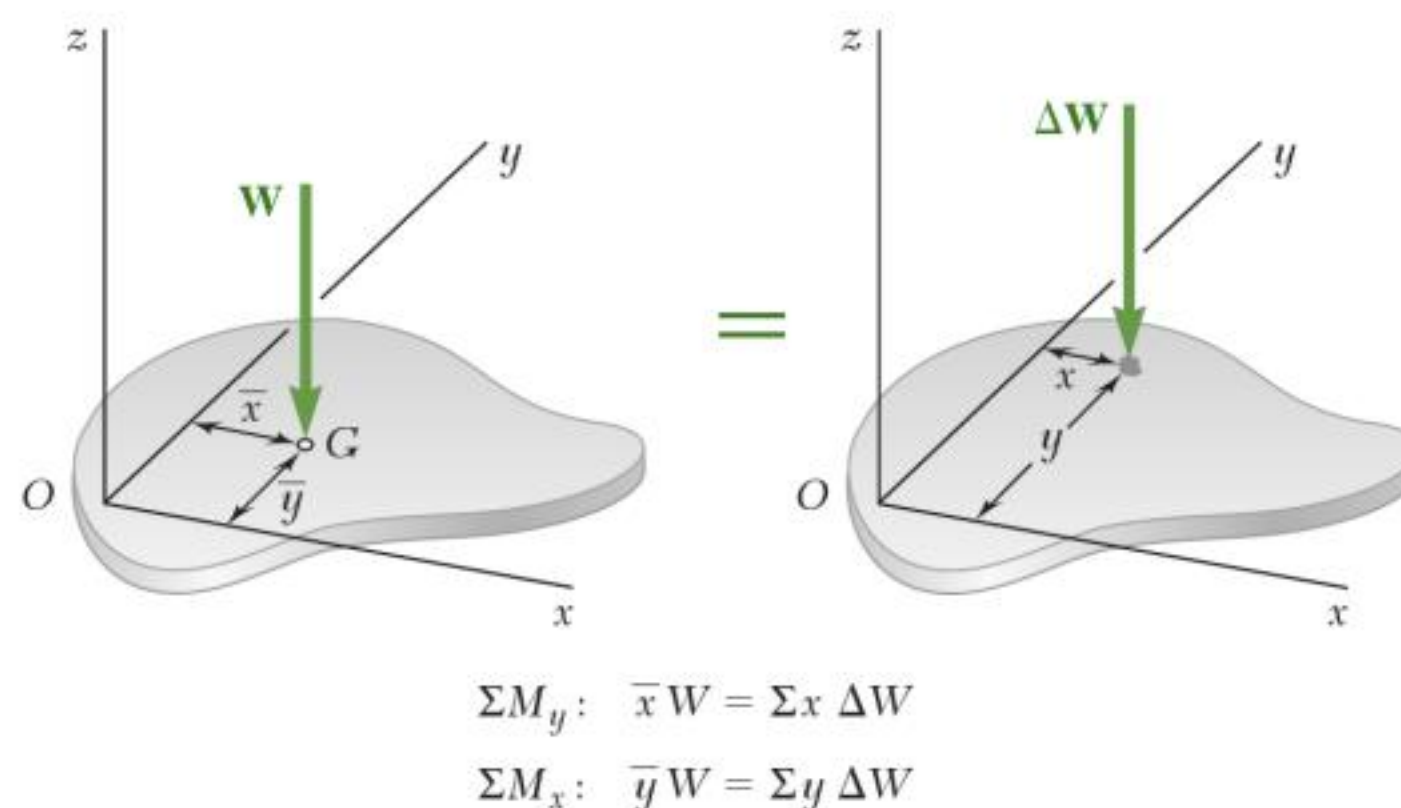


Figura 5.1 Centro da gravidade de uma placa.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



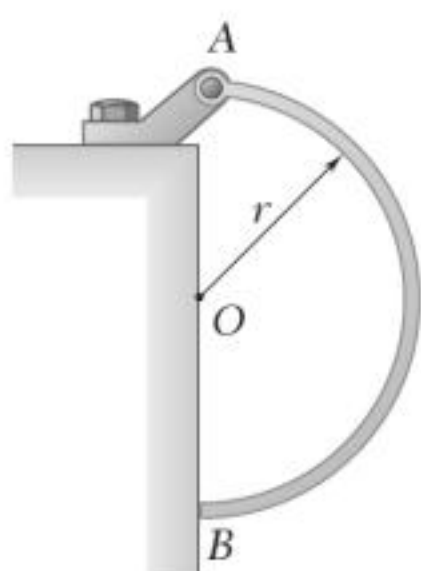
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

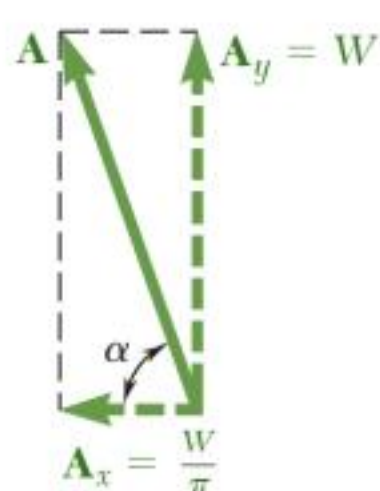
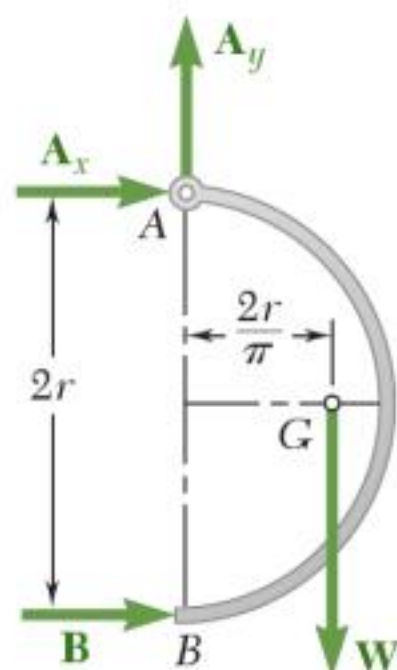


You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.3

Uma barra semicircular uniforme de peso \mathbf{W} e raio r é ligada a um pino em A e repousa sobre uma superfície sem atrito em B . Determine as reações em A e B .



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Um diagrama de corpo livre da barra é mostrado na figura. As forças exercidas sobre a barra são o peso próprio de \mathbf{W} , aplicado no centro de gravidade G (cuja posição é obtida da Fig. 5.8B); uma reação em A , representada pelos seus componentes \mathbf{A}_x e \mathbf{A}_y ; e uma reação horizontal em B .

Equação de equilíbrio.

$$+\curvearrowright \Sigma M_A = 0: \quad B(2r) - W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0$$

$$B = +\frac{W}{\pi}$$

$$\mathbf{B} = \frac{W}{\pi} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi} \quad \mathbf{A}_x = \frac{W}{\pi} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - W = 0 \quad \mathbf{A}_y = W \uparrow$$

Somando-se os dois componentes da reação em A :

$$A = \left[W^2 + \left(\frac{W}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\mathbf{A} = W \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \right)^{1/2} \blacktriangleleft$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \pi \blacktriangleleft$$

As respostas, também podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} = 1,049W \searrow 72,3^\circ \quad \mathbf{B} = 0,318W \rightarrow \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 5.20** Uma viga é composta de quatro placas aparafusadas a quatro cantoneiras de $60 \times 60 \times 12$ mm, como mostra a figura. Os parafusos são igualmente espaçados ao longo da viga, que sustenta uma carga vertical. Em mecânica dos materiais, demonstra-se que as forças de cisalhamento exercidas sobre os parafusos em *A* e *B* são proporcionais aos momentos de primeira ordem em relação ao eixo centroidal *x* das áreas sombreadas em vermelho, mostradas nas partes *a* e *b* da figura. Sabendo que a força exercida sobre o parafuso em *A* é de 280 N, determine a força exercida sobre o parafuso em *B*.

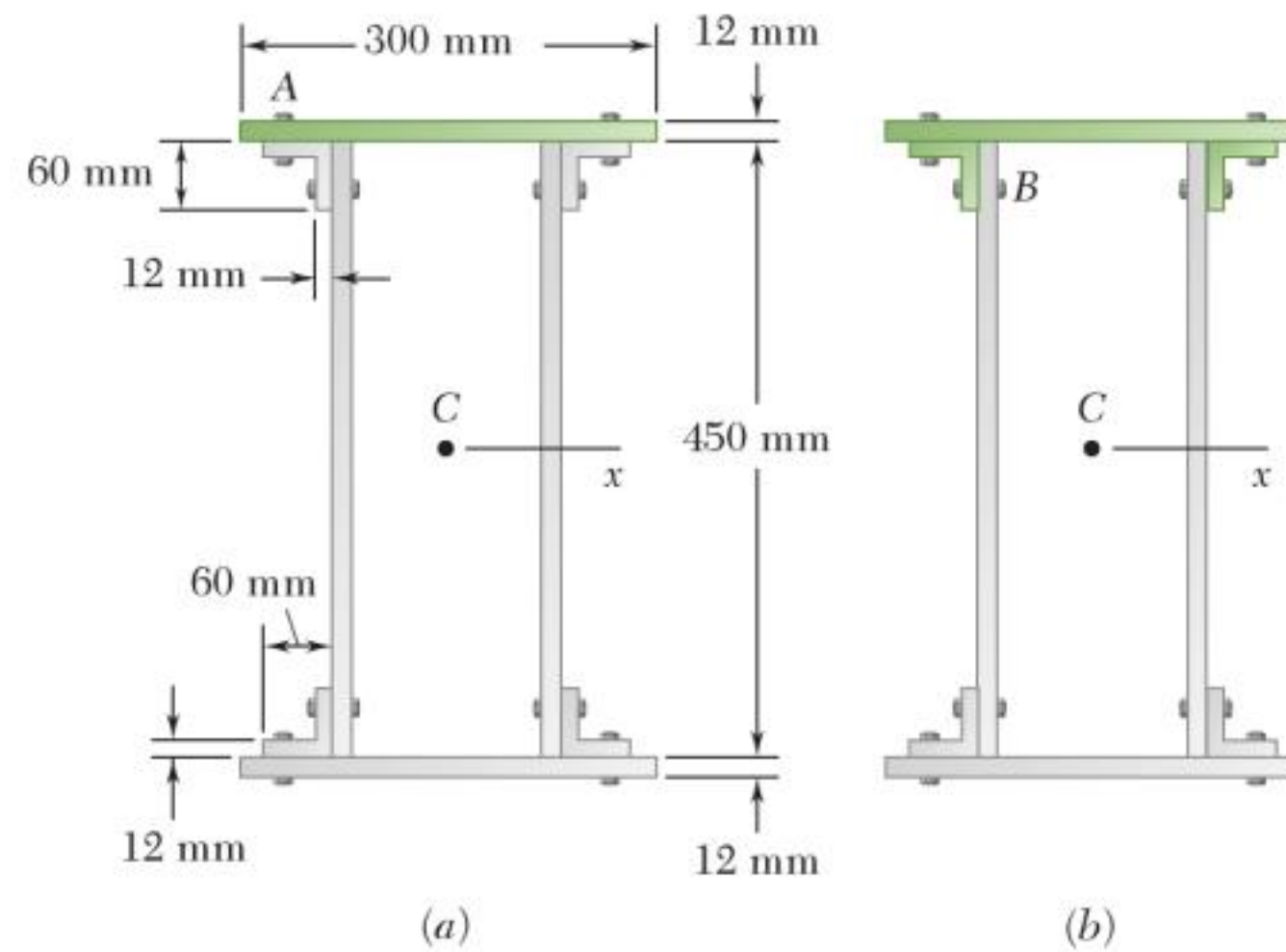


Figura P5.20

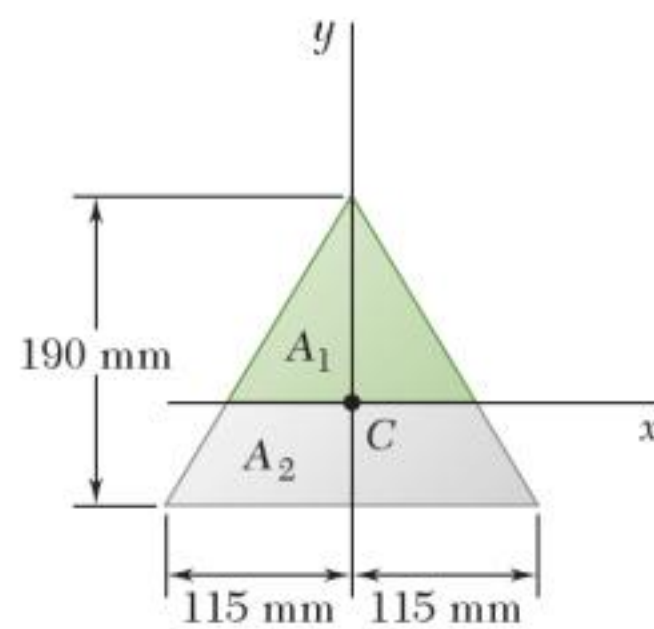


Figura P5.21

- 5.21 e 5.22** O eixo *x* horizontal passa pelo centroide *C* da área mostrada na figura e divide a superfície em duas áreas componentes, A_1 e A_2 . Determine o momento de primeira ordem de cada componente de superfície em relação ao eixo *x* e explique os resultados obtidos.

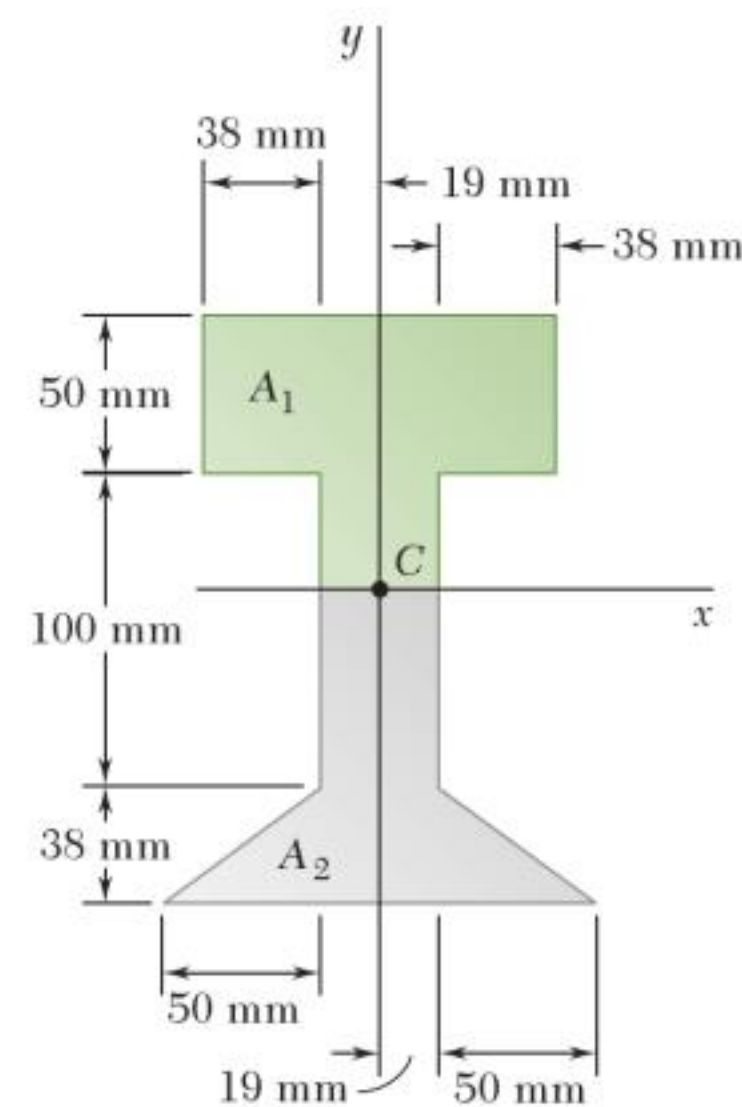


Figura P5.22



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

O diferencial de comprimento dL deve ser substituído por uma das expressões a seguir, dependendo de qual coordenada, x , y ou θ , for escolhida como variável independente da equação, usada para definir essa linha (pode-se deduzir essas expressões aplicando o teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Após usar a equação da linha para expressar uma das coordenadas em termos da outra, pode-se efetuar a integração e resolver as Eqs. (5.4) para as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centroide da linha.

5.7 Teorema de Pappus-Guldinus

Esses teoremas que foram formulados inicialmente pelo geômetra grego Pappus no século III d.C. e retomados posteriormente pelo matemático suíço Guldinus, ou Guldin (1577-1643), tratam de superfícies e corpos de revolução.

Uma *superfície de revolução* é uma superfície que pode ser gerada pela rotação de uma curva no plano (curva geratriz) em torno de um eixo fixo.



Foto 5.2 Os tanques de armazenagem mostrados na foto são todos corpos sólidos de revolução. Logo, é possível determinar as áreas de suas superfícies e seus volumes aplicando-se os teoremas de Pappus-Guldinus.

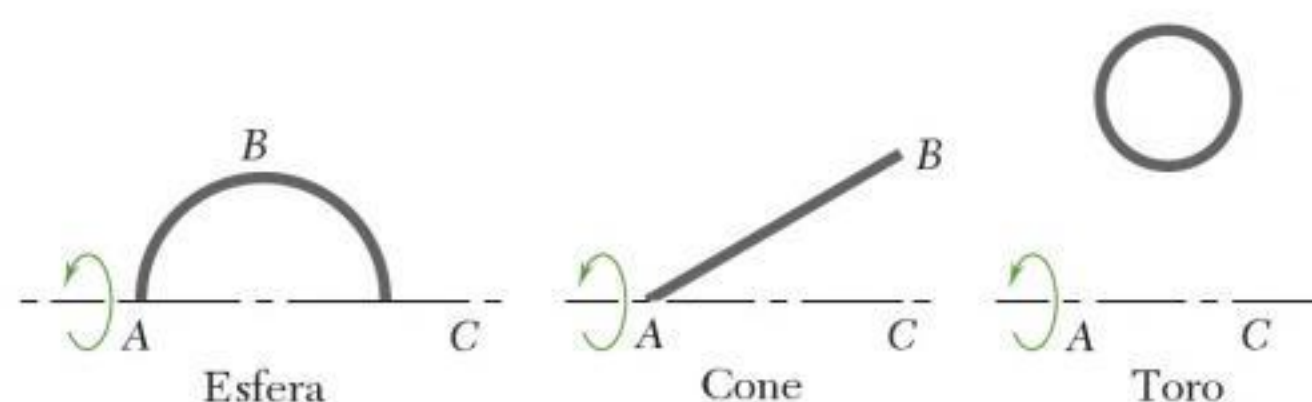


Figura 5.13

Por exemplo, na (Fig. 5.13), a superfície de uma esfera pode ser obtida pela rotação de um arco semicircular ABC em torno do diâmetro AC , a superfície de um cone pela rotação de uma linha reta AB em torno do eixo AC e a superfície de um toro ou anel pela rotação de uma circunferência de um círculo em torno de um eixo que não o intercepte. Um *sólido de revolução* é um sólido que pode ser criado pela rotação de uma superfície plana em torno de um eixo fixo. Conforme mostra a Fig. 5.14, uma esfera, um cone e um toro podem ser gerados pela rotação da forma apropriada em torno do eixo indicado.

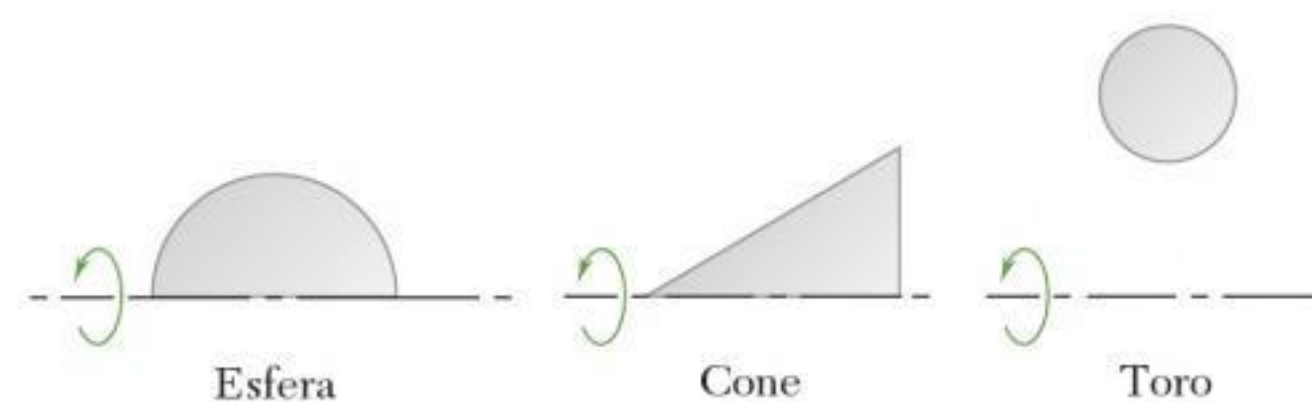


Figura 5.14

TEOREMA I A área de uma superfície de revolução é igual ao produto do comprimento da curva geratriz pela distância percorrida pelo centroide da curva durante a geração da superfície.



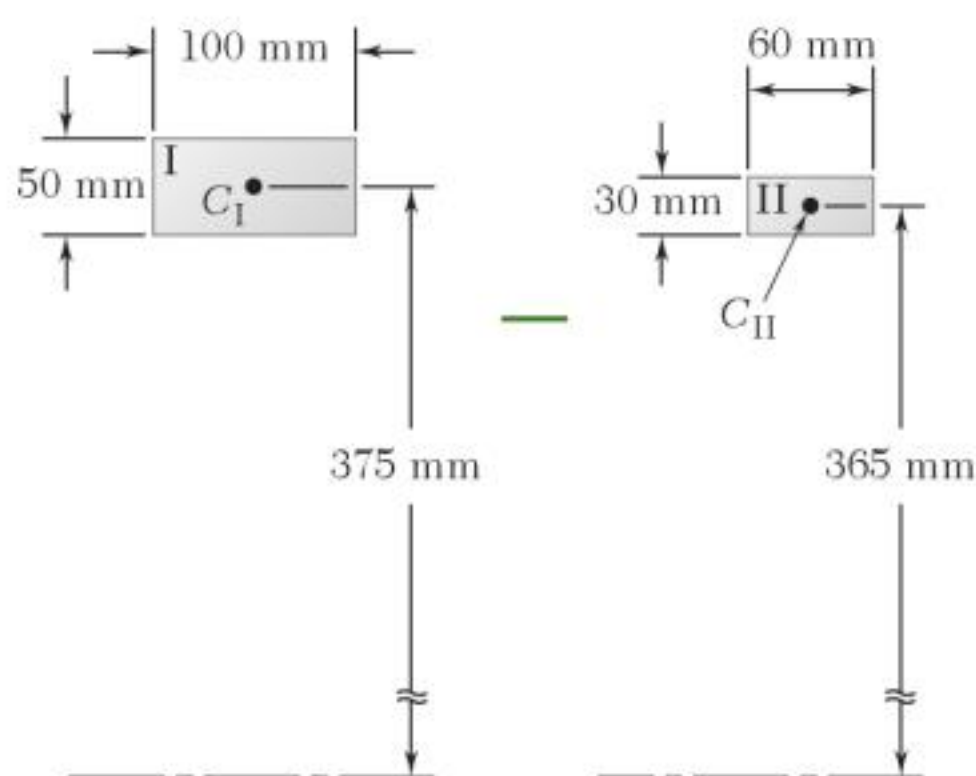
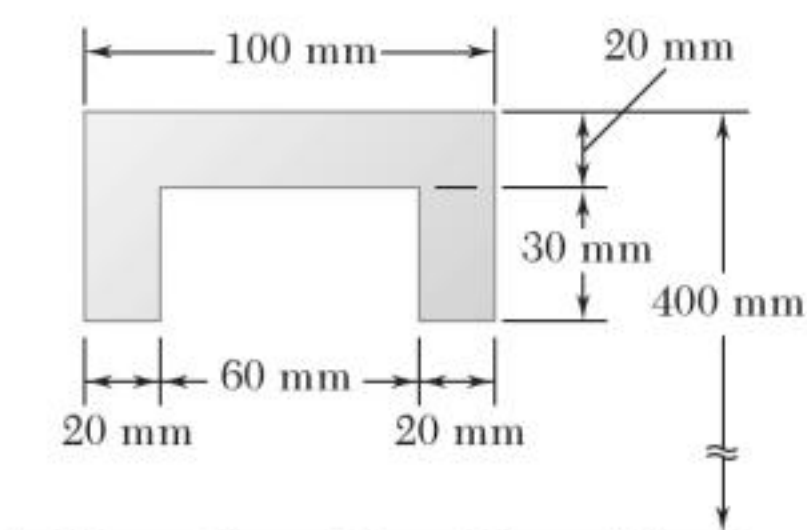
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.7

O diâmetro externo de uma polia é 0,8 m e a seção transversal da sua borda é mostrada na figura. Sabendo que a polia é feita de aço e que sua massa específica é $p = 7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine a massa e o peso da borda.

SOLUÇÃO

Pode-se determinar o volume da borda pela aplicação do Teorema II de Pappus-Guldinus, o qual estabelece que o volume é igual ao produto da área da seção transversal pela distância percorrida pelo seu centroide em uma revolução completa. No entanto, pode-se determinar o volume de modo mais fácil se observarmos que a seção transversal pode ser formada pelo retângulo I, cuja área é positiva, e pelo retângulo II, cuja área é negativa.

Área, mm^2	\bar{y} , mm	Distância percorrida por C, mm	Volume, mm^3
I +5.000	375	$2\pi(375) = 2.356$	$(5.000)(2.356) = 11,78 \times 10^6$
II -1.800	365	$2\pi(365) = 2.293$	$(-1.800)(2.293) = -4,13 \times 10^6$
			Volume da borda = $7,65 \times 10^6$

Como $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, temos $1 \text{ mm}^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$ e obtemos $V = 7,65 \times 10^6 \text{ mm}^3 = (7,65 \times 10^6) (10^{-9} \text{ m}^3) = 7,65 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

$$m = \rho V = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7,65 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \quad m = 60,0 \text{ kg} \quad \blacktriangleleft$$

$$W = mg = (60,0 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 589 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad W = 589 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 5.8

Aplicando os teoremas de Pappus-Guldinus, determine (a) o centroide de uma superfície semicircular, (b) o centroide de um arco semicircular. Lembre-se de que o volume e a área da superfície de uma esfera são $\frac{4}{3}\pi r^3$ e $4\pi r^2$, respectivamente.

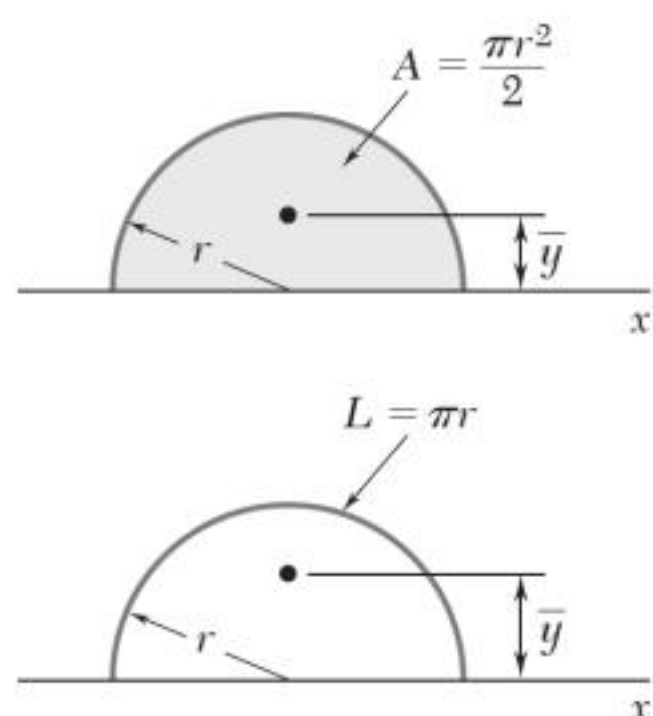
SOLUÇÃO

O volume de uma esfera é igual ao produto da área de um semicírculo pela distância percorrida pelo centroide do semicírculo em uma revolução em torno do eixo x.

$$V = 2\pi \bar{y} A \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \bar{y} \left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \quad \blacktriangleleft$$

De modo análogo, a área de uma esfera é igual ao produto do comprimento do semicírculo geratriz pela distância percorrida pelo seu centroide em uma revolução.

$$A = 2\pi \bar{y} L \quad 4\pi r^2 = 2\pi \bar{y} (\pi r) \quad \bar{y} = \frac{2r}{\pi} \quad \blacktriangleleft$$





You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

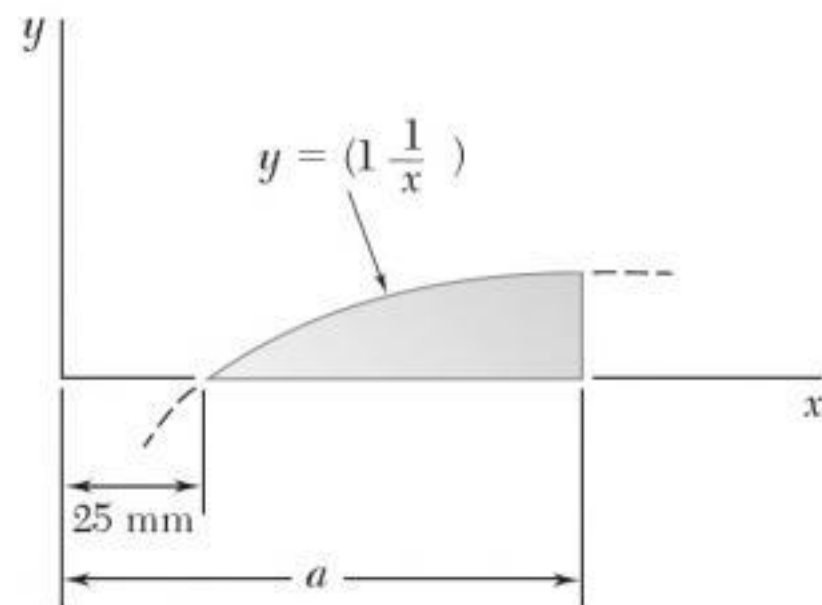


Figura P5.50 e P5.51

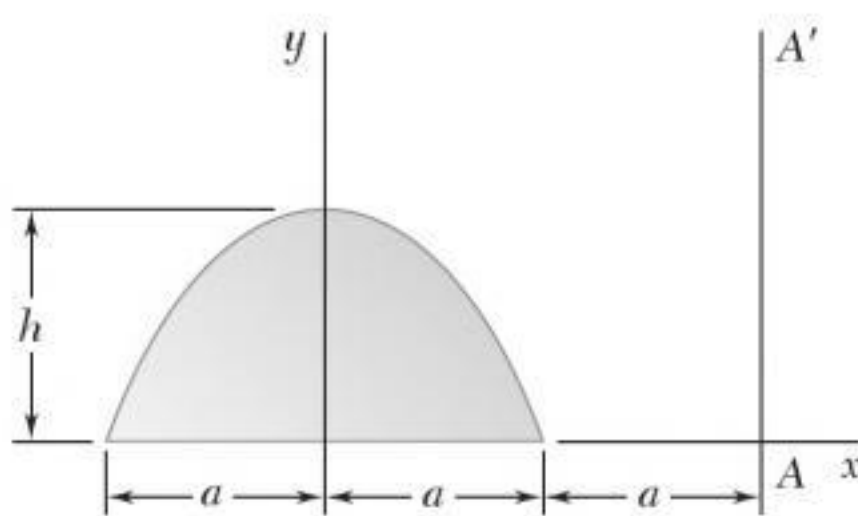


Figura P5.55

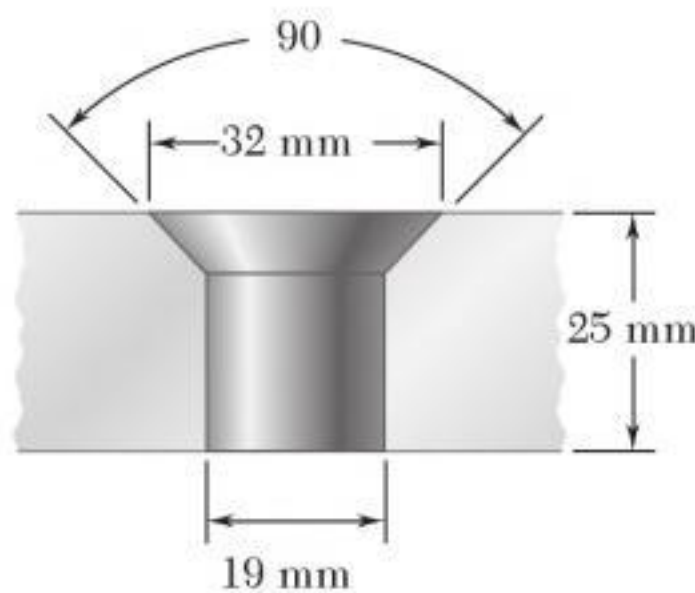


Figura P5.58

5.50 Determine o centroide da área mostrada na figura quando $a = 50$ mm

5.51 Determine o valor de a para que a razão \bar{x} / \bar{y} seja 9.

5.52 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da área do Problema 5.1 em torno (a) da linha $x = 240$ mm, (b) do eixo y .

5.53 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da área do Problema 5.2 em torno (a) da linha $y = 60$ mm, (b) do eixo y .

5.54 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da área do Problema 5.8 em torno (a) do eixo x , (b) do eixo y .

5.55 Determine o volume do sólido gerado pela rotação da área parabólica mostrado na figura em torno (a) do eixo x , (b) do eixo AA' .

5.56 Determine o volume e a área da superfície do elo de corrente mostrado na figura, que é feito de uma barra de 6 mm de diâmetro, se $R = 10$ mm e $L = 30$ mm.

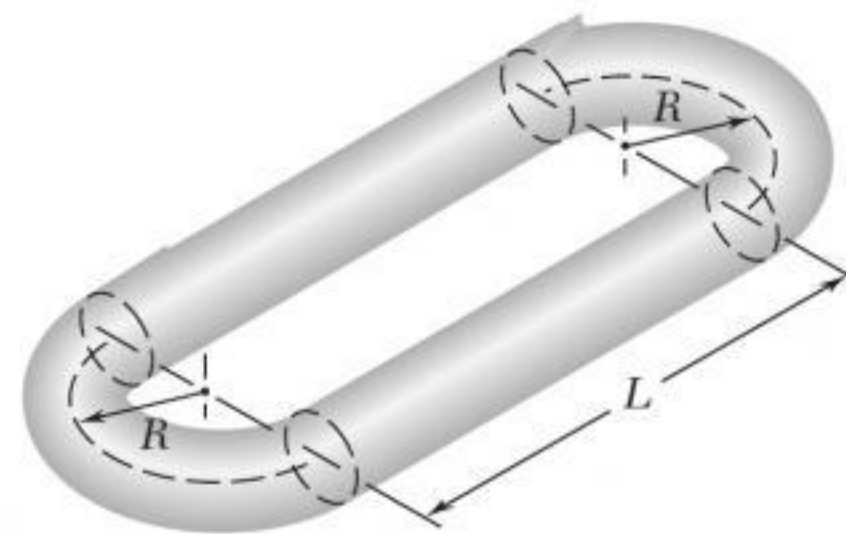


Figura P5.56

5.57 Verifique se as expressões para os volumes das quatro primeiras formas na Fig. 5.21 estão corretas.

5.58 Um furo de 19 mm de diâmetro é feito em uma peça de aço de 25 mm de espessura. Em seguida, o furo é escareado como mostrado na figura. Determine o volume de aço removido durante o processo de escareamento.

5.59 Determine a capacidade, em litros, da poncheira mostrada se $R = 250$ mm.



Figura P5.59



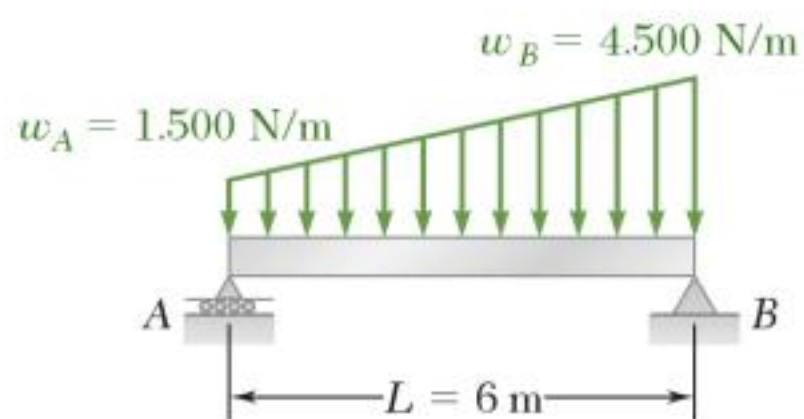
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

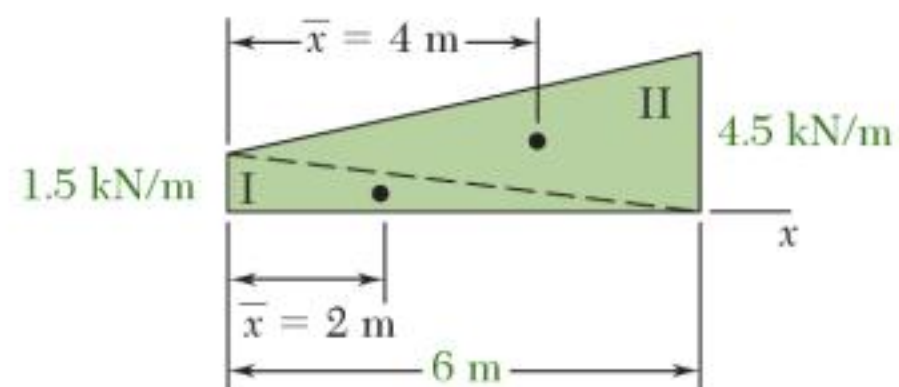


You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.9

Uma viga sustenta a carga distribuída mostrada na figura. (a) Determine a carga concentrada equivalente. (b) Determine as reações de apoio.



SOLUÇÃO

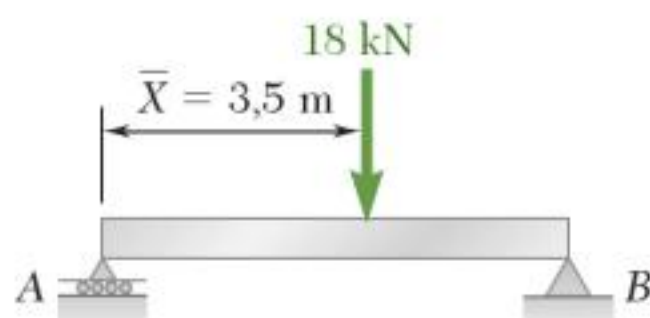
a. Carga concentrada equivalente. A intensidade da resultante da carga é igual à área sob a curva de carga e a linha de ação da resultante passa pelo centroide dessa área. Dividimos a superfície sob a curva de carga em dois triângulos e construímos a tabela mostrada a seguir. Para simplificar os cálculos e a tabulação, as cargas fornecidas por unidade de comprimento foram convertidas para kN/m.

Componente	A, kN	\bar{x} , m	$\bar{x}A$, kN · m
Triângulo I	14,5	2	9
Triângulo II	13,5	4	54
	$\Sigma A = 18,0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$

$$\text{Logo, } \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A: \quad \bar{X}(18 \text{ kN}) = 63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \bar{X} = 3,5 \text{ m}$$

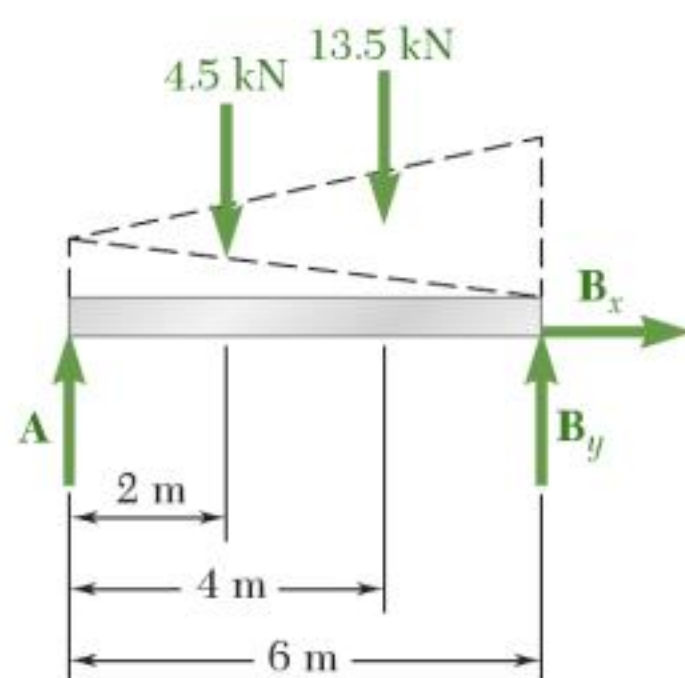
A carga concentrada equivalente é

$$\mathbf{W = 18 \text{ kN} \downarrow} \quad \blacktriangleleft$$



e a sua linha de ação está localizada a uma distância

$$\bar{X} = 3,5 \text{ m à direita de A} \quad \blacktriangleleft$$



b. Reações. A reação em A é vertical, sendo representada por \mathbf{A} ; a reação em B é representada pelo seus componentes \mathbf{B}_x e \mathbf{B}_y . A carga fornecida pode ser considerada como a soma das duas cargas triangulares mostradas na figura. A resultante de cada carga triangular é igual à área do triângulo e atua em seu centroide. Escrevemos as seguintes equações de equilíbrio para o corpo livre mostrado:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad \mathbf{B_x = 0} \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma M_A = 0: \quad -(4,5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (13,5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + B_y(6 \text{ m}) = 0$$

$$\mathbf{B_y = 10,5 \text{ kN} \uparrow} \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma M_B = 0: \quad +(4,5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (13,5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - A(6 \text{ m}) = 0$$

$$\mathbf{A = 7,5 \text{ kN} \uparrow} \quad \blacktriangleleft$$

Solução alternativa. Pode-se substituir a carga distribuída dada pela sua resultante, encontrada na alternativa a. As reações podem ser determinadas escrevendo-se as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$. Novamente, obtemos:

$$\mathbf{B_x = 0} \quad \mathbf{B_y = 10,5 \text{ kN} \uparrow} \quad \mathbf{A = 7,5 \text{ kN} \uparrow} \quad \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

5.66 e 5.67 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (a) a intensidade e a localização da resultante da carga distribuída, (b) as reações de apoio da viga.

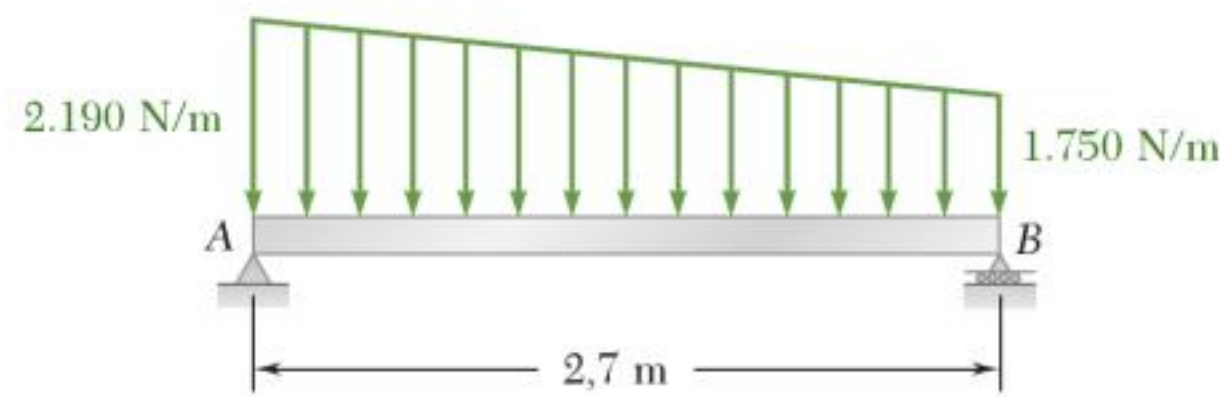


Figura P5.66

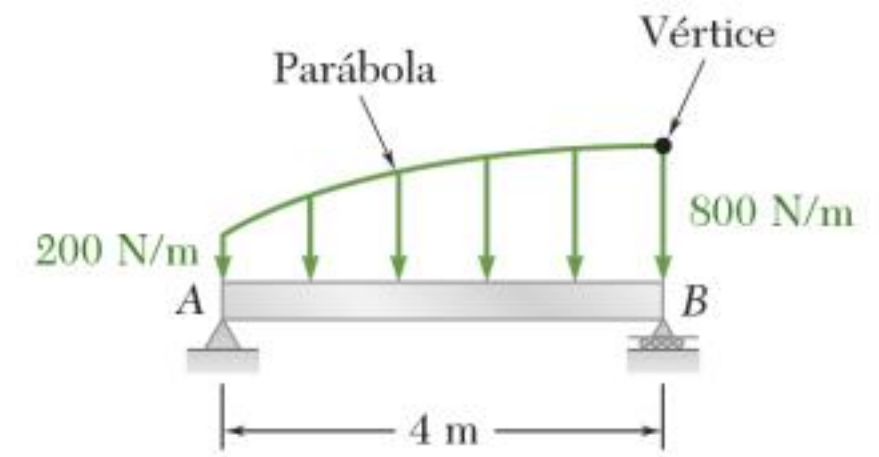


Figura P5.67

5.68 a 5.73 Determine as reações de apoio da viga para a carga dada.

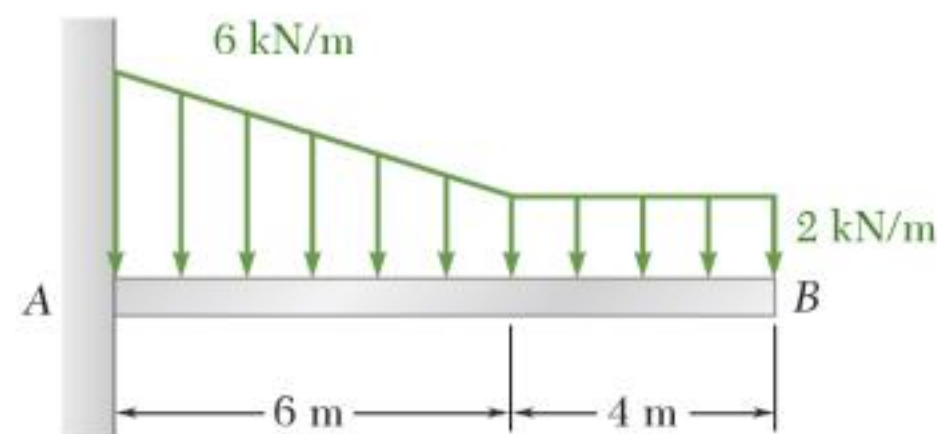


Figura P5.68

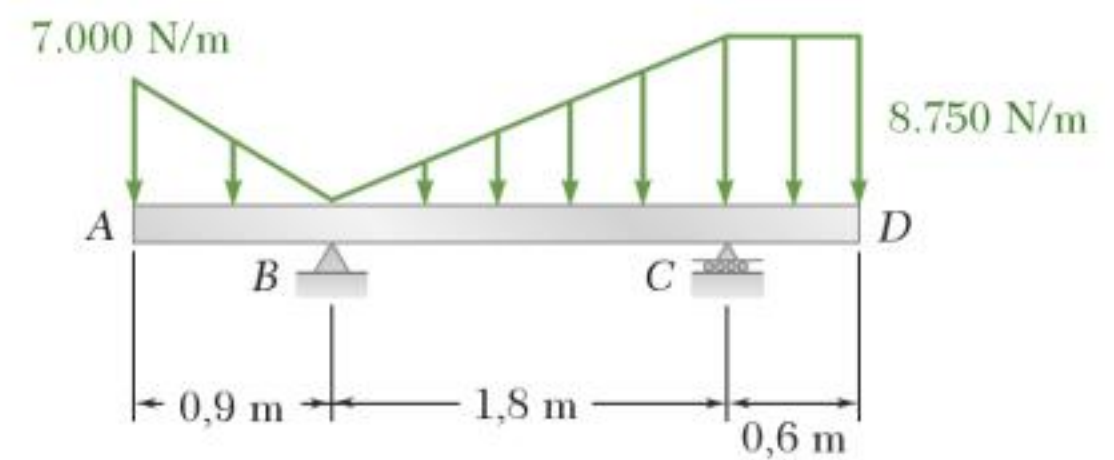


Figura P5.69

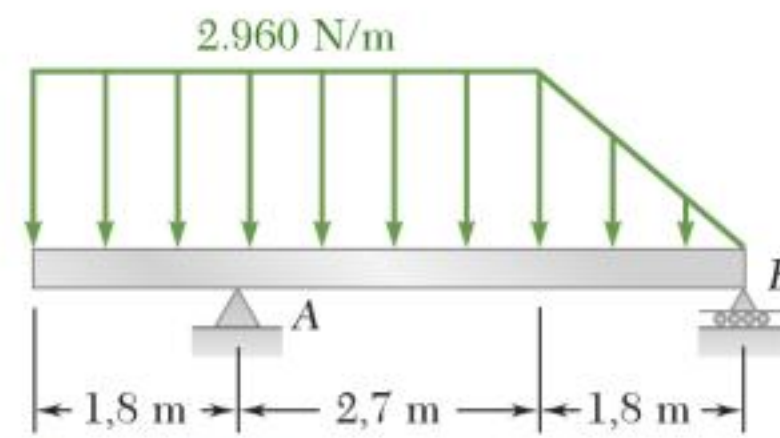


Figura P5.70

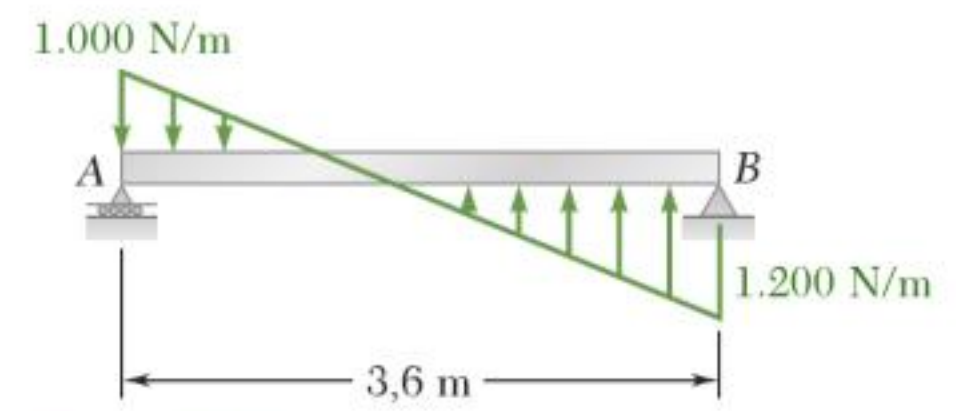


Figura P5.71

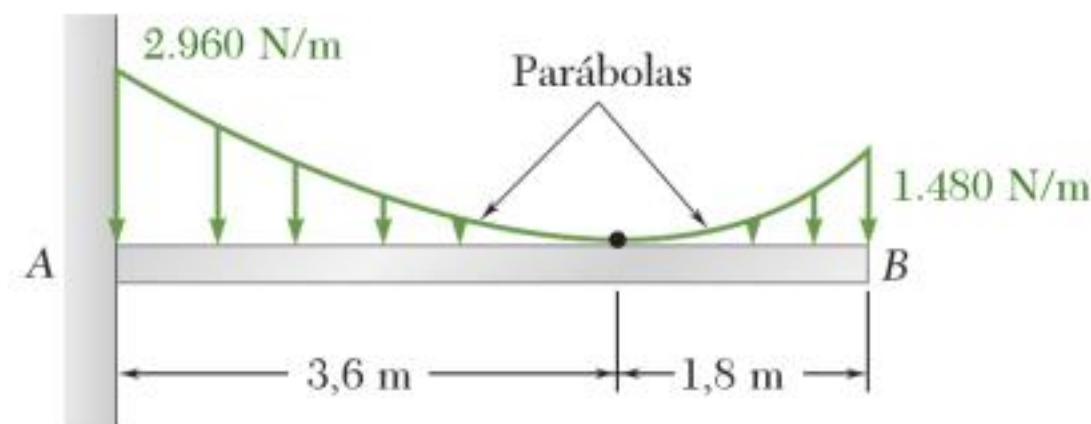


Figura P5.72

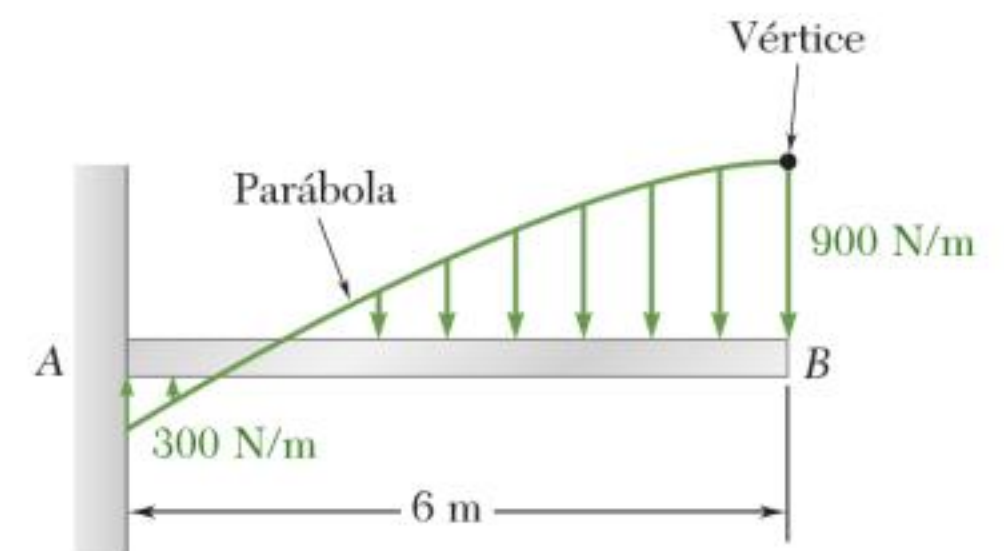


Figura P5.73

5.74 Determine (a) a distância a tal que as reações verticais dos apoios A e B sejam iguais, (b) as reações de apoio correspondentes.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



Foto 5.4 Para se prever as características de voo do Boeing 747 modificado, usado para transportar um ônibus espacial, foi preciso determinar o centro de gravidade de cada nave.

SÓLIDOS

5.10 Centro de gravidade de um corpo tridimensional e centroide de um sólido

O *centro de gravidade* G de um corpo tridimensional é obtido dividindo-se o corpo em pequenos elementos e , em seguida, demonstrando que o peso \mathbf{W} do corpo, atuando em G , é equivalente ao sistema de forças distribuídas $\Delta\mathbf{W}$ que representa os pesos dos pequenos elementos. Escolhendo o eixo y na vertical, com sentido positivo para cima (Fig. 5.20) e representado por $\bar{\mathbf{r}}$ o vetor posição de G , temos que \mathbf{W} é igual à soma dos pesos elementares $\Delta\mathbf{W}$ e que seu momento em relação a O é igual à soma dos momentos em relação a O dos pesos elementares:

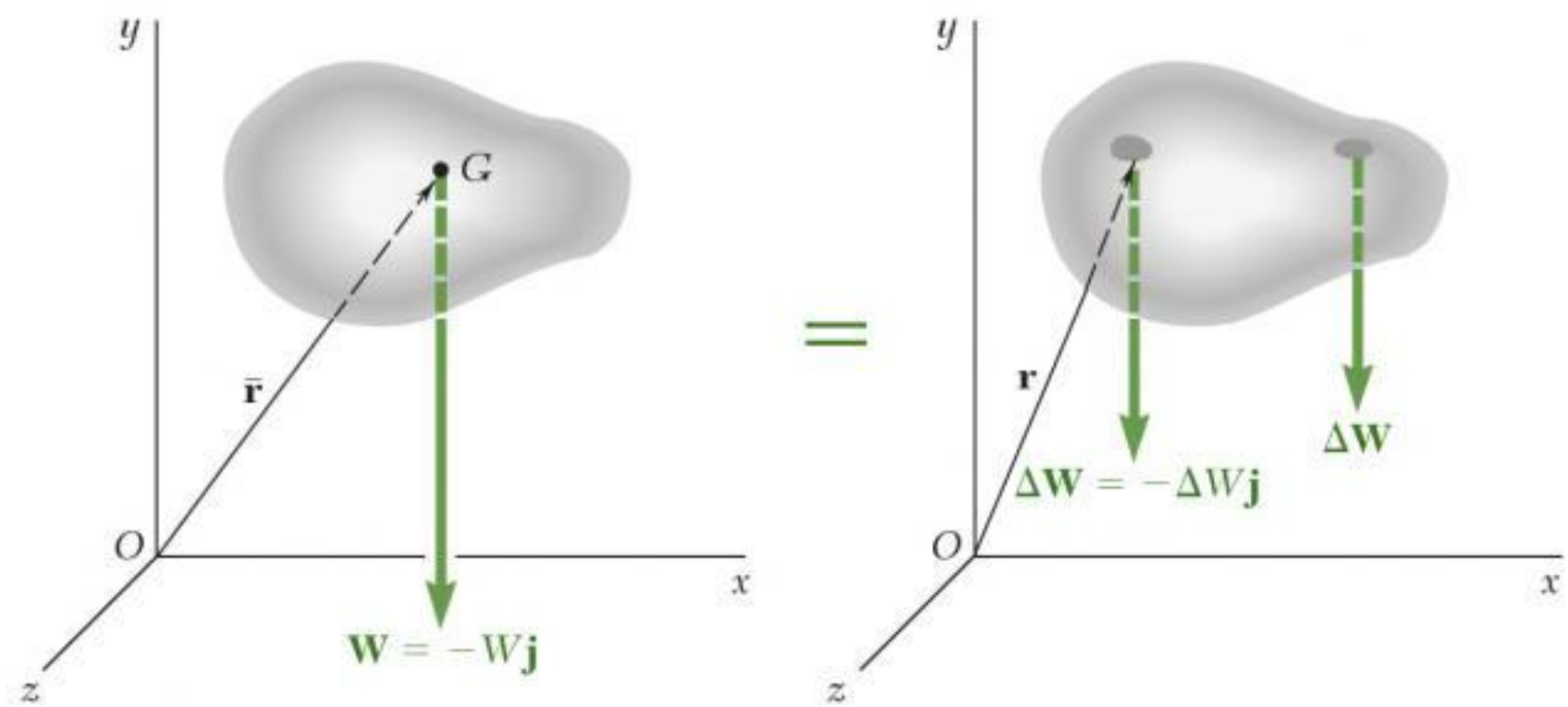


Figura 5.20

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F}: & \quad -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma \mathbf{M}_O: & \quad \bar{\mathbf{r}} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r} \times (-\Delta W\mathbf{j})] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Reescrevendo a última equação da seguinte maneira

$$\bar{\mathbf{r}}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma \mathbf{r} \Delta W) \times (-\mathbf{j}) \quad (5.15)$$

observamos que o peso \mathbf{W} do corpo será equivalente ao sistema dos pesos elementares $\Delta\mathbf{W}$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$W = \Sigma \Delta W \quad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma \mathbf{r} \Delta W$$

Aumentando o número de elementos e diminuindo, simultaneamente, o tamanho de cada elemento, obtemos, no limite:

$$W = \int dW \quad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r} dW \quad (5.16)$$

Note que as relações obtidas são independentes da orientação do corpo. Por exemplo, se o corpo e os eixos coordenados fossem girados de tal modo que o eixo z aponte para cima, o vetor unitário $-\mathbf{j}$ seria substituído por $-\mathbf{k}$ nas Eqs. (5.14) e (5.15), mas as relações (5.16) permaneceriam inalteradas. Decompondo os vetores $\bar{\mathbf{r}}$ e \mathbf{r} em seus componentes retangu-



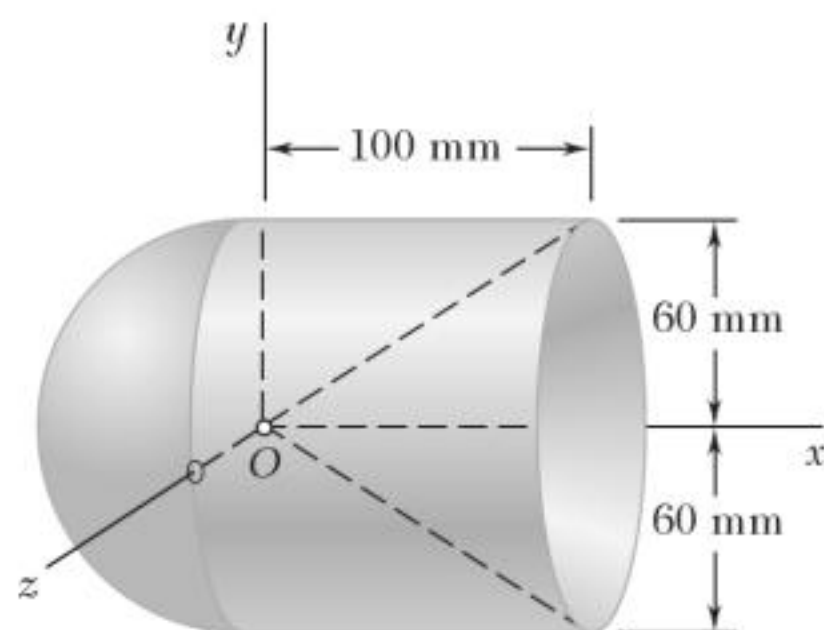
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

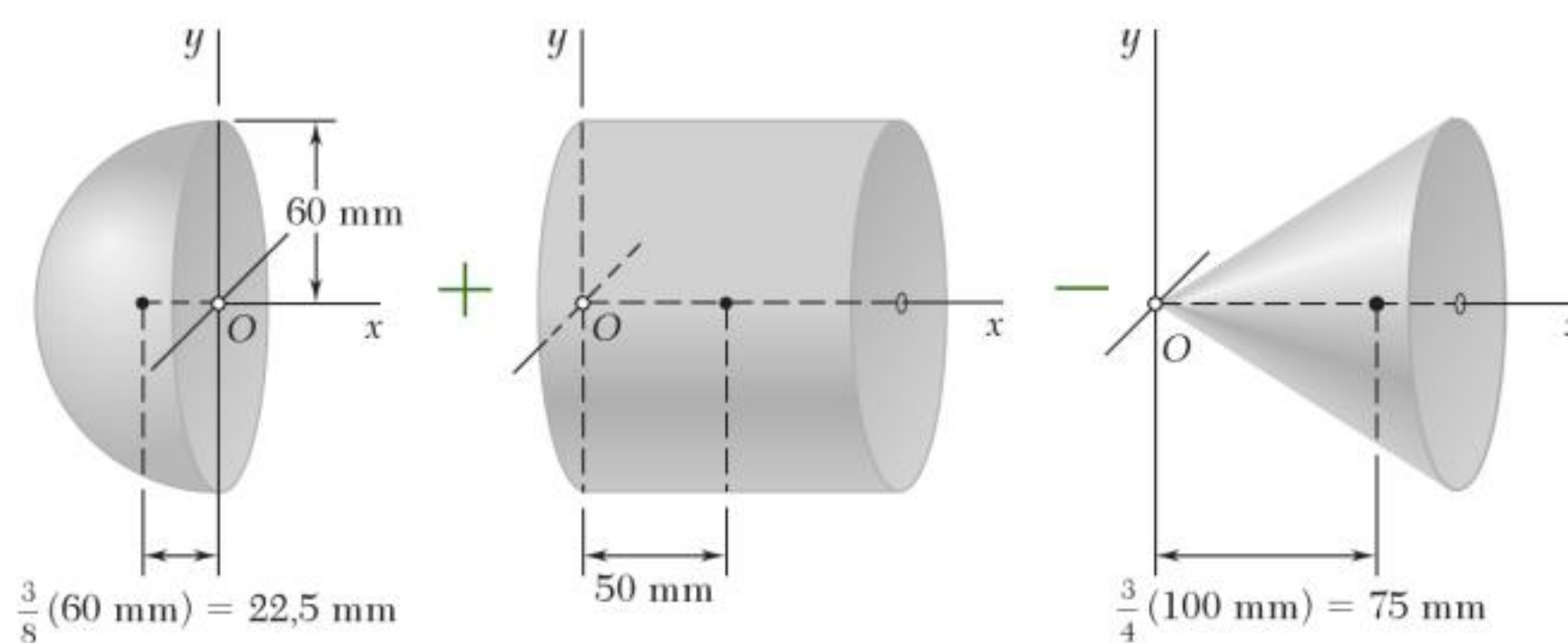


PROBLEMA RESOLVIDO 5.11

Determine a localização do centro de gravidade do corpo de revolução homogêneo mostrado na figura, que foi obtido adicionando-se um hemisfério e um cilindro e extraindo-se um cone.

SOLUÇÃO

Por causa da simetria, o centro de gravidade situa-se sobre o eixo x . Como mostra a figura a seguir, pode-se obter o corpo adicionando-se um hemisfério a um cilindro e depois extraindo-se um cone. O sólido e a abscissa do centroide de cada um desses componentes são obtidos a partir da Fig. 5.21 e registrados na tabela a seguir. O volume total do corpo e o momento de primeira ordem do sólido com relação ao plano yz são, então, determinados.



Componente	Volume, mm^3	\bar{x} , mm	$\bar{x}V$, mm^4
Hemisfério	$\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} (60)^3 = 0,4524 \times 10^6$	-22,5	$-10,18 \times 10^6$
Cilindro	$\pi (60)^2 (100) = 1,1310 \times 10^6$	+50	$+56,55 \times 10^6$
Cone	$-\frac{\pi}{3} (60)^2 (100) = -0,3770 \times 10^6$	+75	$-28,28 \times 10^6$
	$\Sigma V = 1,206 \times 10^6$		$\Sigma \bar{x}V = 18,09 \times 10^6$

Então:

$$\bar{X} \Sigma V = \Sigma \bar{x}V: \bar{X}(1,206 \times 10^6 \text{ mm}^3) = 18,09 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{X} = 15 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

- 5.96** Determine a posição do centroide do corpo composto mostrado na figura, quando (a) $h = 2b$, (b) $h = 2,5b$.

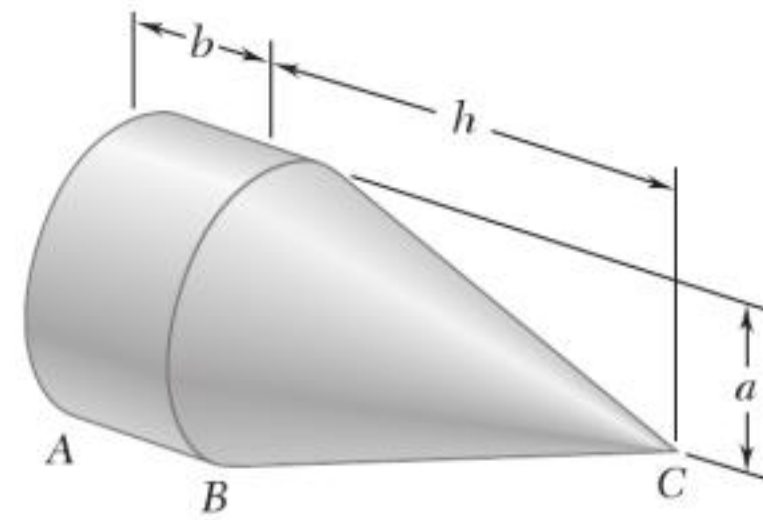


Figura P5.96

- 5.97** Determine a coordenada y do centroide do corpo mostrado na figura.

- 5.98** Determine a coordenada z do centroide do corpo mostrado na figura. (Dica: use o resultado do Problema Resolvido 5.13.)

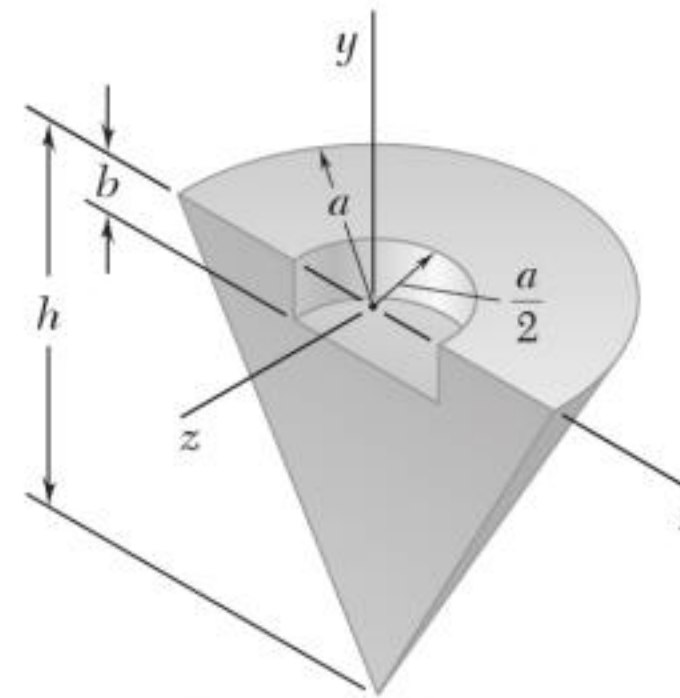


Figura P5.97 e P5.98

- 5.99** O corpo composto mostrado na figura é formado pela remoção de um semi-elipsoide de revolução de semieixo maior h e semieixo menor $a/2$ a partir de um hemisfério de raio a . Determine (a) a coordenada y do centroide quando $h = a/2$, (b) a razão h/a para a qual $y = -0,4a$.

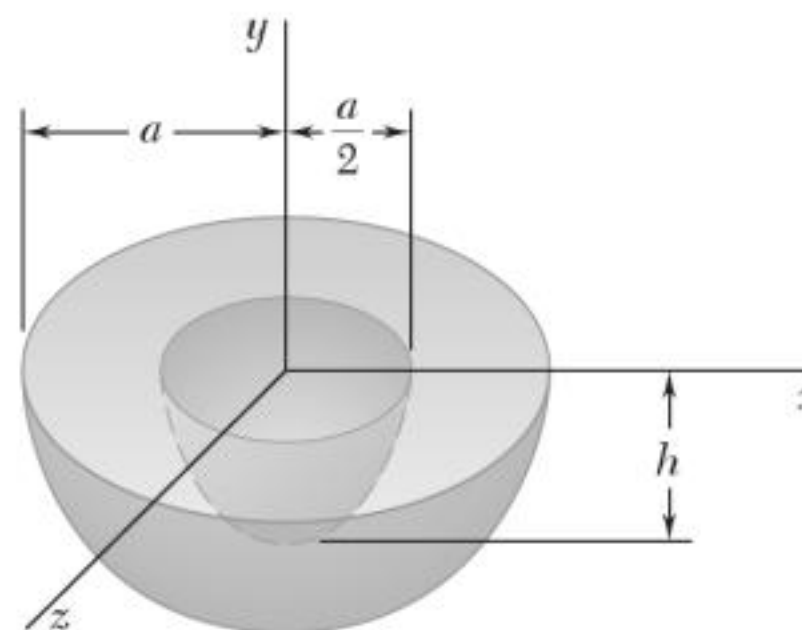


Figura P5.99



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 5.114** Um arame de aço fino de seção reta uniforme é dobrado na forma mostrada na figura. Determine seu centro de gravidade.

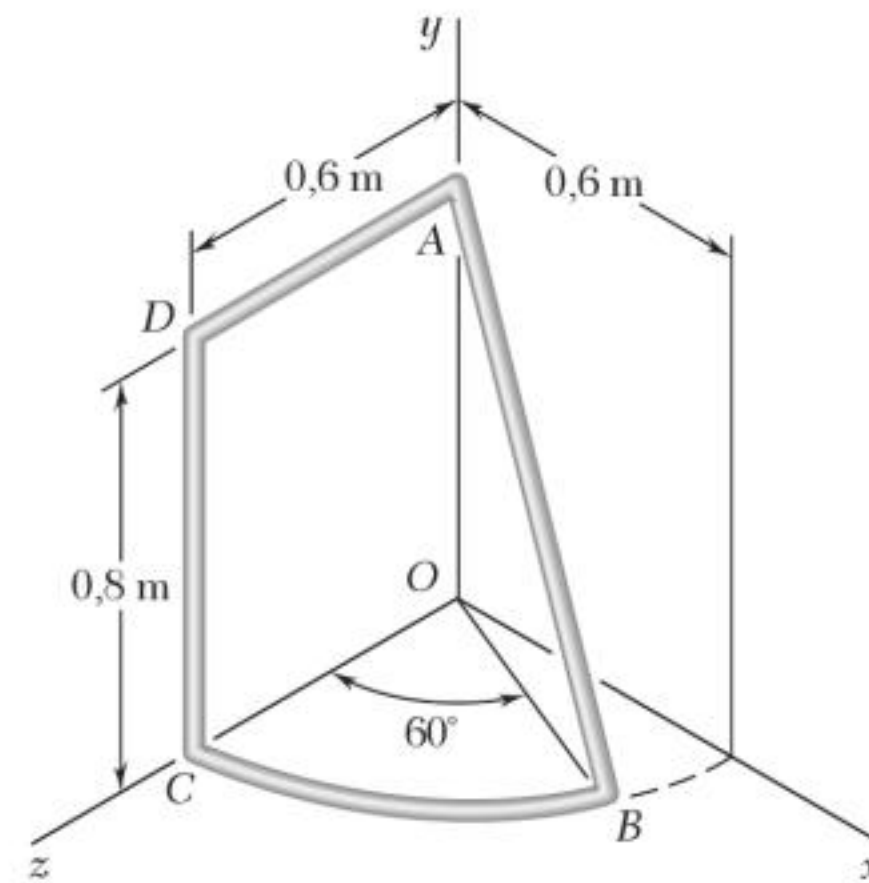


Figura P5.114

- 5.115 e 5.116** Determine o centro de gravidade mostrada na figura, sabendo que ela é feita de barras finas de latão de diâmetro uniforme.

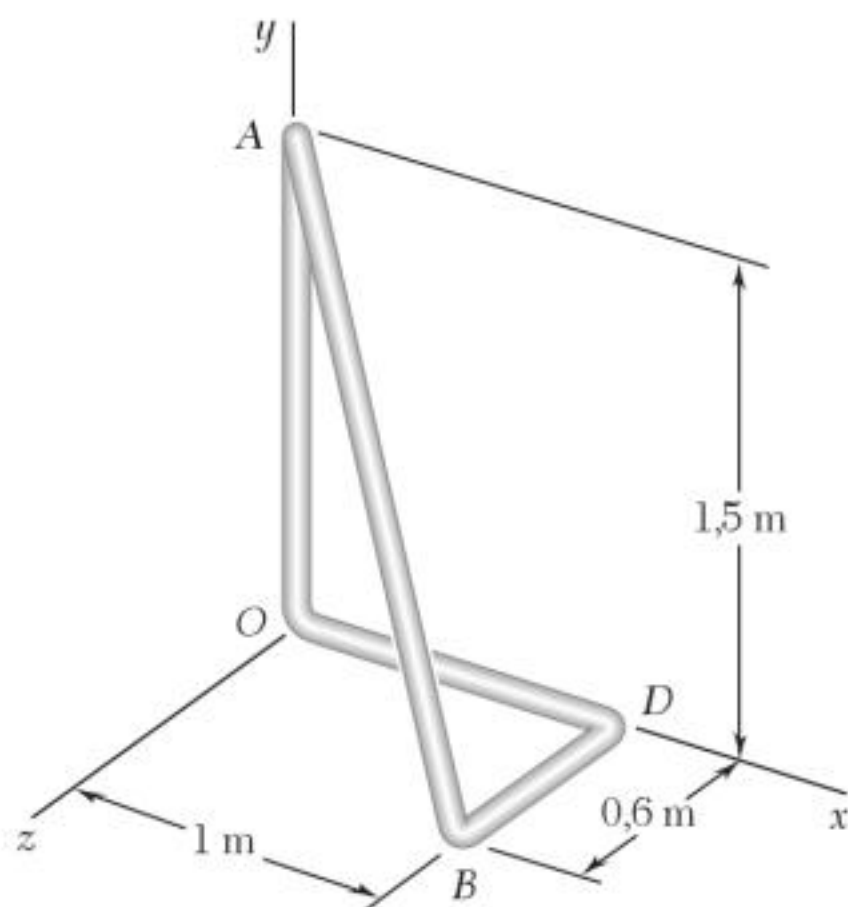


Figura P5.115

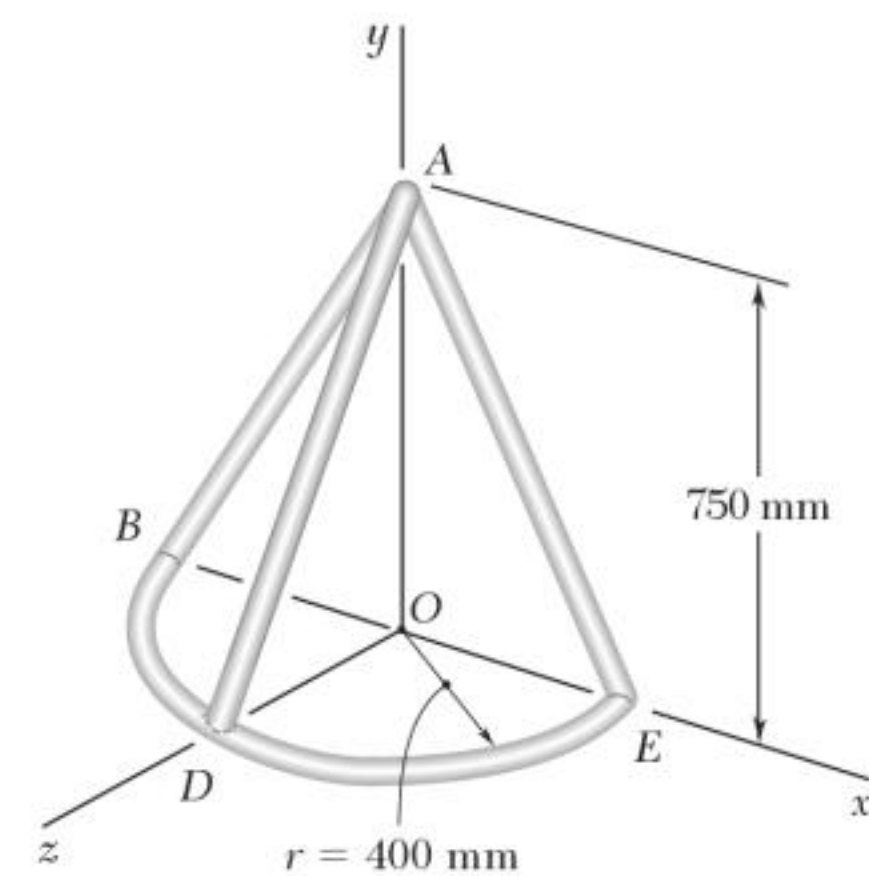


Figura P5.116

- 5.117** A estrutura de uma estufa de plantas é construída a partir de tubos uniformes de alumínio. Determine o centro de gravidade da parte da estrutura mostrada na figura.

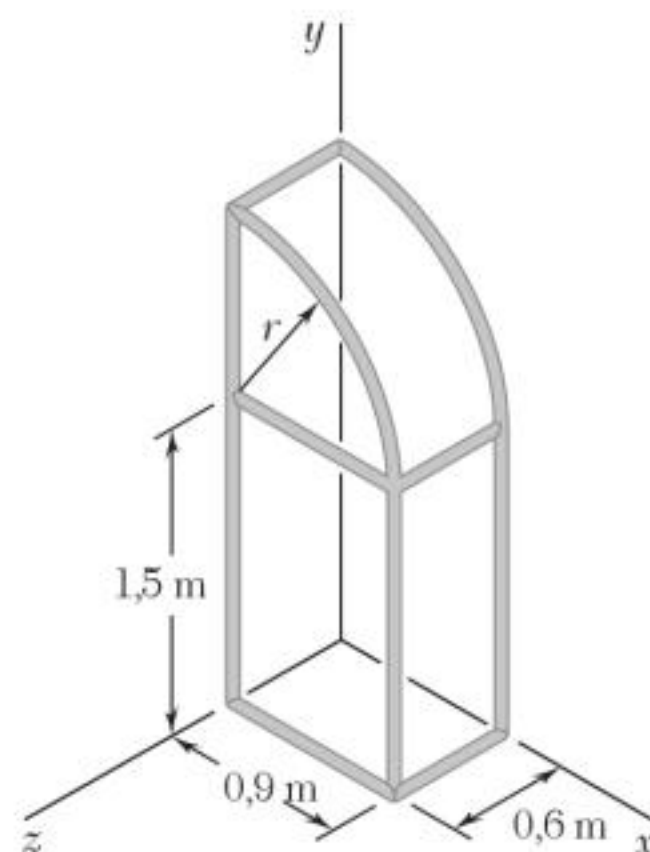


Figura P5.117

- 5.118** Um cinzel tem um punho de plástico e uma lâmina e haste de aço. Sabendo que a densidade do plástico é 1.030 kg/m^3 e a do aço é 7.860 kg/m^3 , determine o centro de gravidade dessa ferramenta.

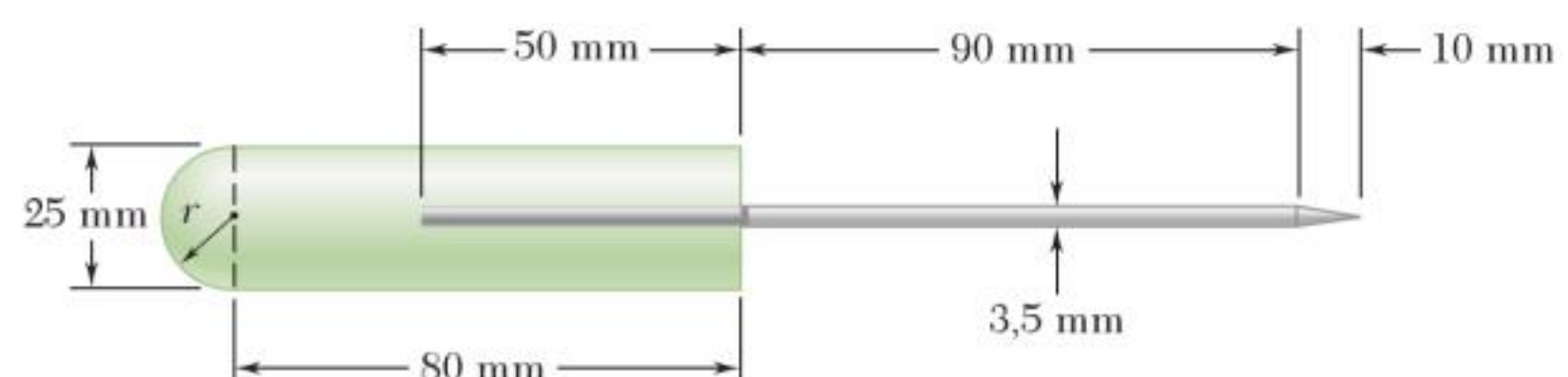


Figura P5.118



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado principalmente à determinação do *centro de gravidade* de um corpo rígido, ou seja, à determinação do ponto G no qual uma única força \mathbf{W} , chamada de *peso* do corpo, pode ser aplicada para representar o efeito da atração da Terra sobre o corpo.

Centro de gravidade de um corpo bidimensional

Na primeira parte do capítulo, consideramos *corpos bidimensionais*, tais como placas planas e arames contidos no plano xy . Somando-se, os componentes de força na direção vertical z e os momentos em relação aos eixos horizontais x e y [Seção 5.2], deduzimos as relações

$$W = \int dW \quad \bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad (5.2)$$

que definem o peso do corpo e as coordenadas x e y do seu centro de gravidade.

Centroide de uma área ou linha

No caso de uma *placa plana homogênea de espessura uniforme* [Seção 5.3], o centro de gravidade G da placa coincide com o *centroide* C da *área* A da placa, cujas coordenadas são definidas pelas relações

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

Momentos de primeira ordem

De forma análoga, a determinação do centro de gravidade de um *arame homogêneo de seção transversal uniforme* contido em um plano se reduz à determinação do *centroide* C da *linha* L representando o arame. Temos:

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

As integrais nas Eqs. (5.3) são chamadas de *momentos de primeira ordem* da área A em relação aos eixos y e x e são representadas por Q_y e Q_x , respectivamente [Seção 5.4]. Temos:

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

Os momentos de primeira ordem de uma linha podem ser definidos de maneira análoga.

Propriedades de simetria

A determinação do centroide C de uma área ou linha é simplificada quando a área ou linha apresenta certas *propriedades de simetria*. Se a área ou linha for simétrica em relação a um eixo, seu centroide C está nesse eixo; se for simétrica em relação a dois eixos, C está na interseção dos dois eixos; se for simétrica em relação ao centro O , C coincide com O .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS DE REVISÃO

5.137 e 5.138 Determine o centroide da área plana das figuras mostradas a seguir.

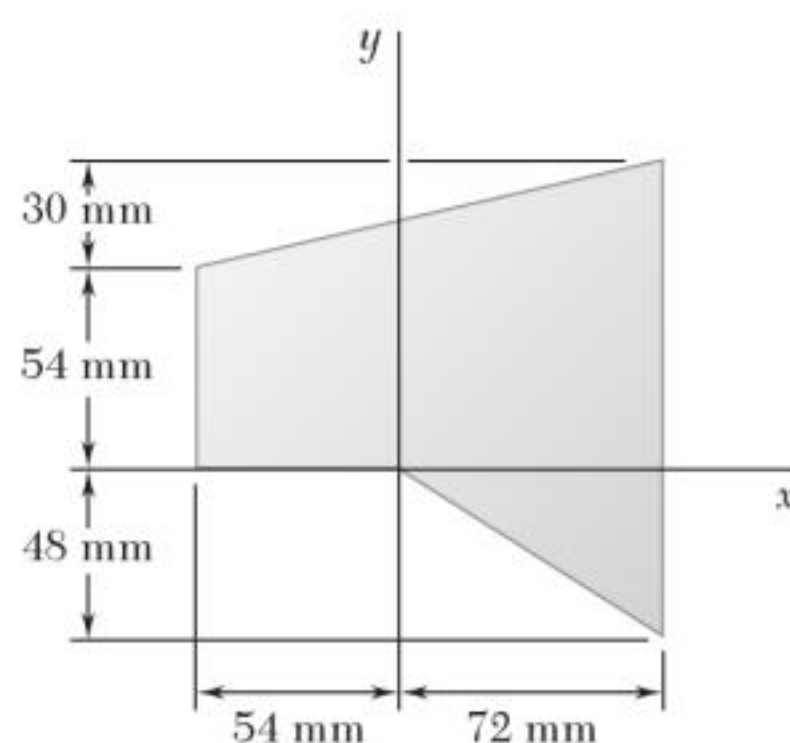


Figura P5.137

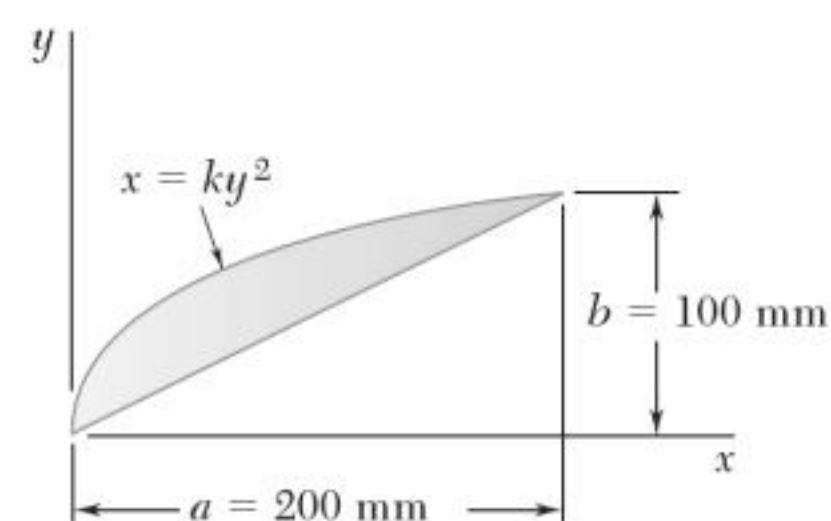


Figura P5.138

5.139 A moldura de um letreiro é fabricada com uma barra chata de aço fina cuja massa por unidade de comprimento é $4,73 \text{ kg/m}$. A moldura é sustentada por um pino em C e pelo cabo AB . Determine (a) a tensão no cabo, (b) a reação em C .

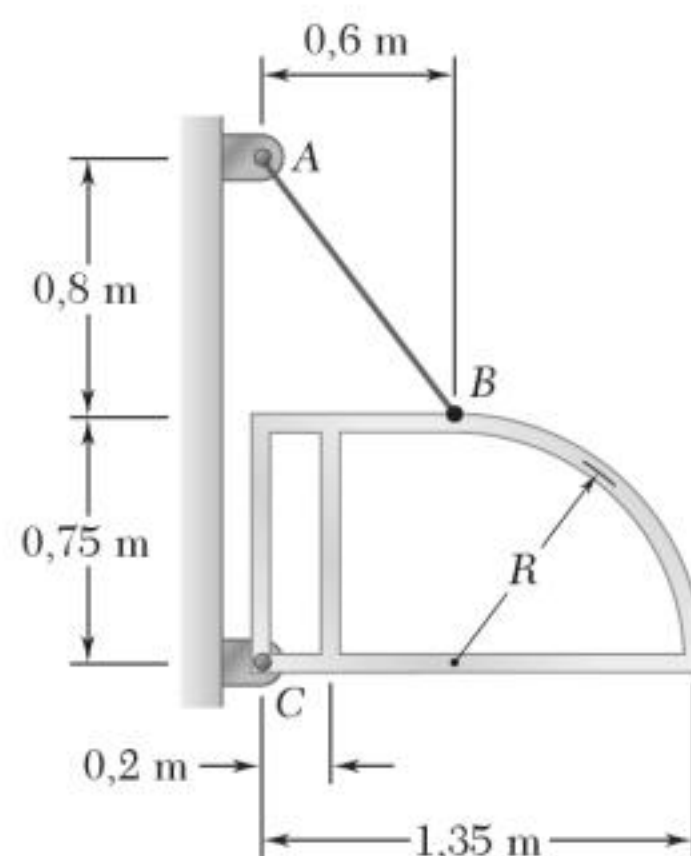


Figura P5.139

5.140 Determine por integração direta o centroide da área mostrada na figura. Demonstre sua resposta em termos de a e h .

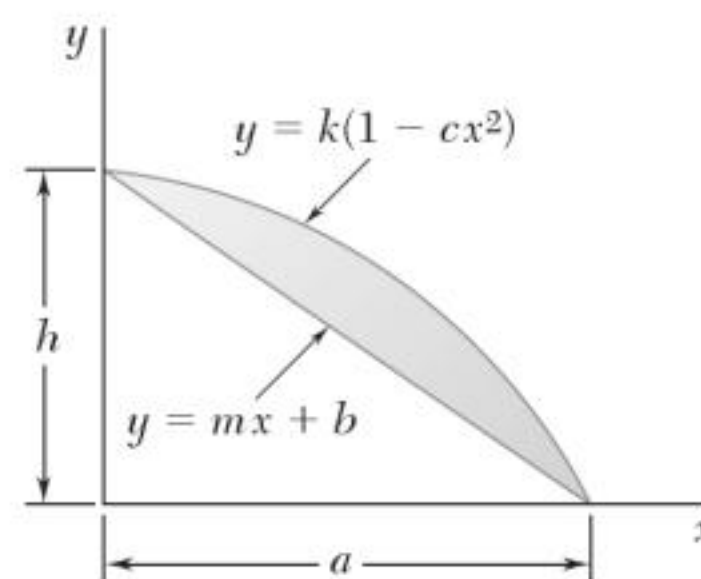


Figura P5.140



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

5.C4 Aproximando-se a curva mostrada por 10 segmentos em linha reta e usando um programa de computador, determine a localização do centroide da linha. Utilize esse programa para determinar a localização do centroide quando (a) $a = 25$ mm, $L = 275$ mm, $h = 50$ mm; (b) $a = 50$ mm, $L = 425$ mm, $h = 100$ mm; (c) $a = 125$ mm, $L = 300$ mm, $h = 25$ mm.

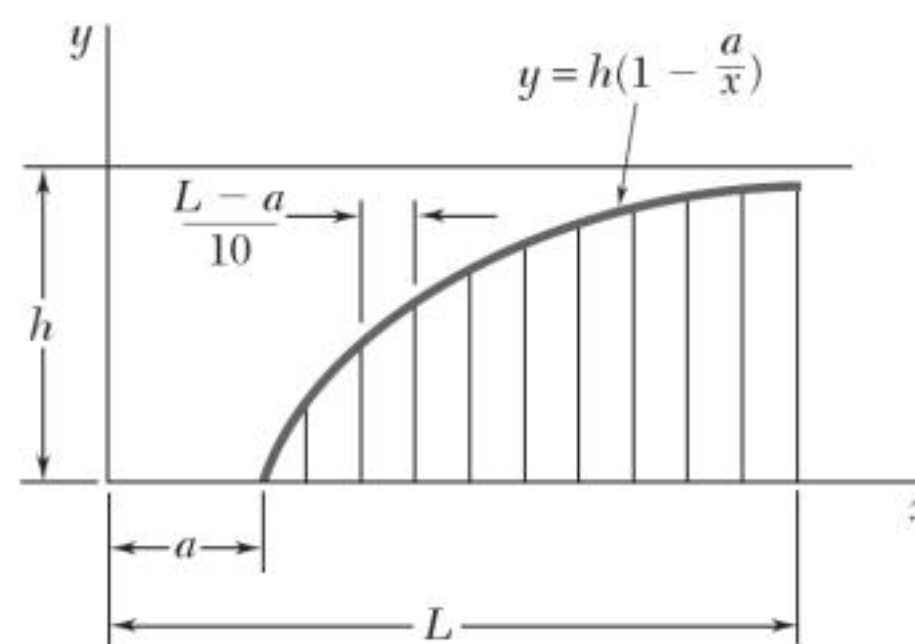


Figura P5.C4

5.C5 Aproxime área sombreada mostrada na figura por uma série de n retângulos, cada um com largura Δa e da forma $bcc'b'$, usando um programa de computador, calcule as coordenadas do centroide da área. Use esse programa para localizar o centroide quando (a) $m = 2$, $a = 80$ mm, $h = 80$ mm; (b) $m = 2$, $a = 80$ mm, $h = 500$ mm; (c) $m = 5$, $a = 80$ mm, $h = 80$ mm; (d) $m = 5$, $a = 80$ mm, $h = 500$ mm. Em cada caso, compare as respostas obtidas com os valores exatos de \bar{x} e \bar{y} das fórmulas indicadas na Fig. 5.8A e determine a porcentagem de erro.

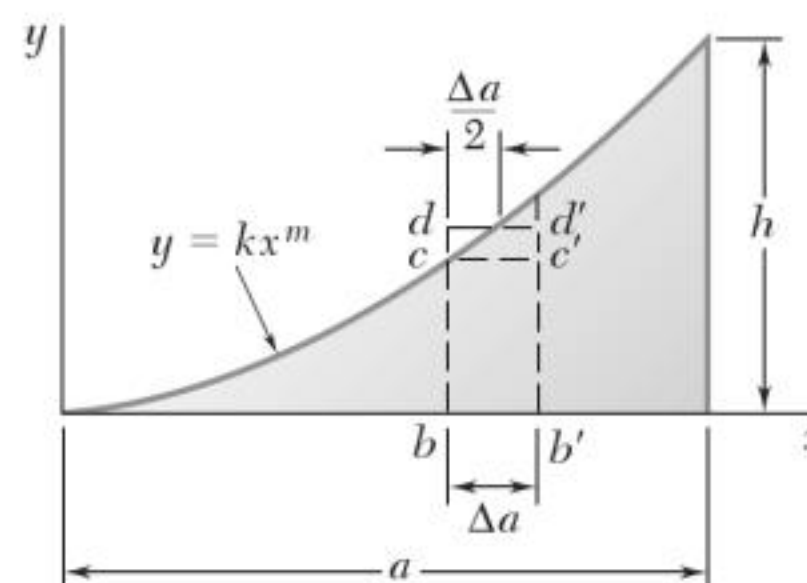


Figura P5.C5

5.C6 Resolva o Problema 5.C5 usando os retângulos $bdd'b'$.

***5.C7** Um fazendeiro pediu a um grupo de estudantes de engenharia para determinar o volume de água em um pequeno tanque. Usando cordas, os estudantes, primeiro dispuseram uma rede de $0,6 \times 0,6$ m no tanque e, então, registraram a profundidade da água em metros, por cada ponto de interseção



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

CAPÍTULO 6

Análise de estruturas



6

Análise de estruturas

- 6.1 Introdução
- 6.2 Definição de uma treliça
- 6.3 Treliças simples
- 6.4 Análise de treliças pelo Método dos nós
- 6.5 Nós sujeitos a condições especiais de carregamento
- 6.6 Treliças espaciais
- 6.7 Análise de treliças pelo método das seções
- 6.8 Treliças feitas de várias treliças simples
- 6.9 Estruturas que contêm elementos sujeitos à ação de múltiplas forças
- 6.10 Análise de uma estrutura
- 6.11 Estruturas que deixam de ser rígidas quando separadas de seus apoios
- 6.12 Máquinas

6.1 Introdução

Os problemas estudados nos capítulos precedentes diziam respeito ao equilíbrio de um único corpo rígido, e todas as forças consideradas eram externas a esse corpo. Consideraremos, agora, problemas que tratam do equilíbrio de estruturas feitas de várias partes interligadas. Esses problemas tratam da determinação das forças não apenas externas que agem sobre uma estrutura, mas também daquelas que mantêm unidas as várias partes da estrutura. Do ponto de vista da estrutura como um todo, essas forças são *forças internas*.

Considere, por exemplo, o guindaste ilustrado na Fig. 6.1a, que suporta uma carga W . O guindaste consiste em três vigas, AD , CF e BE , ligadas por pinos sem atrito. Ele é preso por um pino em A e é por um cabo DG . O diagrama de corpo livre do guindaste foi desenhado na Fig. 6.1b. As forças externas estão indicadas no diagrama e incluem o peso W , as duas componentes A_x e A_y da reação em A e a força T exercida pelo cabo D . As forças internas que mantêm unidas as várias partes do guindaste não aparecem no diagrama. Se, contudo, o guindaste fosse desmembrado e um diagrama de corpo livre para cada uma de suas partes componentes fosse traçado, as forças que mantêm as três vigas unidas deveriam também ser representadas, uma vez que são forças externas sob o ponto de vista de cada parte componente (Fig. 6.1c).

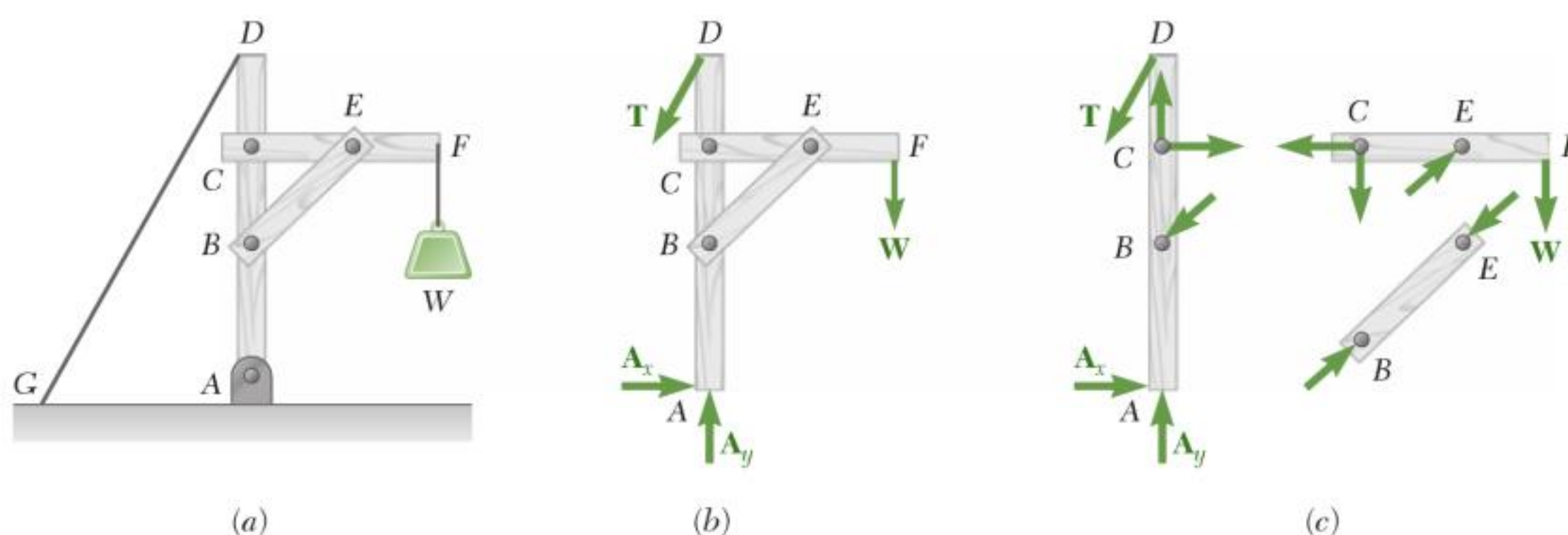


Figura 6.1

Deve-se notar que a força exercida pela barra BE sobre o ponto B da barra AD é igual e oposta à força exercida no mesmo ponto da barra BE pela barra AD ; da mesma forma, a força exercida por BE sobre o ponto E de CF é igual e oposta à força exercida por CF sobre BE ; e as componentes da força exercida por CF sobre o ponto C de AD são iguais e opostas às componentes da força exercida por AD sobre CF . Isto está de acordo com a terceira lei de Newton, que estabelece que *forças de ação e reação entre corpos em contato têm o mesmo módulo, a mesma linha de ação e sentidos opostos*. Como mencionado no Capítulo 1, essa lei é um dos seis princípios fundamentais da Mecânica clássica e sua aplicação é essencial à solução de problemas envolvendo corpos interligados.

Neste capítulo, serão consideradas três importantes categorias de estruturas em engenharia:

1. *Treliças*, que são projetadas para apoiar cargas e geralmente considerados como fixas e totalmente vinculadas. Treliças são formadas unicamente por elementos retilíneos conectados juntas localizadas nas extremidades de cada elemento. Os elementos de uma treliça são, portanto, *elementos sujeitos a duas forças*, ou seja, elementos que atuam sob duas forças de mesmo módulo mas de sentidos opostos ao elemento.
2. *Estruturas*, que também são projetadas para apoiar cargas e que também são totalmente vinculadas. As estruturas, no entanto, têm, como no guindaste da Fig. 6.1, pelo menos um *elemento sujeito a múltiplas forças*, ou seja, um elemento sobre o qual são aplicadas três ou mais forças que na maioria das vezes não são direcionadas ao longo do elemento.
3. *Máquinas*, que são projetadas para transmitir e modificar forças e são estruturas que contêm partes móveis. As máquinas tais como as estruturas, sempre contêm ao menos um elemento sujeito a múltiplas forças.



Foto 6.1 A foto mostra uma conexão por pinos de um vão de aproximação da ponte San Francisco – Oakland Bay.

TRELIÇAS

6.2 Definição de uma treliça

A treliça é um dos principais tipos de estruturas da engenharia. Ela oferece, ao mesmo tempo, uma solução prática e econômica a muitas situações de engenharia, especialmente no projeto de pontes e edifícios. Uma treliça típica é mostrada na Fig. 6.2a. Ela consiste em elementos retos unidos por nós. Elementos de treliça são unidos apenas em suas extremidades; portanto, nenhum deles é contínuo por meio de um nó. Na Fig. 6.2a, por exemplo, não existe um elemento AB ; em vez disso, existem dois elementos distintos AD e DB . A maioria das estruturas reais é feita de várias treliças unidas para formar uma estrutura espacial. Cada treliça é projetada para sustentar cargas que atuam em seu plano, podendo ser tratada como uma estrutura bidimensional.

Em geral, os elementos de uma treliça são delgados e podem suportar uma pequena carga lateral; todas as cargas, portanto, devem ser aplicadas aos vários nós, e não aos elementos propriamente ditos. Quando uma carga concentrada é aplicada entre dois nós, ou quando uma carga distribuída é suportada pela treliça, como no caso de uma treliça de ponte, é preciso prever um sistema de pavimentação que, por meio do uso de longarinas e vigas transversais, transfere a carga aos nós (Fig. 6.3).

Também supõe-se que os pesos dos elementos da treliça são aplicados nos nós, sendo metade do peso do elemento aplicado a cada um dos dois nós que o une. Embora os elementos sejam, de fato, unidos por meio de conexões aparafusadas, rebitadas ou soldadas, costuma-se considerar que são unidos por meio de pinos; portanto, as forças em cada extremidade de um elemento reduzem-se a uma única força sem nenhum momento. Assim, as únicas forças consideradas, exercidas a um elemento de treliça, reduzem-se a uma única força em cada extremidade do elemento.

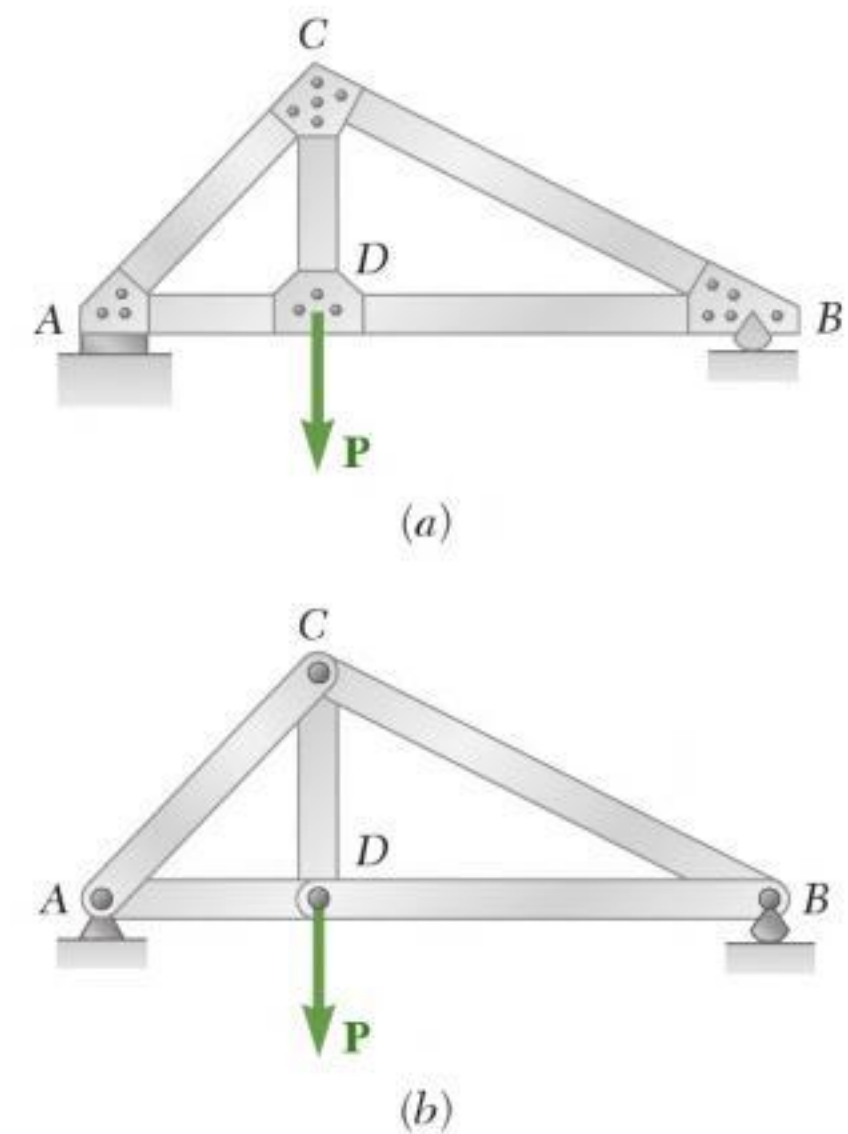


Figura 6.2

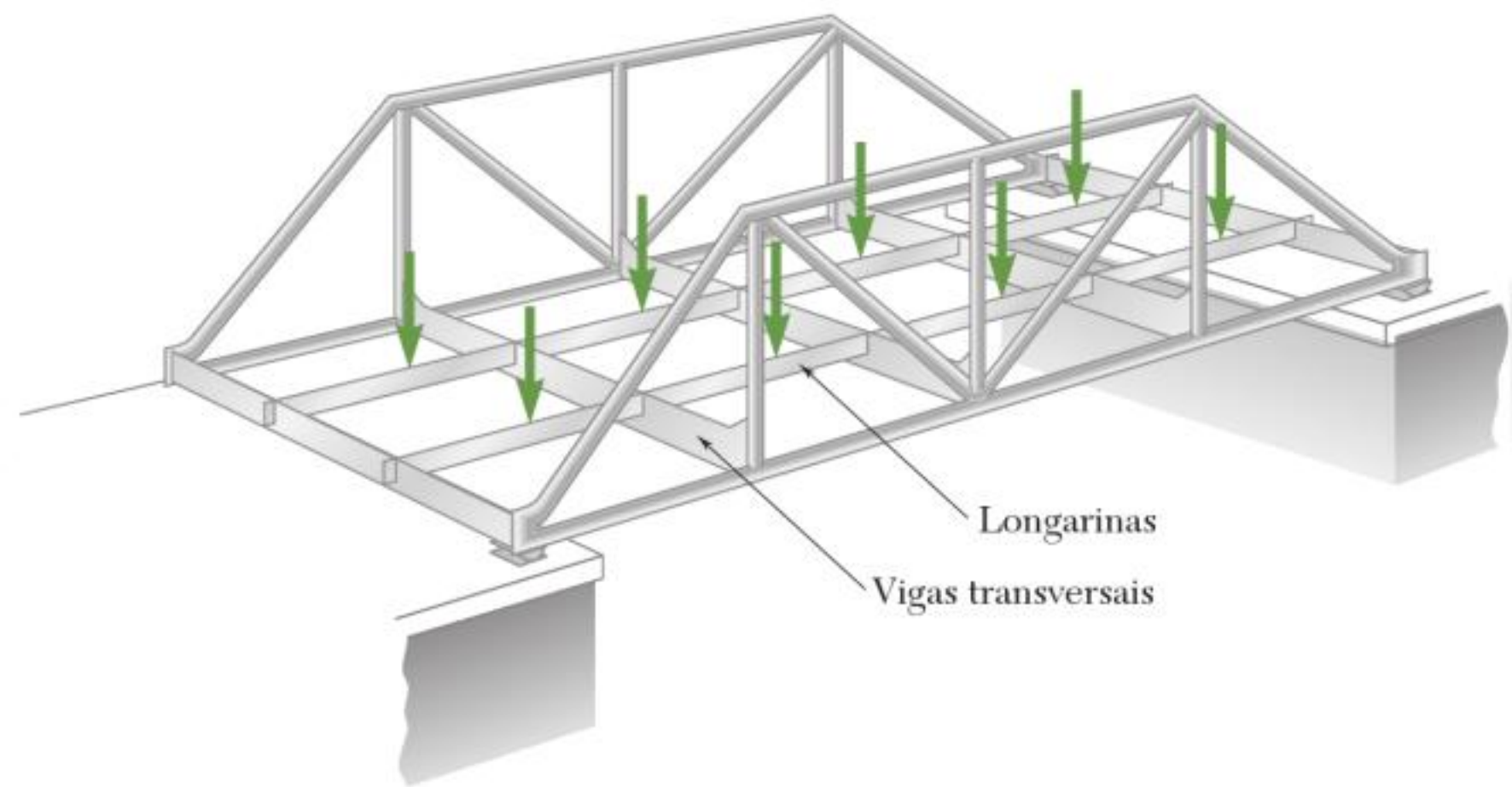


Figura 6.3

Sendo assim, cada elemento pode, ser tratado como um elemento sujeito à ação de duas forças, e a treliça toda pode ser considerada como um grupo de pinos e elementos sujeitos à ação de duas forças (Fig. 6.2b). A ação das forças sob um elemento individual pode ocorrer conforme indicado nos dois esboços da Fig. 6.4. Em (a), as forças tendem a dividir em pedaços o elemento, que está sob tração, enquanto, em (b), as forças tendem a comprimir o elemento, que está sob compressão. Várias treliças típicas são ilustradas na Fig. 6.5.

Figura 6.4

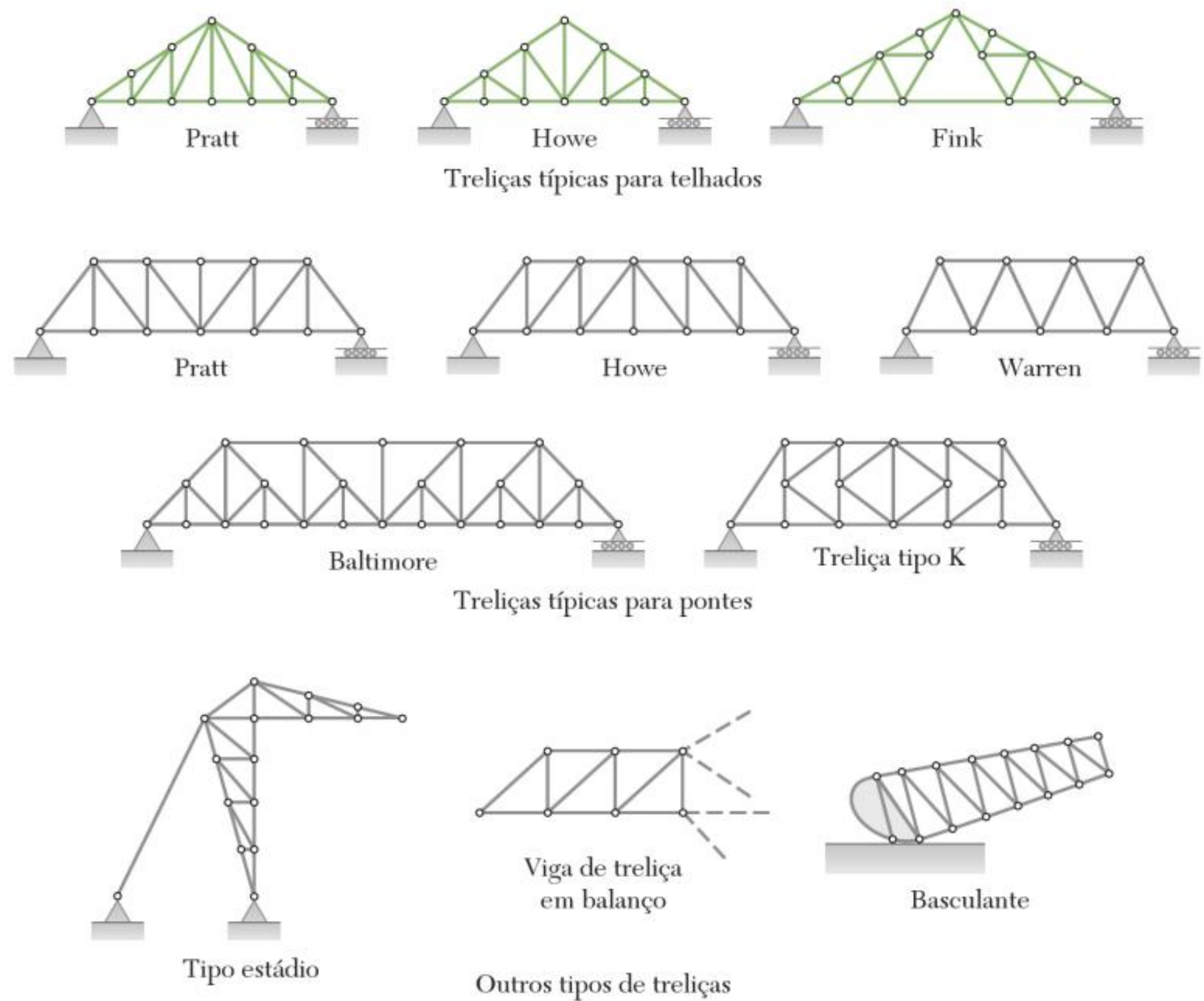
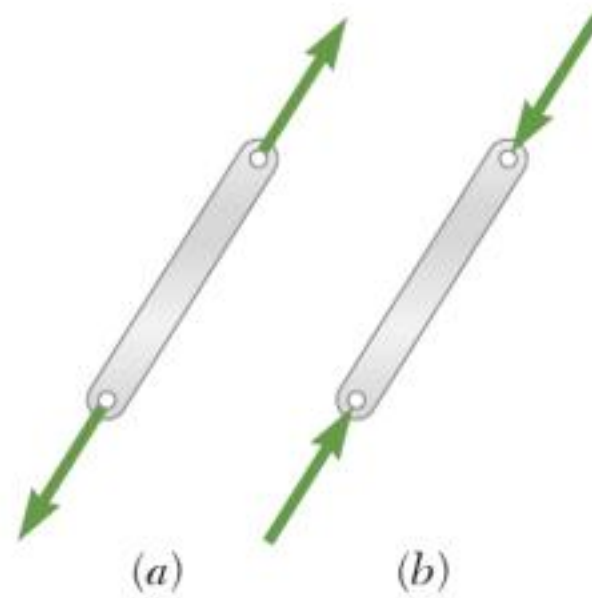


Figura 6.5



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

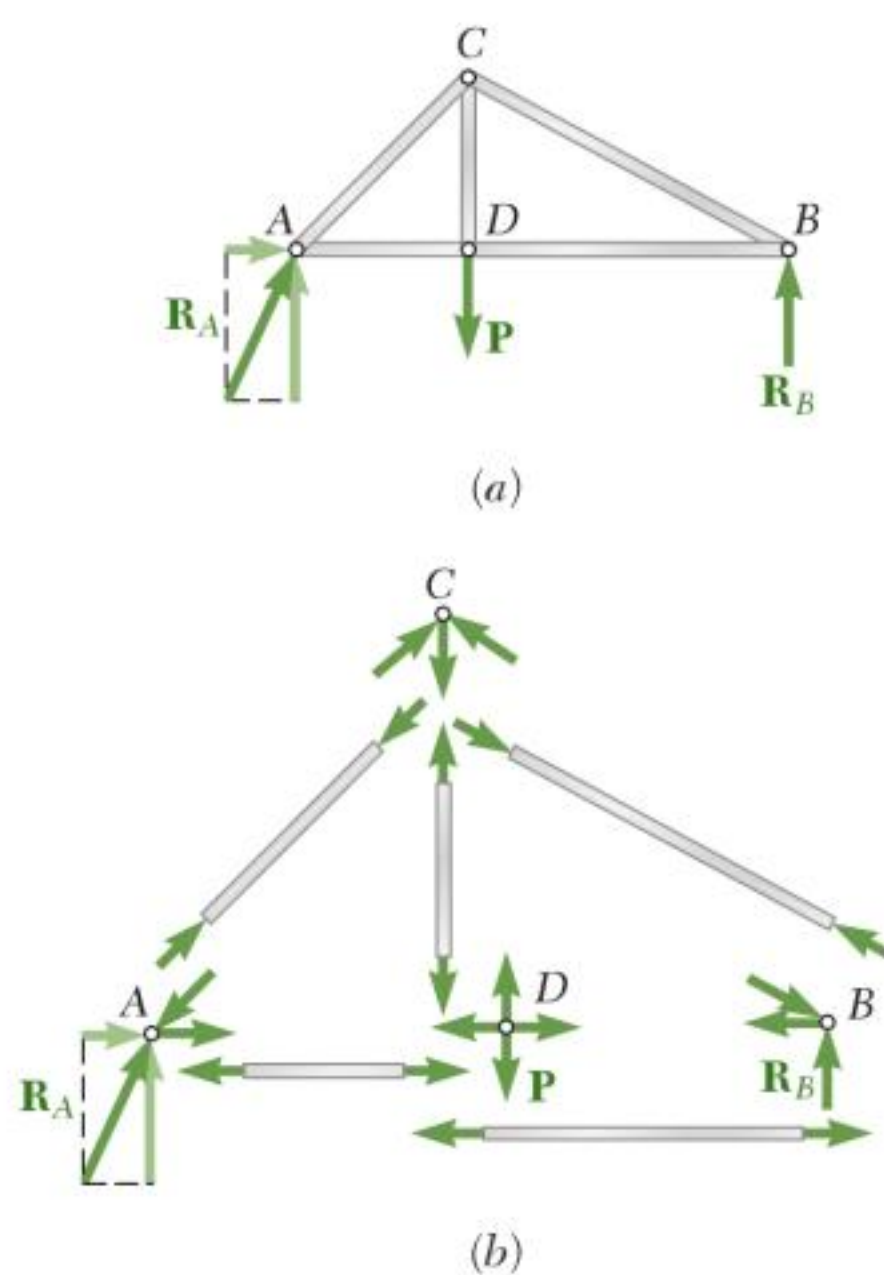


Figura 6.7

6.4 Análise de treliças pelo método dos nós

Foi visto na Seção 6.2 que uma treliça pode ser considerada como um grupo de pinos e elementos sujeitos à ação de duas forças. A treliça da Fig. 6.2, cujo diagrama de corpo livre é ilustrado na Fig. 6.7a, pode então ser desmembrada, e um diagrama de corpo livre traçado para cada pino e cada elemento (Fig. 6.7b). Cada elemento é submetido a duas forças, uma em cada extremidade, tendo elas mesmo módulo, mesma linha de ação e sentidos opostos (Seção 4.6). Além disso, a terceira lei de Newton indica que as forças de ação e reação entre um elemento e um pino são iguais e opostas. Portanto, as forças exercidas por um elemento sobre os dois pinos que o interliga devem ser dirigidas ao longo desse elemento e ser iguais e opostas. A intensidade comum das forças exercidas por um elemento sobre os dois pinos que o interliga é comumente referida como a *força no elemento* considerada, muito embora essa quantidade seja, na realidade, um escalar. Uma vez que as linhas de ação de todas as forças internas de uma treliça são conhecidas, a análise de uma treliça se reduz ao cálculo das forças em seus vários elementos e à determinação da situação em cada um deles, isto é, se o mesmo está sujeito a tração ou compressão.

Uma vez que a treliça está em equilíbrio, cada pino deve estar em equilíbrio. O fato do pino estar em equilíbrio pode ser demonstrado ao traçar de seu diagrama de corpo livre e por duas equações de equilíbrio (Seção 2.9). Se a treliça contém n pinos, existirão, portanto, $2n$ equações disponíveis, que podem ser resolvidas para $2n$ incógnitas. No caso de uma treliça simples, tem-se $m = 2n - 3$, isto é, $2n = m + 3$, e o número de incógnitas pode ser determinado, a partir dos diagramas de corpo livre dos pinos, pela equação $m + 3$. Isto significa que as forças em todos os elementos, bem como as duas componentes da reação R_A e da reação R_B , podem ser determinadas considerando-se os diagramas de corpo livre dos pinos.

O fato de a treliça inteira ser um corpo rígido em equilíbrio pode ser usado para escrever três novas equações envolvendo as forças indicadas no diagrama de corpo livre da Fig. 6.7a. Uma vez que não contém nenhuma informação extra, essas equações não são independentes das equações associadas com os diagramas de corpo livre dos pinos. Além disso, podem ser usadas para determinar imediatamente os componentes das reações nos apoios. A disposição de pinos e elementos numa treliça simples é tal que será, então, sempre possível encontrar um nó envolvendo apenas duas forças desenvolvidas. Essas forças podem ser determinadas pelos métodos da Seção 2.11, e seus valores transferidos para os nós adjacentes e tratados como quantidades conhecidas nesses nós. Esse procedimento pode ser repetido até que todas as forças desconhecidas tenham sido determinadas.

Como exemplo, a treliça da Fig. 6.7 será analisada considerando-se sucessivamente, o equilíbrio de cada pino, começando por um nó no qual somente duas forças são desconhecidas. Na treliça considerada, todos os pinos são submetidos a pelo menos três forças desconhecidas. Portanto, as reações nos suportes devem primeiramente ser determinadas considerando-se a treliça toda como sendo um corpo livre e usando-se as equações de equilíbrio de um corpo rígido. Dessa maneira, verificamos que R_A é vertical e determinamos a intensidade de R_A e R_B .

O número de forças desconhecidas no nó A é então reduzido para dois, e essas forças podem ser determinadas considerando-se o equilíbrio do



Foto 6.3 Já que as treliças de telhado, tais como as da foto, requerem apoio somente em suas extremidades, é possível construir edifícios com grandes vãos livres centrais.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

familiarizado com as condições sob as quais as regras estabelecidas nesta seção podem ser aplicadas, você deve traçar os diagramas de corpo livre de todos os pinos e escrever as equações correspondentes de equilíbrio (ou desenhar os polígonos correspondentes de força), estando ou não os nós em destaque sujeitos a uma das condições especiais de carregamento descritas anteriormente.

Uma última observação a respeito dos elementos sem força aplicada: esses elementos não são inúteis. Por exemplo, embora os elementos sem força aplicada da Fig. 6.14 não suportem cargas sob as condições de carregamento consideradas, os mesmos elementos provavelmente iriam suportar cargas se as condições de carregamento forem alteradas. Além disso, mesmo no caso considerado, esses elementos são necessários para suportar o peso da treliça e para manter sua forma desejada.

*6.6 Treliças espaciais

Quando vários elementos retilíneos são unidos por suas extremidades para formar uma configuração tridimensional, a estrutura obtida é chamada de *treliça espacial*.

Recordemos da Seção 6.3 que a treliça rígida bidimensional mais primária consiste em três elementos unidos por suas extremidades para formar os lados de um triângulo; pela adição de dois elementos de cada vez a essa configuração básica, e ligando-os em um novo nó, é possível obter uma estrutura rígida maior, que é chamada de treliça simples. Da mesma forma, a treliça rígida espacial mais primária consiste em seis elementos ligados por suas extremidades para formar as arestas de um tetraedro $ABDC$ (Fig. 6.15a). Acrescentando três elementos de cada vez a essa configuração básica, tais como AE , BE e CE , fixando-os a três nós existentes e unindo-os em um novo nó*, podemos obter uma estrutura rígida maior, que é definida como uma *treliça espacial simples* (Fig. 6.15b). Observando-se que o tetraedro básico possui seis elementos e quatro nós e que cada vez que três elementos são adicionados, o número de nós é acrescido de um. Concluímos, então, que em uma treliça espacial simples o número total de elementos é $m = 3n - 6$, onde n é o número total de nós.

Se uma treliça espacial deve estar completamente vinculada e as reações em seus apoios devem ser estaticamente determinadas, os apoios devem consistir em uma combinação de esferas, roletes e rótulas, fornecendo seis reações desconhecidas (ver Seção 4.9). Essas reações desconhecidas podem ser facilmente determinadas resolvendo-se as seis equações que expressam que a treliça tridimensional está em equilíbrio.

Embora os elementos de uma treliça espacial sejam de fato unidas por meio de conexões soldadas ou rebitadas, supõe-se que cada nó consiste em uma conexão em rótula. Dessa forma, nenhum binário será aplicado aos elementos da treliça, e cada elemento pode ser tratado como um corpo sujeito à ação de duas forças. As condições de equilíbrio para cada nó serão expressas pelas três equações $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma F_z = 0$. No caso de uma treliça espacial simples contendo n nós, escrevemos que as condições de equilíbrio para cada nó conduzirão, portanto, a $3n$ equações. Uma vez que $m = 3n - 6$, essas equações são suficientes para determinar todas as forças desconhecidas (forças em m elementos e seis reações nos apoios). Contudo, para evitar resolução de muitas equações simultâneas, deve-se tomar cuidado para selecionar os nós escolhidos em uma ordem tal que nenhum nó selecionado envolva mais que três forças desconhecidas.

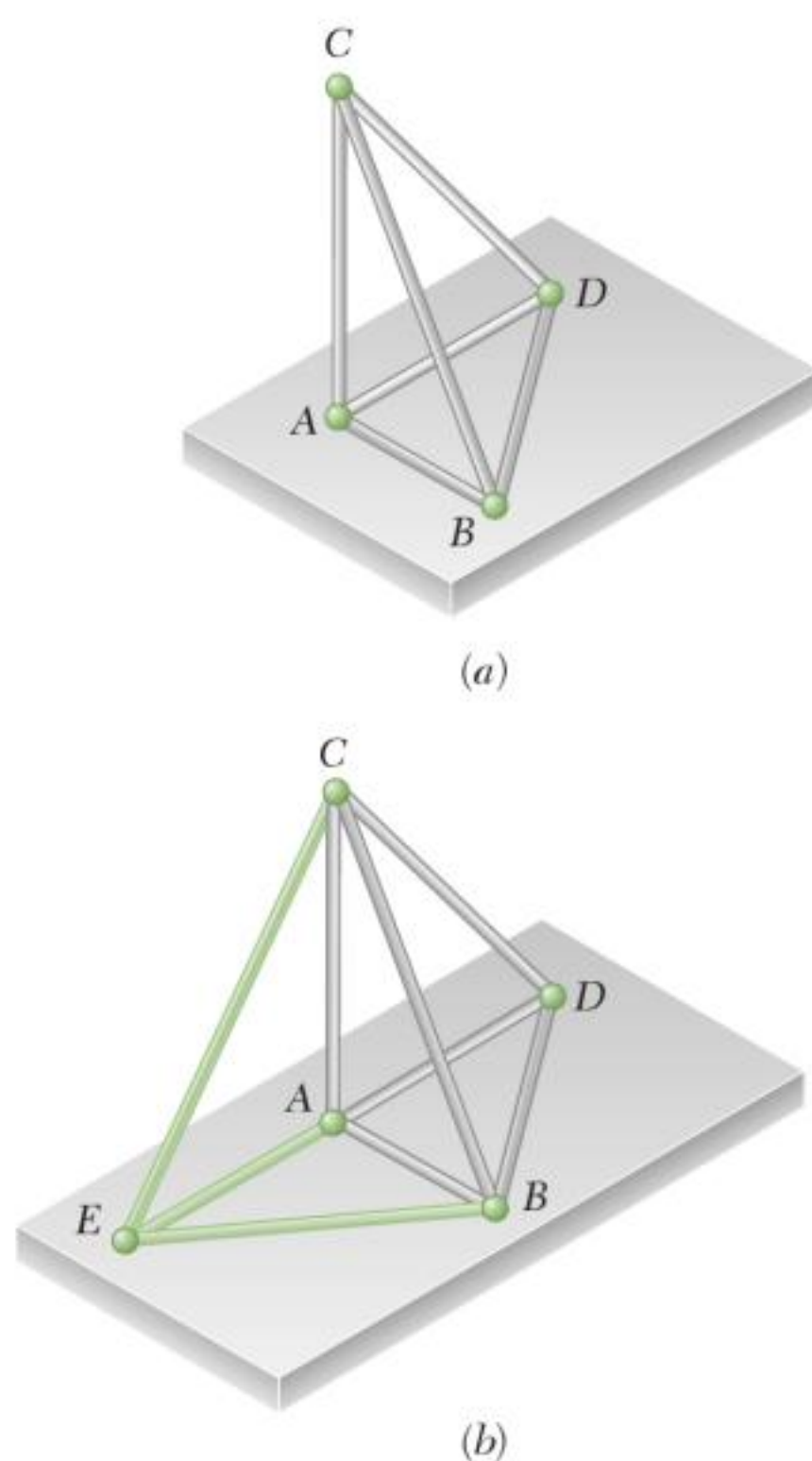


Figura 6.15

* Os quatro nós não podem estar em um plano.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

6.1 a 6.8 Usando o método dos nós, determine a força em cada elemento da treliça mostrada na figura. Indique se cada elemento está sob tração ou sob compressão.

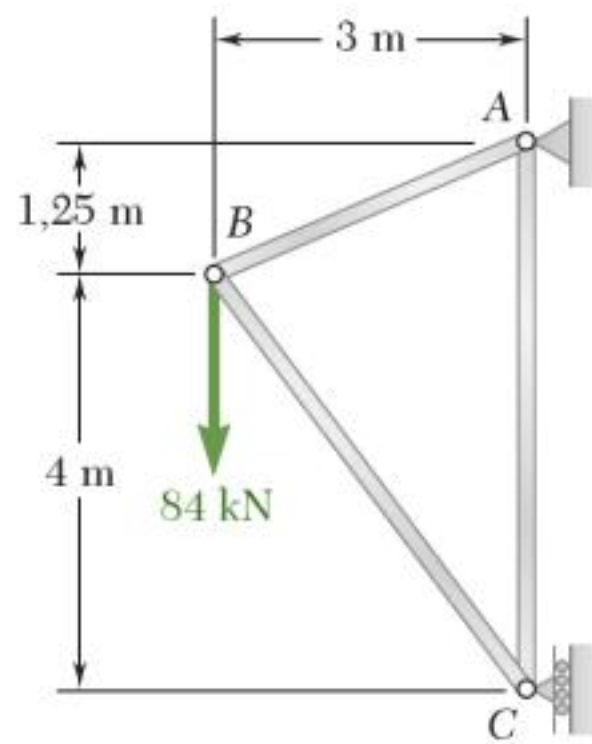


Figura P6.1

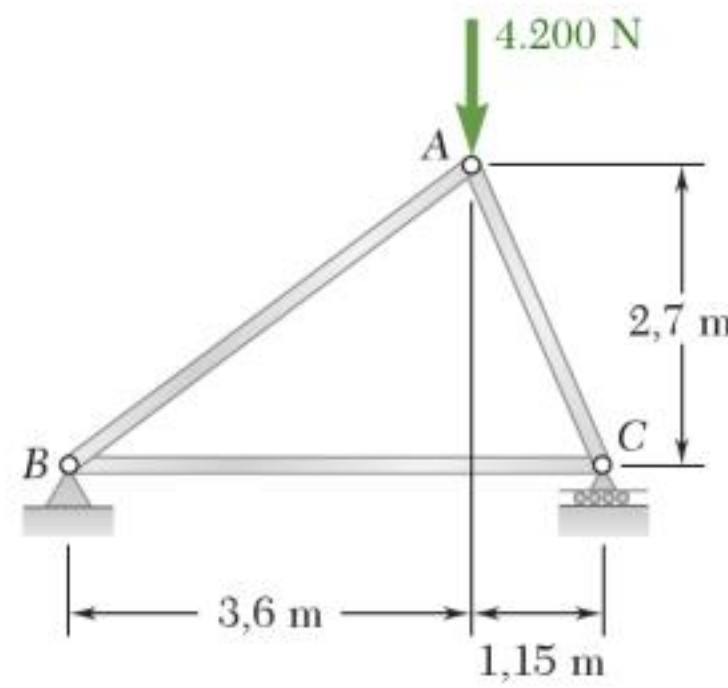


Figura P6.2

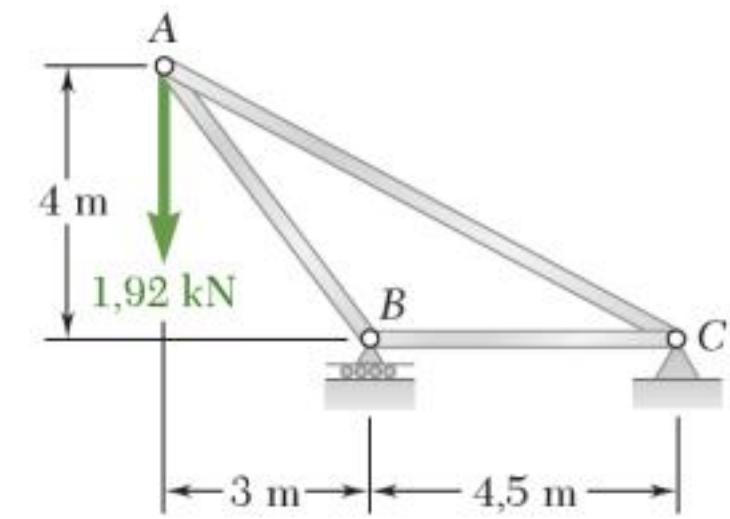


Figura P6.3

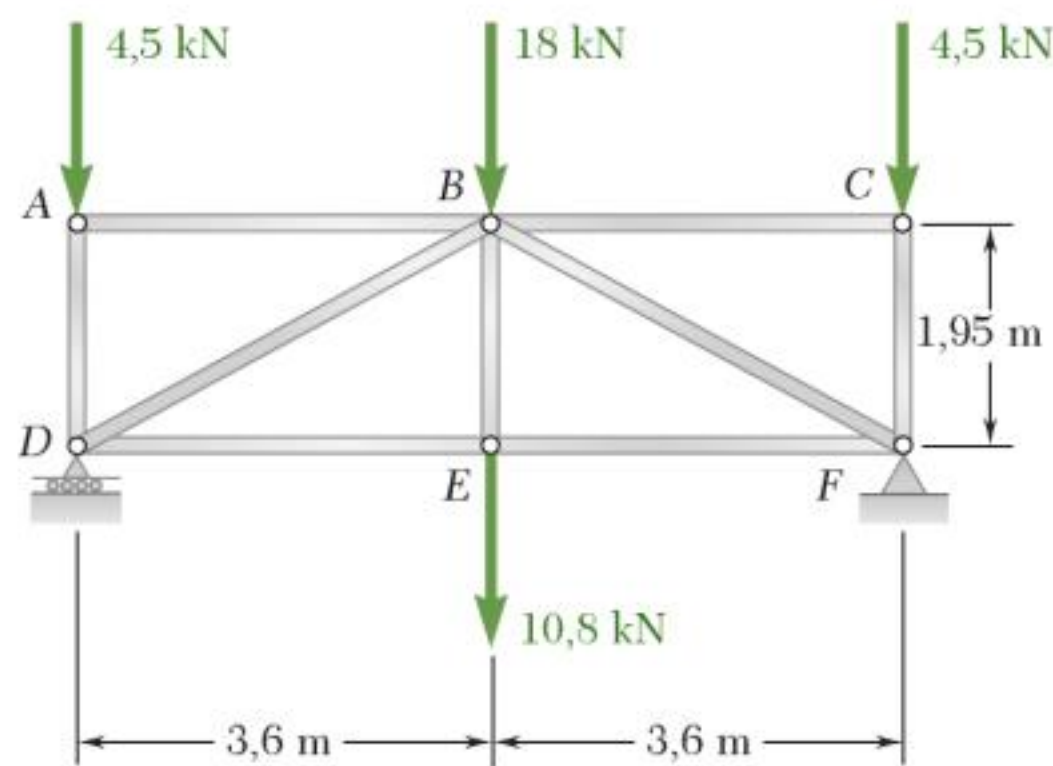


Figura P6.4

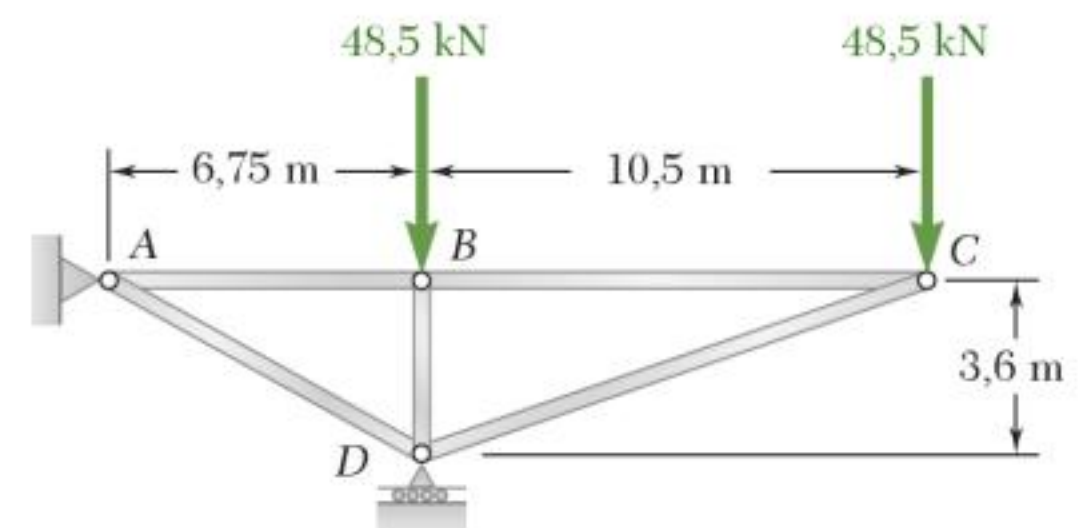


Figura P6.5

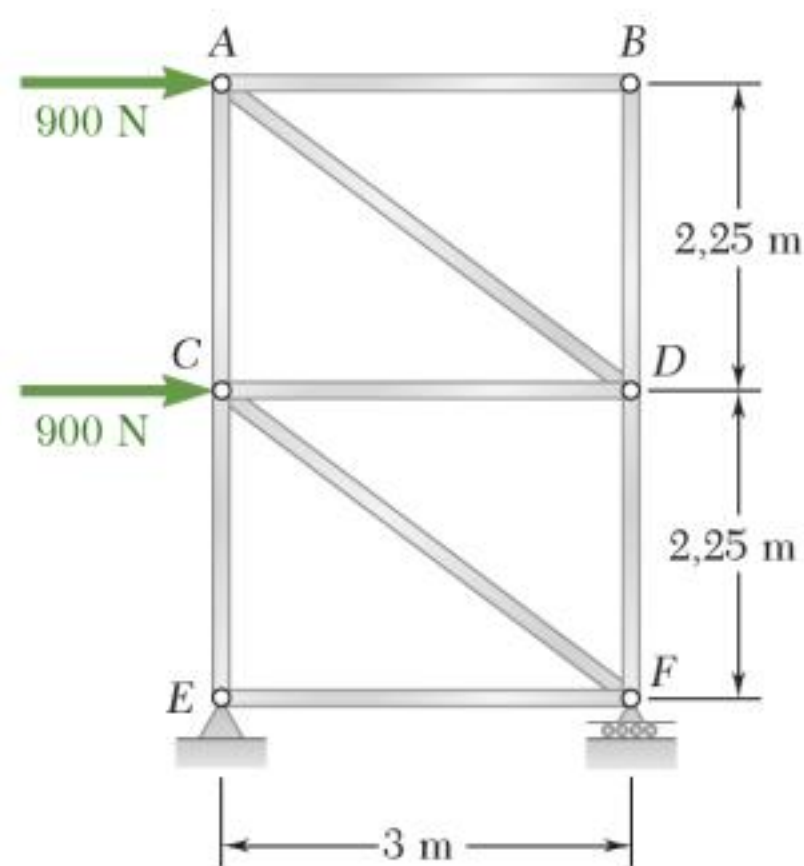


Figura P6.6

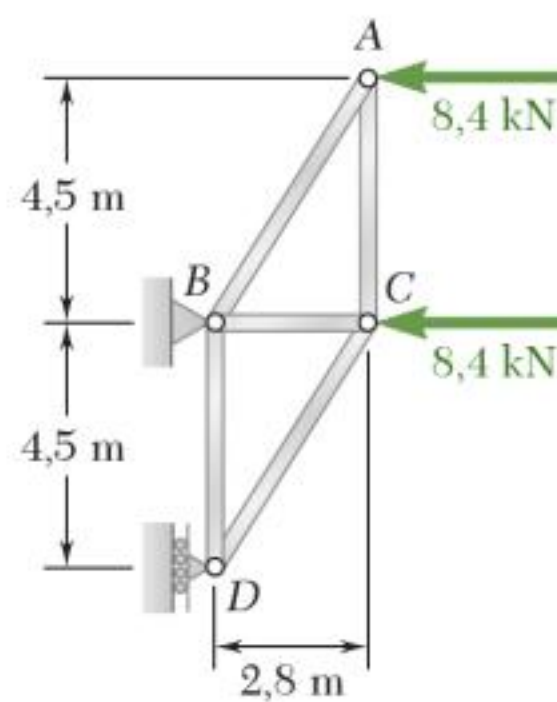


Figura P6.7

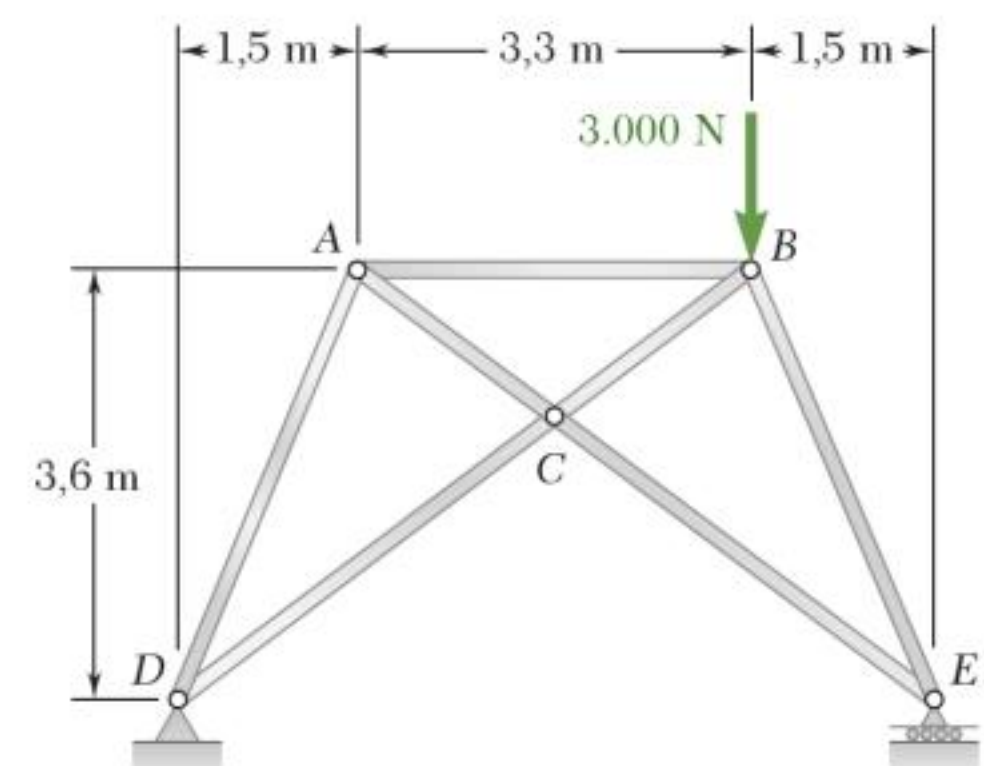


Figura P6.8



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

B. Sobre treliças completamente vinculadas e determinadas:

1. Primeiro observemos que qualquer treliça simples que estiver simplesmente apoiada é uma treliça completamente vinculada e determinada.

2. Para determinarmos se qualquer outra treliça é ou não completamente vinculada e determinada, primeiro devemos contar o número m de seus elementos, o número n de seus nós e o número r dos componentes de reação em seus apoios. Comparemos, então, a soma $m + r$ que representa o número de incógnitas e o produto $2n$ que representa o número de equações de equilíbrio independentes disponíveis.

a. Se $m + r < 2n$, há menos incógnitas do que equações. Portanto, algumas das equações não podem ser satisfeitas: a treliça é apenas *parcialmente vinculada*.

b. Se $m + r > 2n$, há mais incógnitas do que equações. Portanto, algumas das incógnitas não podem ser determinadas: a treliça é *indeterminada*.

c. Se $m + r = 2n$, há tantas incógnitas quanto equações. Isso, no entanto, não significa que todas as incógnitas podem ser determinadas e que todas as equações podem ser satisfeitas. Para descobrirmos se uma treliça é *completamente* ou *impropriamente vinculada*, devemos tentar determinar as reações em seus apoios e as forças em seus elementos. Se for possível achar todas, a treliça é *completamente vinculada e determinada*.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

5. As forças internas podem agora ser determinadas, assim como quaisquer reações que ainda não encontramos.

a. O diagrama de corpo livre de cada um dos elementos sujeitos à ação de múltiplas forças pode nos fornecer *três equações de equilíbrio*.

b. Para simplificar a solução, devemos procurar uma maneira de escrever uma equação que envolva uma única incógnita. Se pudermos localizar *um ponto em que todos os componentes de força, exceto um, se cruzam*, obteremos uma equação em uma única incógnita somando momentos em relação a esse ponto. *Se todas as forças desconhecidas, exceto uma, forem paralelas*, obteremos uma equação em uma única incógnita somando componentes de forças em uma direção perpendicular às forças paralelas.

c. Como foi escolhido arbitrariamente o sentido de cada uma das forças desconhecidas, não podemos determinar se a sua suposição estava certa até que a solução esteja completa. Para fazer isso, consideremos *o sinal* do valor encontrado para cada uma das incógnitas: um sinal *positivo* significa que o sentido que selecionamos estava *certo*; um sinal *negativo* significa que o sentido é *oposto* ao sentido que se era esperado.

6. Para sermos mais eficazes e eficientes à medida que prosseguimos com a solução, observemos as seguintes regras:

a. Se uma equação que envolva uma única incógnita puder ser encontrada, iremos escrever essa equação e *resolvê-la para essa incógnita*. Imediatamente, *substituir* essa incógnita em todos os lugares em que ela aparece nos outros diagramas de corpo livre *pelo valor que encontramos*. Devemos repetir esse processo, procurando equações de equilíbrio que envolvam uma única incógnita, até que tenhamos encontrado todas as forças internas e reações desconhecidas.

b. Se uma equação que envolva uma única incógnita não puder ser encontrada, podemos *resolver um par de equações simultâneas*. Antes de fazer isso, verifiquemos se foi mostrado os valores de todas as reações que foram obtidos do diagrama de corpo livre da estrutura inteira.

c. O número total de equações de equilíbrio para a estrutura inteira e para os elementos individuais *será maior que o número de forças e de reações desconhecidas*. Depois que tivermos encontrado todas as reações e todas as forças internas, poderemos usar as equações dependentes restantes para verificar a exatidão da solução.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

b. determinar os pontos em que $V = 0$ e os valores correspondentes de $|M|$: ocorrerá sob uma carga distribuída. Para achar a distância x entre o ponto C , onde a carga distribuída começa, e o ponto D , onde o esforço cortante é zero, use a Eq. (7.2'); para V_C , usemos o valor conhecido do esforço cortante no ponto C ; para V_D , usemos zero e demonstremos a área sob a curva de carregamento como função de x [Problema Resolvido 7.5].

5. É possível melhorar a qualidade dos desenhos lembrando que, a qualquer ponto dado, de acordo com as Eqs. (7.1) e (7.3), a inclinação da curva V é igual a $-w$ e a inclinação da curva M é igual a V . Em particular, seus desenhos devem mostrar claramente onde a inclinação das curvas é nula.

6. Finalmente, para vigas que sustentam uma carga distribuída demonstrada como uma função $w(x)$, lembremo-nos de que o esforço cortante V pode ser obtido integrando a função $-w(x)$ e o momento fletor M , integrando $V(x)$ [Eqs. (7.3) e (7.4)].



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

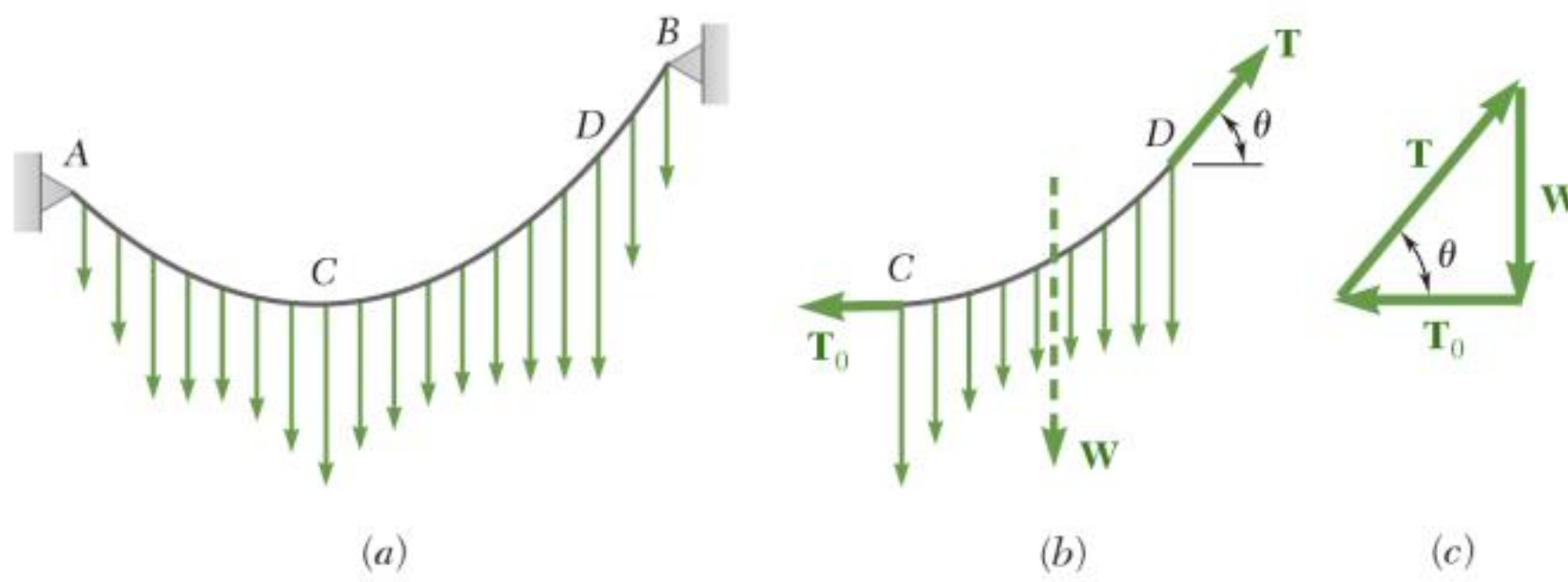


Figura 7.15

de tração \mathbf{T} em D , direcionada ao longo da tangente ao cabo em D , e a resultante \mathbf{W} da carga distribuída sustentada pela parte CD do cabo. Desenhando o correspondente triângulo de forças (Fig. 7.15c), obtemos as seguintes relações:

$$T \cos \theta = T_0 \quad T \sin \theta = W \quad (7.5)$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{W}{T_0} \quad (7.6)$$

A partir das Eqs. (7.5), é evidente que o componente horizontal da força de tração \mathbf{T} é o mesmo em qualquer ponto e que o componente vertical de \mathbf{T} é igual à intensidade W da carga medida a partir do ponto mais baixo. As Eqs. (7.6) mostram que a tração T é mínima no ponto mais baixo e máxima em um dos dois pontos de apoio.

*7.9 Cabo parabólico

Vamos supor, agora, que o cabo AB sustenta uma carga *uniformemente distribuída ao longo da horizontal* (Fig. 7.16a). Cabos de pontes suspensas podem ser considerados como sendo carregados desse modo, desde que o peso dos cabos seja leve comparado com o peso dos tabuleiros da ponte. Representamos por w a carga por unidade de comprimento (*medida horizontalmente*) e a indicamos em N/m. Escolhendo eixos coordenados com a origem no ponto mais baixo C do cabo, descobrimos que a intensidade W da carga total, sustentada pela parte do cabo que se estende desde C até o ponto D de coordenadas x e y , é $W = wx$. As relações (7.6), definindo a intensidade e a direção da força de tração em D , tornam-se:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{wx}{T_0} \quad (7.7)$$

Além disso, a distância de D até a linha de ação da resultante \mathbf{W} é igual à metade da distância horizontal de C até D (Fig. 7.16b). Somando os momentos em relação a D , temos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \quad wx \frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

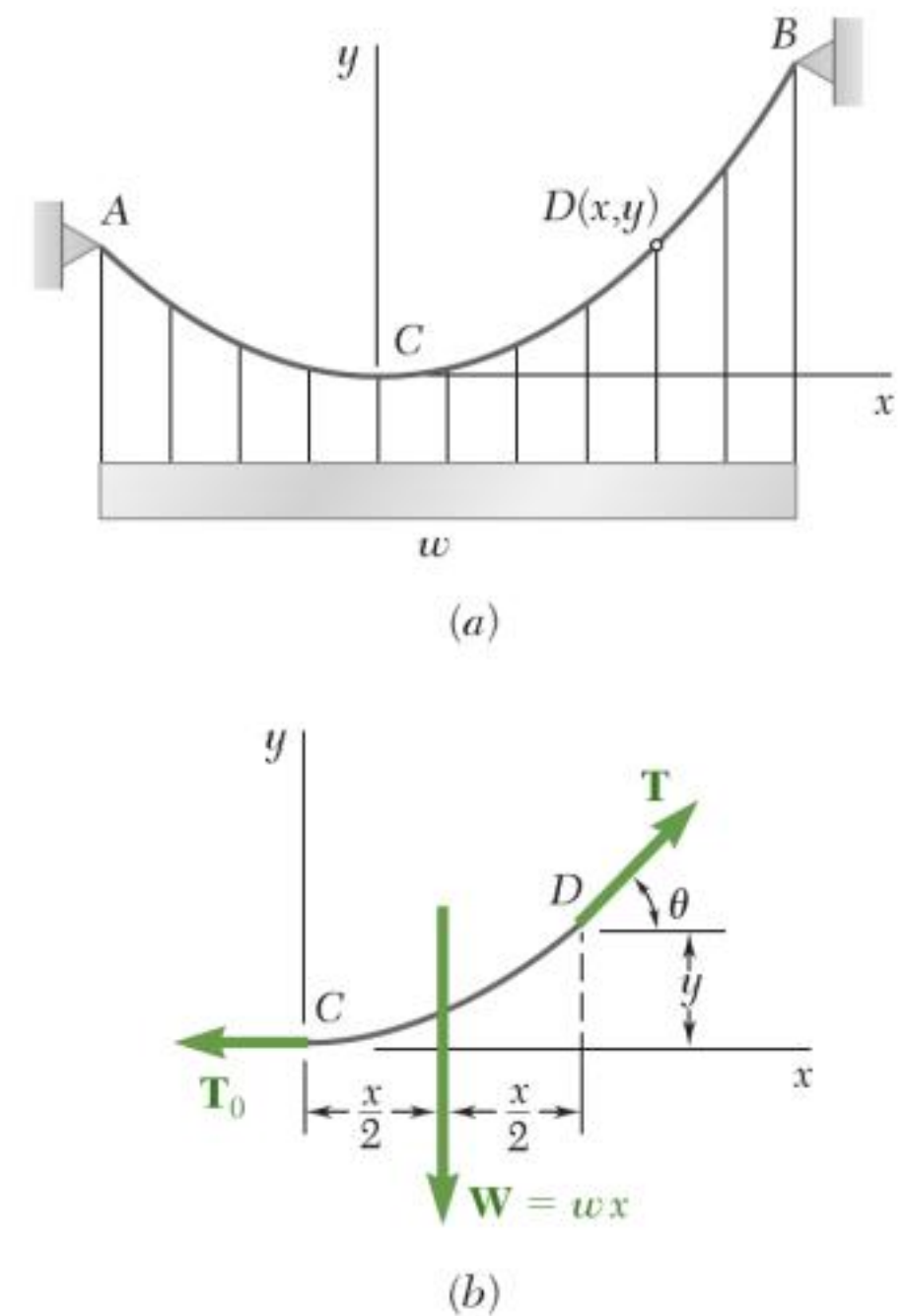


Figura 7.16



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

- 8.46** A peça ABC é sustentada por uma articulação sem atrito em B e por uma cunha de 10° em C . Sabendo que o coeficiente de atrito estático é $0,20$ em ambas faces da cunha, determine (a) a força P necessária para mover a cunha para a esquerda, (b) os componentes da reação correspondente em B .
- 8.47** Resolva o Problema 8.46 considerando que a cunha deve ser movida para direita.
- 8.48 e 8.49** Duas cunhas de 8° e massa desprezível são usadas para mover e posicionar um bloco de 800 kg . Sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é $0,30$, determine a menor força P que poderá ser aplicada, como mostrado na figura, em uma das cunhas.

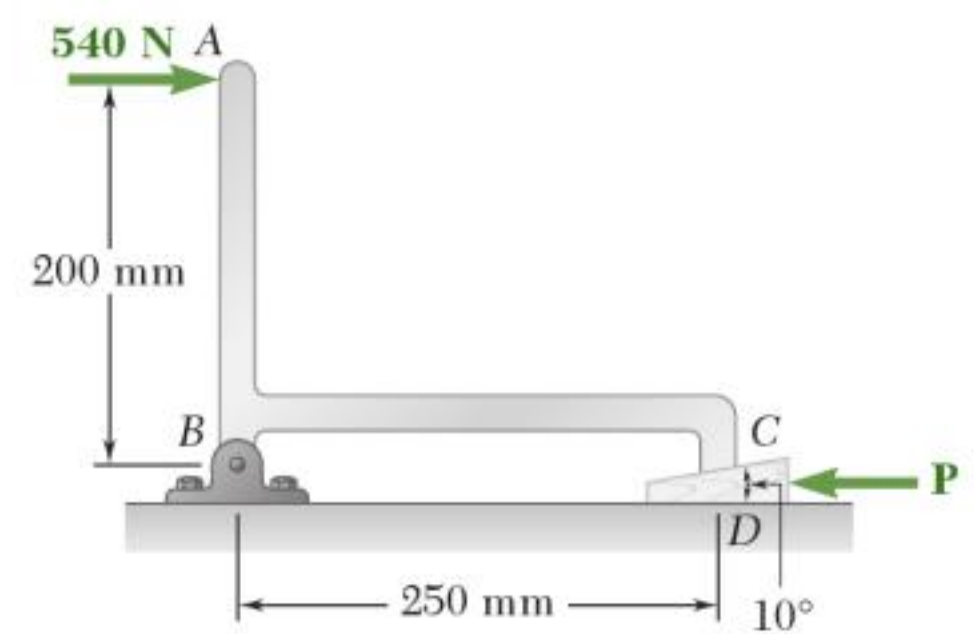


Figura P8.46

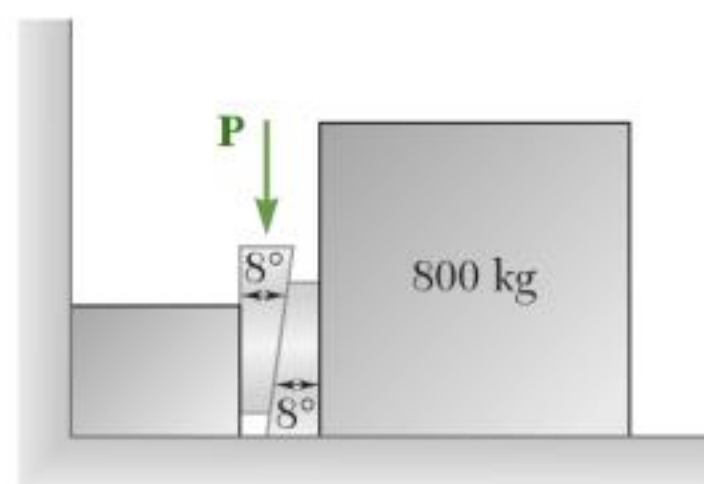


Figura P8.48

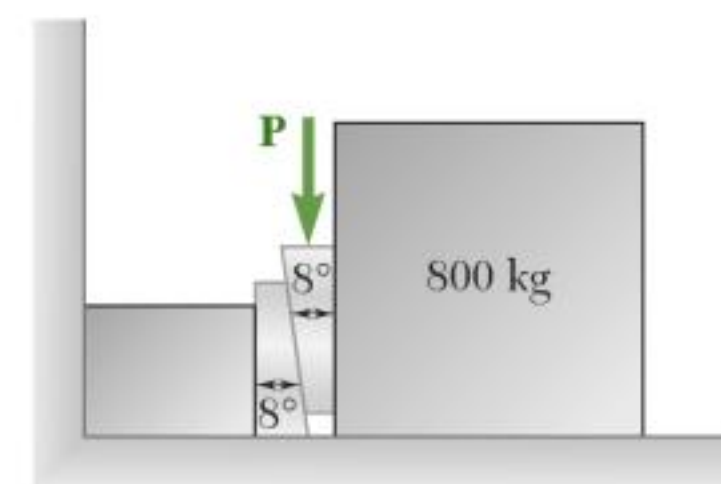


Figura P8.49

- 8.50 e 8.51** A elevação da extremidade de uma viga de aço apoiada em um piso de concreto é ajustada através das cunhas de aço E e F . A placa de base CD foi soldada no flange inferior da viga e sabe-se que a reação na extremidade da viga é 100 kN . O coeficiente de atrito estático é $0,30$ entre as duas superfícies de aço e $0,60$ entre o aço e o concreto. Se o movimento horizontal da viga é contido pela força Q , determine (a) a força P necessária para se erguer a viga, (b) a força Q correspondente.

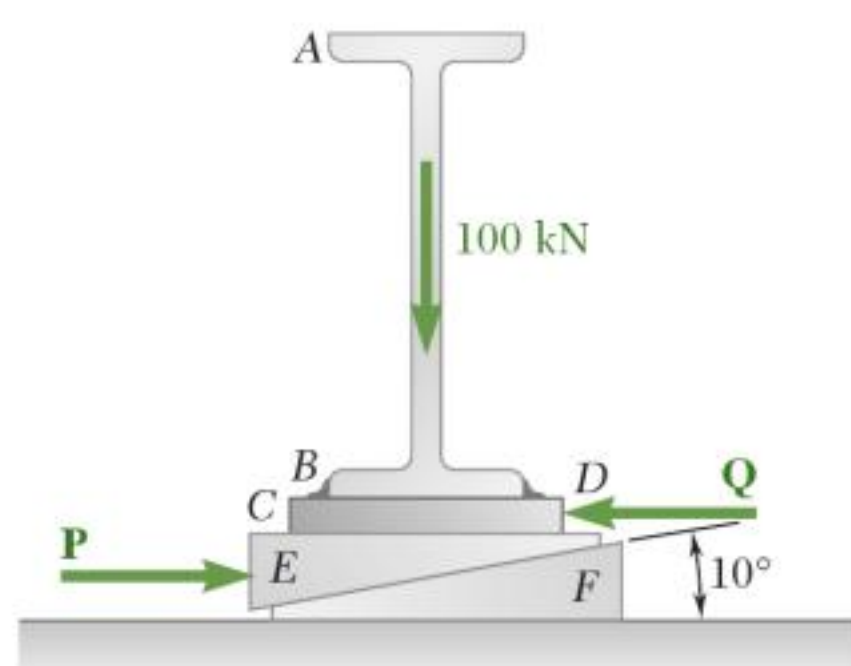


Figura P8.50

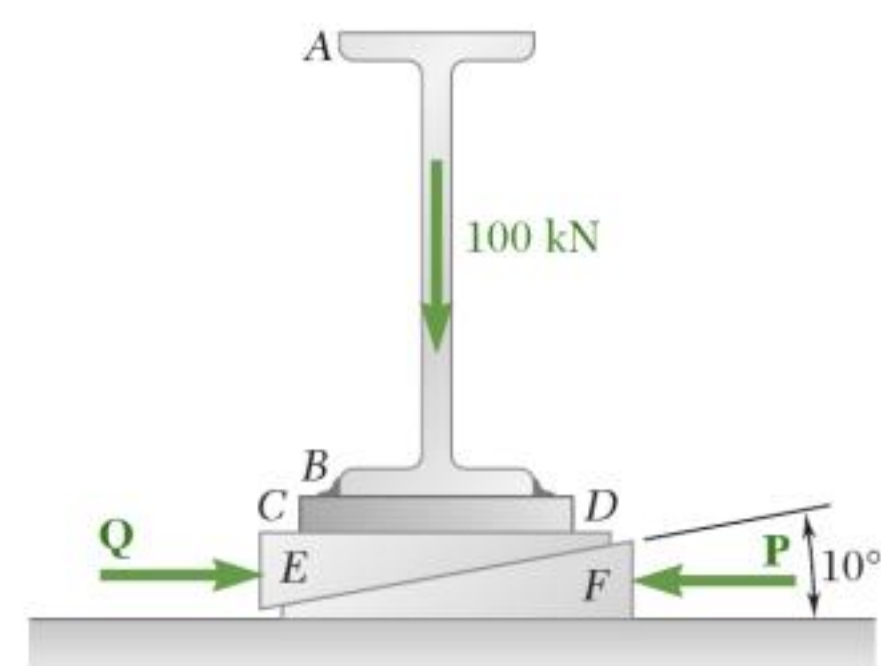


Figura P8.51

- 8.52** Uma cunha A de peso desprezível deve ser cravada entre duas placas B e C de 450 N . O coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é $0,35$. Determine a intensidade da força P



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

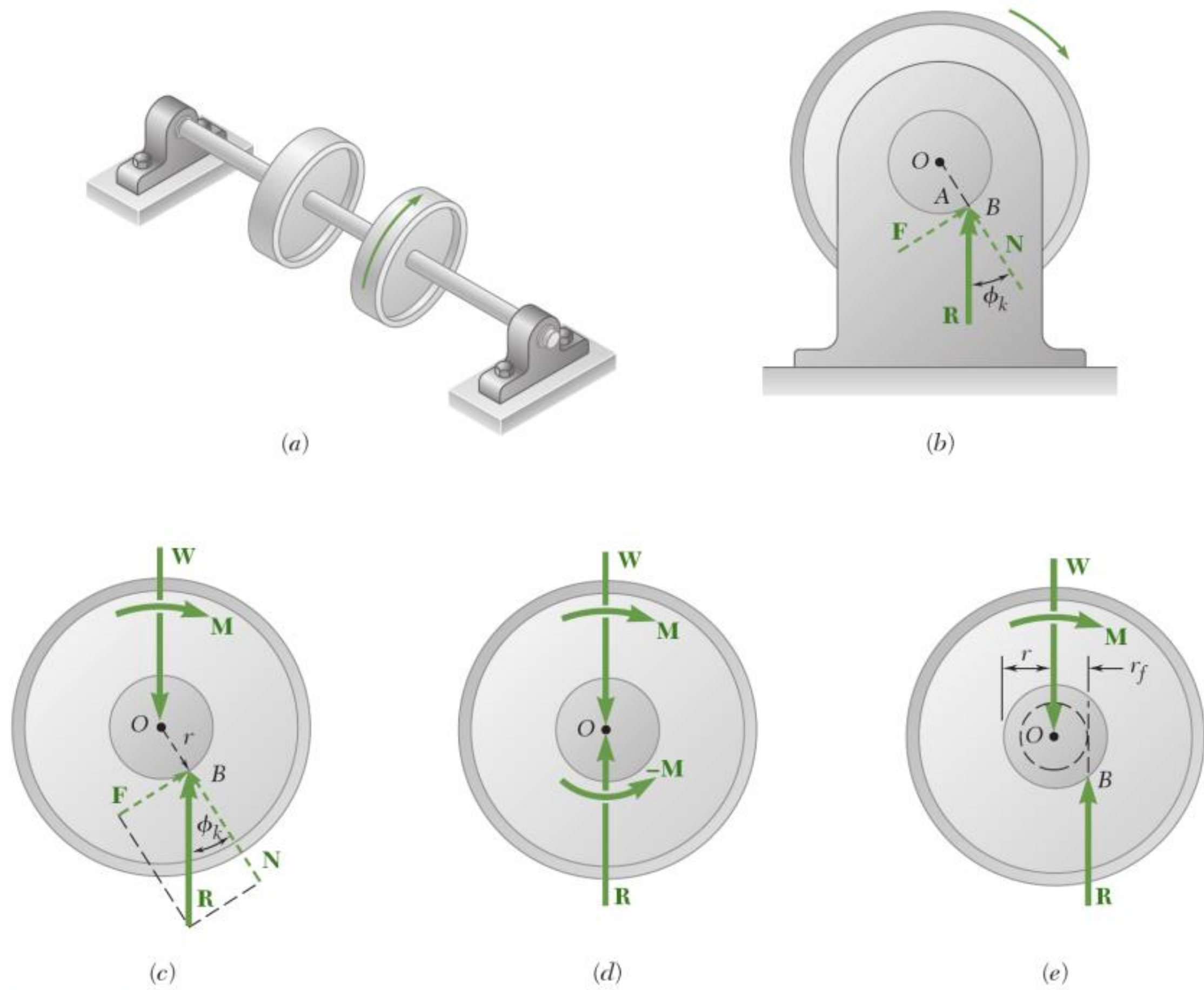


Figura 8.10

correspondente em projeção sobre um plano perpendicular ao eixo. As forças atuantes sobre o corpo livre incluem o peso \mathbf{W} da roda, o binário \mathbf{M} necessário para se manter seu movimento e a força \mathbf{R} representativa da reação do mancal. Essa força é vertical, igual e oposta a \mathbf{W} , mas não passa pelo centro O do eixo; \mathbf{R} localiza-se à direita de O a uma distância tal que seu momento em relação a O contrabalança o momento \mathbf{M} do binário. Logo, o contato entre eixo e mancais não se dá no ponto mais baixo A quando o eixo gira. Esse contato ocorre no ponto B (Fig. 8.10b), ou melhor, ao longo de uma linha reta que intercepta o plano da figura em B . Fisicamente, isso se explica pelo fato de que, quando as rodas são postas em movimento, o eixo “sobe” nos mancais até que ocorra escorregamento. Após deslizar ligeiramente de volta, o eixo se assenta mais ou menos na posição mostrada na figura. Essa posição é tal que o ângulo entre a reação \mathbf{R} e a normal à superfície do mancal é igual ao ângulo de atrito cinético ϕ_k . Logo, a distância de O até a linha de ação de \mathbf{R} é $r \sin \phi_k$, sendo r o raio do eixo. Escrevendo $\sum M_O = 0$ para as forças atuantes sobre o corpo livre considerado, obtemos a intensidade do binário \mathbf{M} necessário para se vencer a resistência de atrito de um dos mancais:

$$M = Rr \sin \phi_k \quad (8.5)$$

Observando que, para pequenos valores do ângulo de atrito, $\sin \phi_k$ pode ser substituído por $\tan \phi_k$, ou seja, por μ_k , escrevemos a fórmula aproximada:

$$M \approx Rr\mu_k \quad (8.6)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 8.81** A talha mostrada na figura é usada para erguer uma carga de 675 N. Cada uma das roldanas de 75 mm de diâmetro gira sobre um eixo de 12 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, determine a tração em cada parte da corda quando a carga é erguida devagar.
- 8.82** A talha mostrada na figura é usada para erguer uma carga de 675 N. Cada uma das roldanas de 75 mm de diâmetro gira sobre um eixo de 12 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, determine a tração em cada parte da corda quando a carga é baixada devagar.
- 8.83** Um vagão ferroviário tem massa 30 Mg e é apoiado em oito rodas de 800 mm de diâmetro, com eixos de 125 mm de diâmetro. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0,020$ e $\mu_k = 0,015$, determine a força horizontal necessária (a) para movimento iminente do vagão, (b) para manter o vagão movendo-se em velocidade constante. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e os trilhos.
- 8.84 e 8.85** Uma alavanca AB de peso desprezível é montada com folga em um eixo fixo de 63 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo fixo e a alavanca é 0,15, determine a força **P** necessária para iniciar a rotação da alavanca no sentido anti-horário.

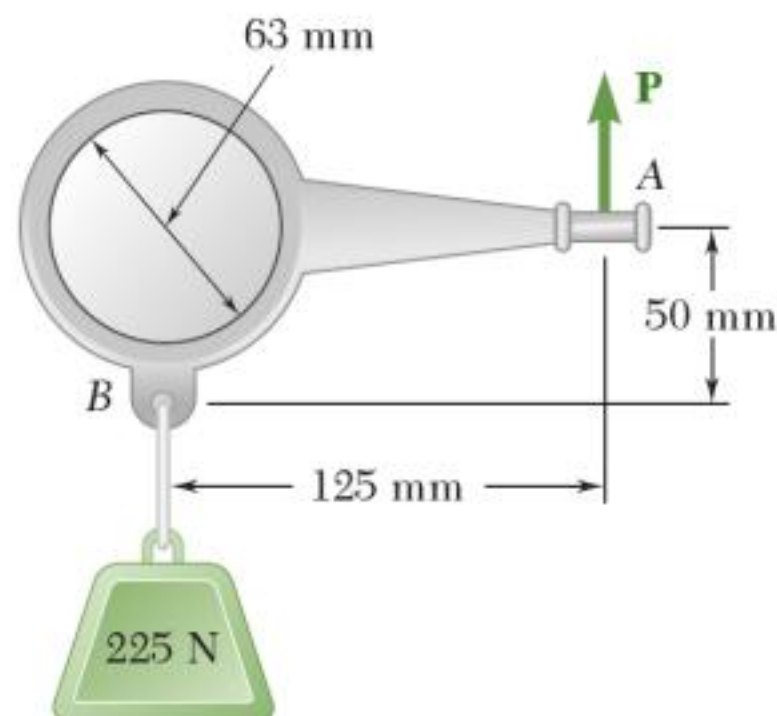


Figura P8.84 e P8.86

- 8.86 e 8.87** Uma alavanca AB de peso desprezível é montada com folga em um eixo fixo de 63 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo fixo e a alavanca é 0,15; determine a força **P** necessária para iniciar a rotação da alavanca no sentido horário.
- 8.88** O ele de ligação mostrado na figura é usado frequentemente na construção de pontes de rodovias para possibilitar a expansão causada por variações de temperatura. Em cada um dos pinos A e B de 60 mm, o coeficiente de atrito estático é 0,20. Sabendo que o componente vertical da força exercida por BC sobre a união é 200 kN, determine (a) a força horizontal que deve ser exercida sobre a viga BC para começar a mover o elo, (b) o ângulo que a força resultante exercida pela viga BC sobre o elo fará com a vertical.
- 8.89** Um patinete é projetado para andar à velocidade constante em um declive com 2% de inclinação. Considerando que o coeficiente de atrito cinético entre o eixo de 25 mm e o mancal é 0,10, determine o diâmetro necessário das rodas. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e o solo.

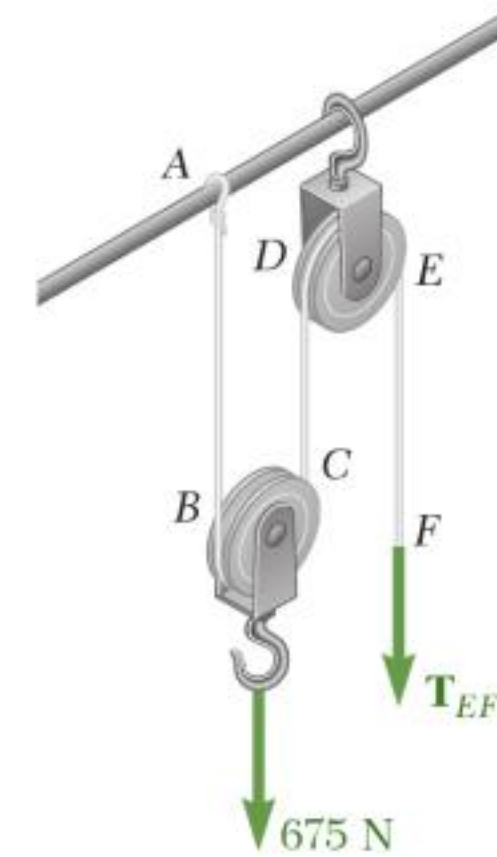


Figura P8.81 e P8.82

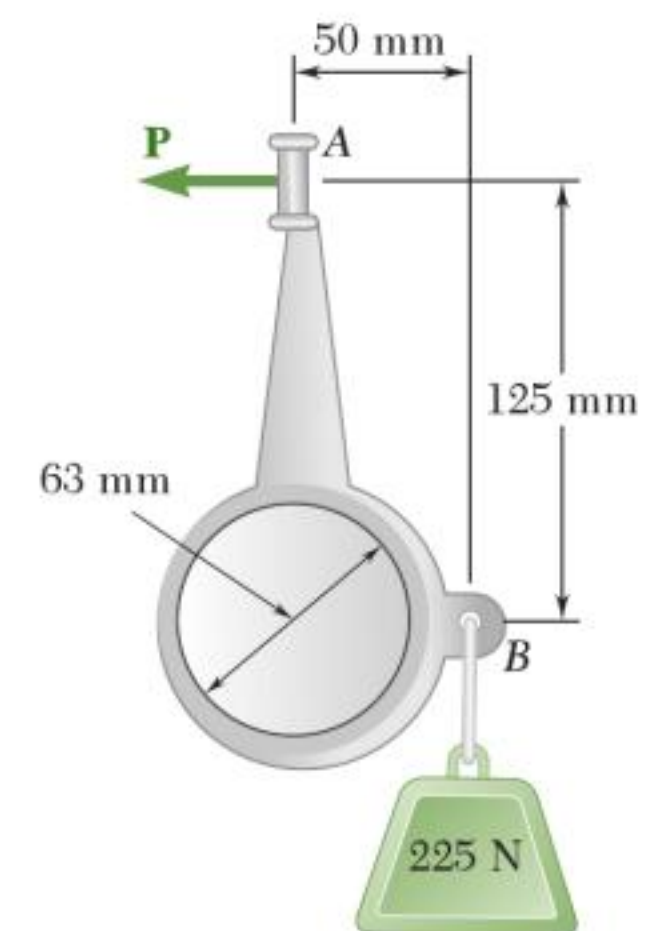


Figura P8.85 e P8.87

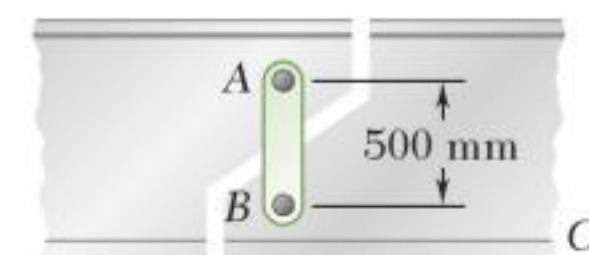


Figura P8.88



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



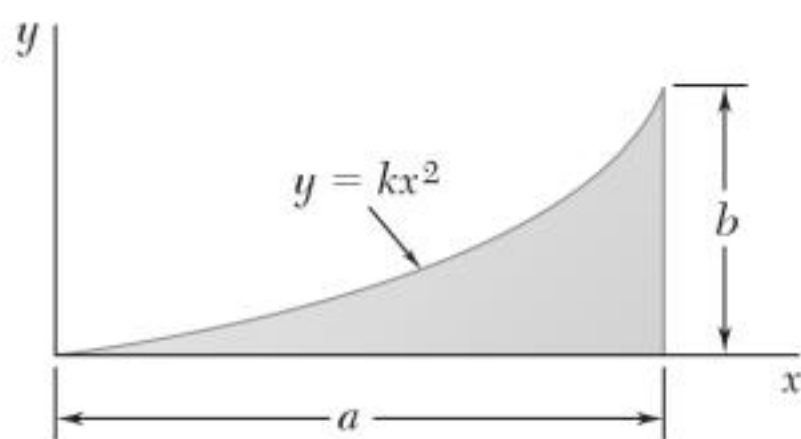
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 9.3

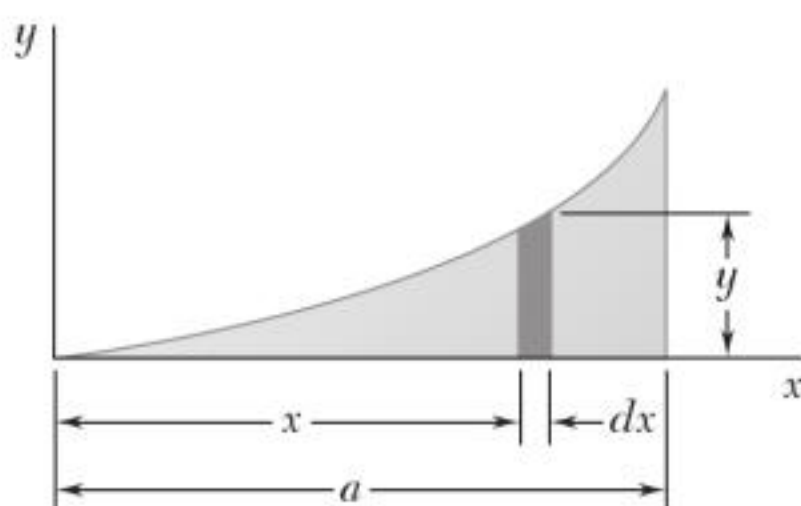
(a) Determine o momento de inércia da superfície sombreada em relação a cada um dos eixos coordenados. (As propriedades dessa superfície foram consideradas no Problema Resolvido 5.4.) (b) Usando os resultados do item a, determine o raio de giração da superfície sombreada em relação a cada um dos eixos coordenados.

SOLUÇÃO

Voltando ao Problema Resolvido 5.4, obtemos as seguintes expressões para a equação da curva e para a área total:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \quad A = \frac{1}{3}ab$$

Momento de inércia I_x . Um elemento diferencial vertical de área é escolhido como dA . Como todas as porções desse elemento *não* estão à mesma distância do eixo x , devemos tratar o elemento como um retângulo fino. O momento de inércia do elemento em relação ao eixo x é, então:



$$dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a^2}x^2 \right)^3 dx = \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6} x^6 dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6} x^6 dx = \left[\frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6} \frac{x^7}{7} \right]_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{21} \quad \blacktriangleleft$$

Momento de inércia I_y . É usado o mesmo elemento diferencial vertical de área. Como todas as porções do elemento estão à mesma distância do eixo y , temos:

$$dI_y = x^2 dA = x^2 (y dx) = x^2 \left(\frac{b}{a^2}x^2 \right) dx = \frac{b}{a^2} x^4 dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^4 dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^5}{5} \right]_0^a$$

$$I_y = \frac{a^3b}{5} \quad \blacktriangleleft$$

Raios de giração k_x e k_y . Por definições, temos

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3/21}{ab/3} = \frac{b^2}{7} \quad k_x = \sqrt{\frac{1}{7}}b \quad \blacktriangleleft$$

e

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^3b/5}{ab/3} = \frac{3}{5}a^2 \quad k_y = \sqrt{\frac{3}{5}}a \quad \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

9.6 Teorema dos eixos paralelos

Considere o momento de inércia I de uma superfície A em relação a um eixo AA' (Fig. 9.9). Representado por y a distância entre um elemento de superfície de área dA e AA' , temos:

$$I = \int y^2 dA$$

Vamos traçar agora um eixo BB' paralelo a AA' passando pelo centroide C ; esse eixo é denominado *eixo centroidal*. Representado por y' a

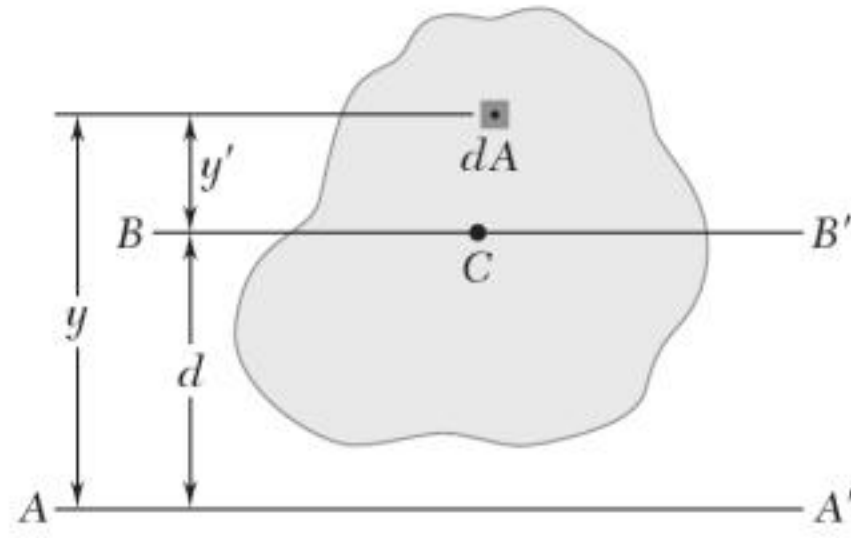


Figura 9.9

distância entre o elemento dA e BB' , temos $y = y' + d$, sendo d a distância entre os eixos AA' e BB' . Substituindo por y na integral anterior, temos:

$$\begin{aligned} I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

A primeira integral representa o momento de inércia I da superfície em relação ao eixo centroidal BB' . A segunda integral representa o momento de primeira ordem da superfície em relação a BB' ; como o centroide C da superfície está localizado sobre esse eixo, a segunda integral deve ser nula. Finalmente, observamos que a última integral é igual à área total A da superfície. Logo, temos:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

Essa fórmula expressa que o momento de inércia I de uma superfície em relação a um dado eixo AA' é igual ao momento de inércia \bar{I} da superfície em relação ao eixo centroidal BB' paralelo a AA' mais o produto da área A da superfície e do quadrado da distância d entre os dois eixos. Esse teorema é conhecido como *teorema dos eixos paralelos*. Substituindo I por k^2A e \bar{I} por \bar{k}^2A , o teorema também pode ser expresso como

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.10)$$

Um teorema semelhante pode ser enunciado para relacionar o momento de inércia polar J_O de uma superfície em relação ao ponto O ao momento de inércia polar \bar{J}_C da mesma superfície em relação ao seu centroide C . Representado por d a distância entre O e C , temos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \quad \text{ou} \quad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \quad (9.11)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

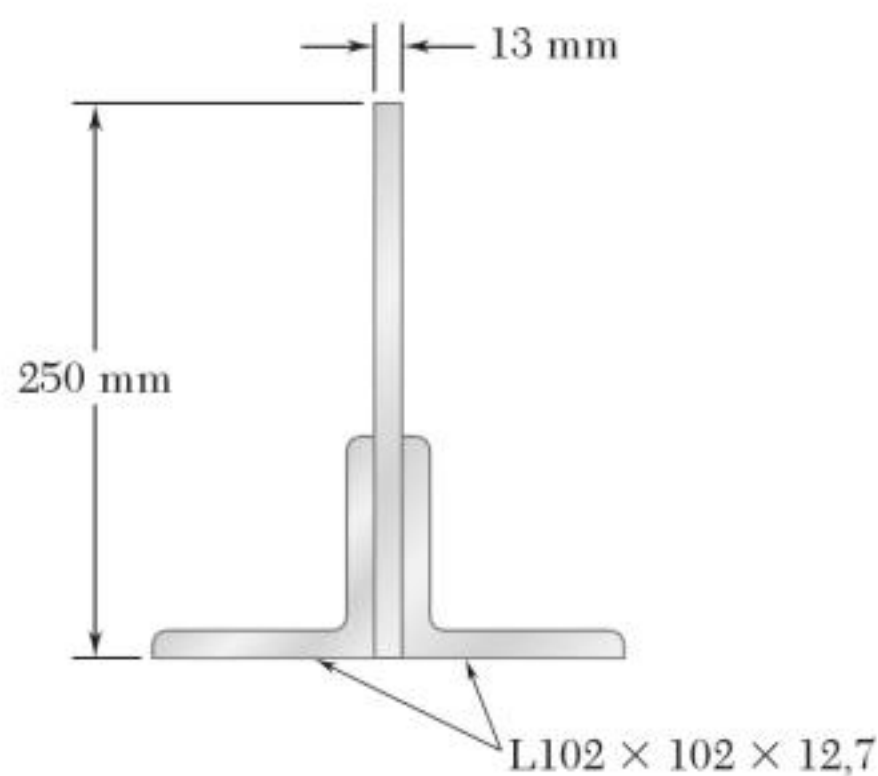


Figura P9.54

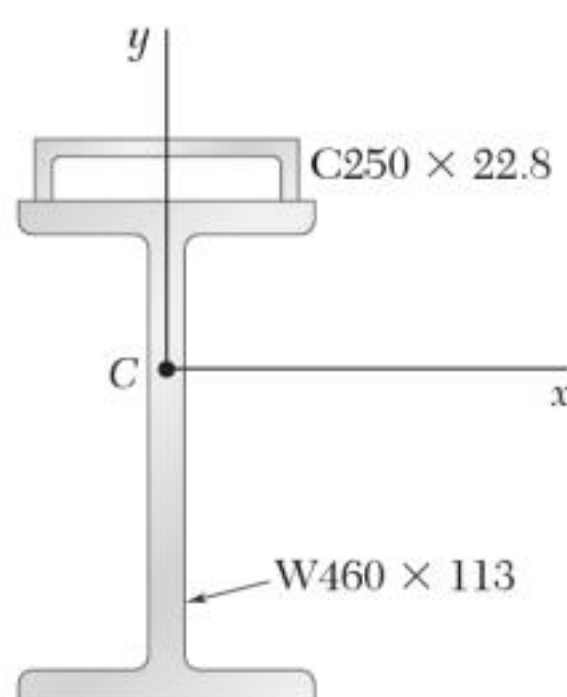


Figura P9.55

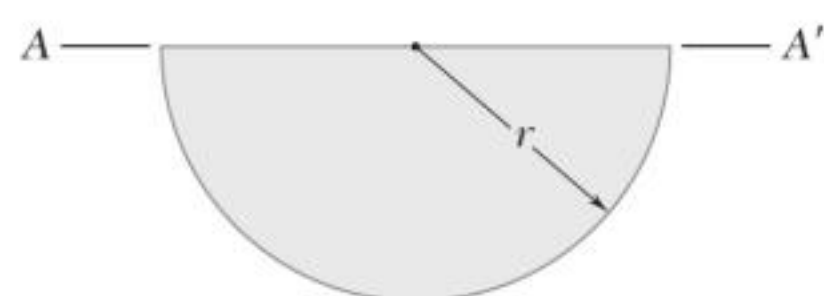


Figura P9.57

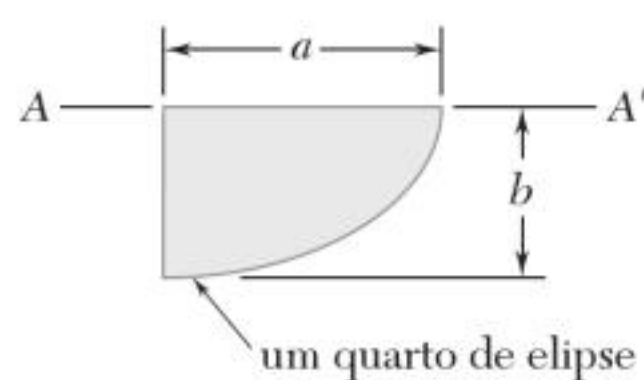


Figura P9.58

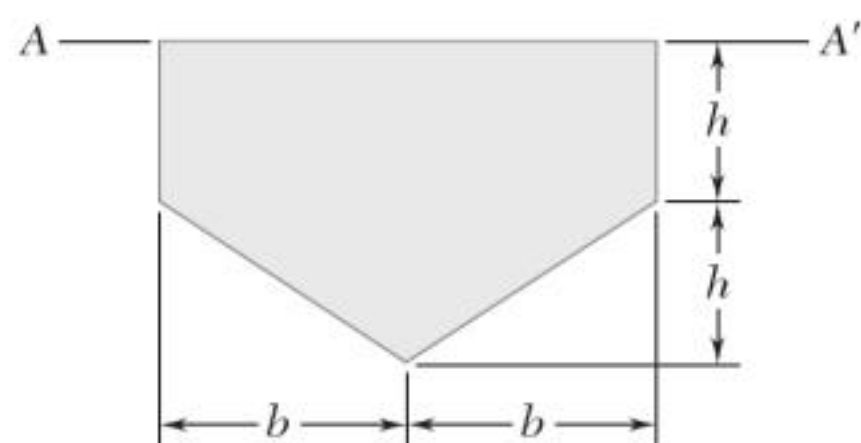


Figura P9.59

- 9.53** Duas cantoneiras de $L76 \times 76 \times 6,4$ mm são soldadas a um perfil C de 250×30 . Determine os momentos de inércia da seção composta em relação aos eixos centroidais paralelo e perpendicular à junção do perfil C.

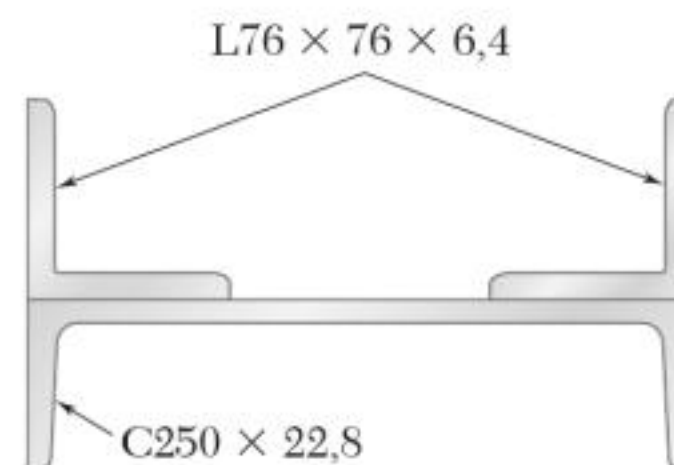


Figura P9.53

- 9.54** Duas cantoneiras $L102 \times 102 \times 12,7$ mm são soldadas a uma placa de aço mostrada na figura. Determine os momentos de inércia da seção composta em relação aos eixos centroidais paralelo e perpendicular à placa.
- 9.55** A resistência de um perfil I mostrado na figura é aumentada pela soldagem de perfil na aba superior. Determine os momentos de inércia da seção composta em relação aos respectivos eixos centroidais x e y .
- 9.56** Duas cantoneiras $L127 \times 76 \times 12,7$ mm são soldadas a uma placa de aço de 13 mm de espessura. Determine a distância b e os momentos de inércia centrais \bar{I}_x e \bar{I}_y da seção composta, sabendo que $\bar{I}_y = 4 \bar{I}_x$.

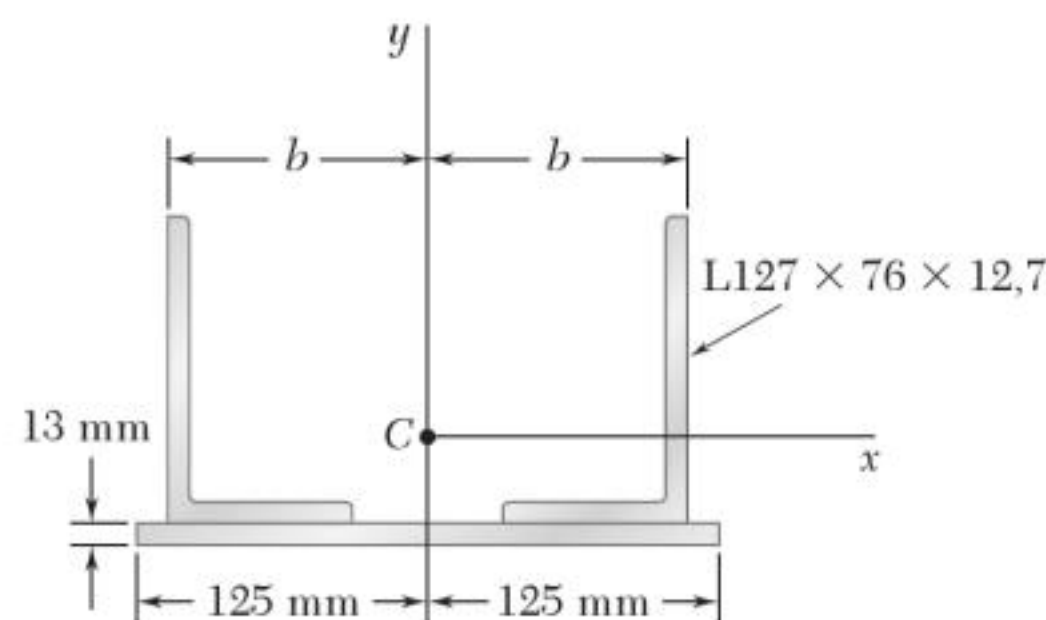


Figura P9.56

- 9.57 e 9.58** O painel mostrado na figura forma a seção transversal de uma calha que está cheia de água até a linha AA' . Voltando à Seção 9.2, determine a profundidade do ponto de aplicação da resultante das forças hidrostáticas atuantes sobre o painel (o centro de pressões).
- 9.59 e *9.60** O painel mostrado na figura forma a seção transversal de uma calha que está cheia de água até a linha AA' . Voltando à Seção 9.2, determine a altura do ponto de aplicação da resultante das forças hidrostáticas atuantes sobre o painel (o centro de pressões).

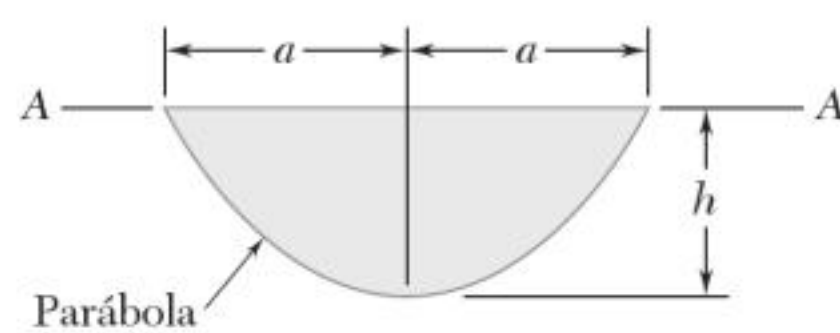


Figura P9.60



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, continuaremos a trabalhar com *momentos de inércia* e utilizaremos várias técnicas para calcular *produtos de inércia*. Embora os problemas sejam geralmente diretos, vale a pena destacar alguns itens.

1. Cálculo do produto de inércia I_{xy} por integração. Definimos esta grandeza como

$$I_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.12)$$

e verificamos que seu valor pode ser positivo, negativo ou nulo. O produto de inércia pode ser calculado diretamente da equação anterior usando-se integração dupla ou pode ser determinado usando-se integração simples, como mostra o Problema Resolvido 9.6. Ao se aplicar essa última técnica com o teorema dos eixos paralelos, é importante lembrar que \bar{x}_{el} e \bar{y}_{el} na equação

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el} \, dA$$

são as coordenadas do centroide do elemento de área dA . Logo, se dA não estiver no primeiro quadrante, uma dessas coordenadas será negativa, ou ambas serão negativas.

2. Cálculo dos produtos de inércia de superfícies compostas. Tais produtos podem ser facilmente calculados a partir dos produtos de inércia das partes componentes da superfície usando-se o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \quad (9.13)$$

A técnica apropriada para a resolução de problemas desse tipo está ilustrada nos Problemas Resolvidos 9.6 e 9.7. Além das regras usuais para problemas de superfícies compostas, é essencial que nos lembremos dos seguintes pontos:

a. Se um dos eixos centroidais de uma superfície componente for um eixo de simetria dessa superfície, o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ para essa superfície será nulo. Logo, $I_{x'y'}$ é igual a zero para superfícies componentes tais como círculos, semicírculos, retângulos e triângulos isósceles que tenham um eixo de simetria paralelo a um dos eixos de coordenadas.

b. Deve-se prestar muita atenção aos sinais das coordenadas \bar{x} e \bar{y} de cada superfície componente ao usar o teorema dos eixos paralelos [Problema Resolvido 9.7].

3. Determinação dos momentos de inércia e do produto de inércia para eixos de coordenadas que sofreram rotação. Na Seção 9.9, deduzimos as Eqs. (9.18), (9.19) e (9.20) a partir das quais é possível calcular os momentos de inércia e o produto de inércia para eixos de coordenadas que sofreram rotação em torno da origem O . Para aplicar essas equações, devemos conhecer um conjunto de valores I_x , I_y e I_{xy} para uma dada orientação dos eixos e nos lembrar de que θ é positivo para rotações anti-horárias dos eixos e negativo para rotações horárias.

4. Cálculo dos momentos de inércia principais. Mostramos na Seção 9.9 que existe uma determinada orientação dos eixos de coordenadas para a qual os momentos de inércia atingem seus valores máximo e mínimo, I_{\max} e I_{\min} , produto de inércia é nulo. A Eq. (9.27) pode ser usada no cálculo desses valores, conhecidos como *momentos de inércia principais* da superfície em relação a O . Os eixos correspondentes são ditos *eixos principais* da superfície em relação a O e a orientação está definida pela Eq. (9.25). Para determinar qual dos eixos principais corresponde a I_{\max} e corresponde a I_{\min} , devemos seguir o procedimento explicado no texto após a Eq. (9.27) ou, então, observar em torno de qual dos eixos principais a área da superfície está distribuída com maior proximidade; esse eixo corresponde a I_{\min} , [Problema Resolvido 9.7].



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

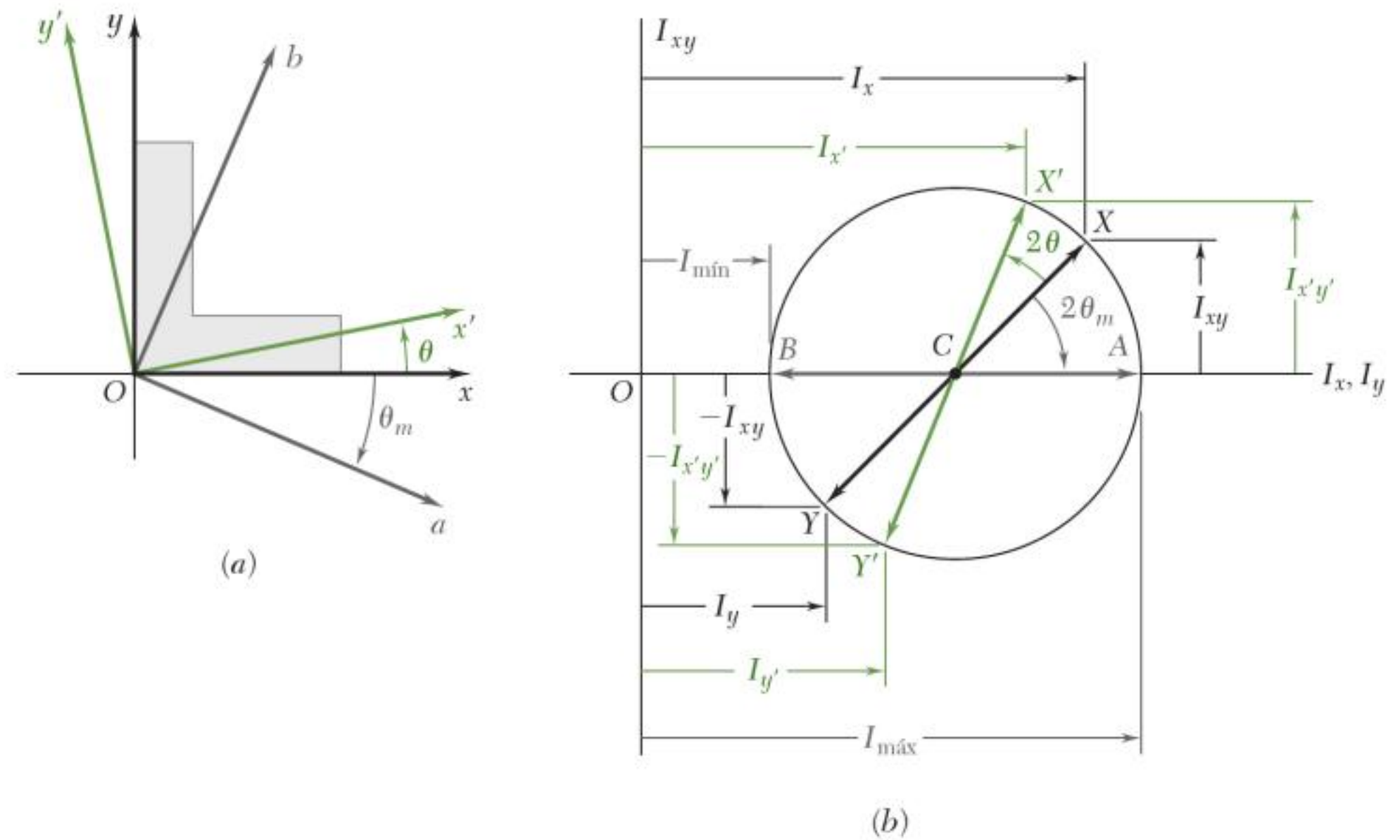


Figura 9.19

Uma vez que $\tan(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$, verificamos também que o ângulo XCA é igual em intensidade a um dos ângulos $2\theta_m$ que satisfazem a Eq. (9.25); logo, o ângulo θ_m , que na Fig. 9.19a define o eixo principal Oa correspondente ao ponto A na Fig. 9.19b, é igual a metade do ângulo XCA do círculo de Mohr. Observamos ainda que, se $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, como no caso aqui considerado, a rotação que leva CX para CA é horária. Nessas condições, o ângulo θ_m obtido na Eq. (9.25), que define o eixo principal Oa na Fig. 9.19a, é negativo; portanto, a rotação que leva Ox para Oa também é horária. Concluímos que os sentidos de rotação nas partes da Fig. 9.19 são os mesmos. Se for preciso uma rotação horária de $2\theta_m$, de modo a levar CX para CA no círculo de Mohr, uma rotação horária θ_m levará Ox para o eixo principal correspondente Oa na Fig. 9.19a.

Como o círculo de Mohr é definido de maneira única, pode-se obter o mesmo círculo considerando-se os momentos e o produto de inércia da superfície A em relação aos eixos retangulares x' e y' (Fig. 9.19a). O ponto X' de coordenadas $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ e o ponto Y' de coordenadas $I_{y'}$ e $-I_{x'y'}$ ficam, então, localizados sobre o círculo de Mohr, e o ângulo $X'CA$ na Fig. 9.19b deve ser igual a duas vezes o ângulo $x'Oa$ na Fig. 9.19a. Conforme já observamos, uma vez que o ângulo XCA é o dobro do ângulo xOa , resulta que o ângulo XCX' na Fig. 9.19b é o dobro do ângulo xOx' na Fig. 9.19a. O diâmetro $X'Y'$, que define os momentos e o produto de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ da superfície dada em relação aos eixos retangulares x' e y' que formam um ângulo θ com os eixos x e y , pode ser obtido por rotação de um ângulo 2θ do diâmetro XY , correspondendo aos momentos e ao produto de inércia I_x , I_y e I_{xy} . Observamos que a rotação que leva o diâmetro XY para o diâmetro $X'Y'$ na Fig. 9.19b tem o mesmo sentido da rotação que leva os eixos x e y para os eixos x' e y' na Fig. 9.19a.

Deve-se observar que o uso do círculo de Mohr não fica limitado a soluções gráficas, ou seja, a soluções baseadas em desenhos e medições cuidadosas dos diversos parâmetros envolvidos. Pelo simples esboço do círculo de Mohr e com o uso de trigonometria, é possível deduzir facilmente as diversas relações necessárias para uma solução numérica de um dado problema (ver o Problema Resolvido 9.8).



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMA RESOLVIDO 9.15

Se $a = 3c$ e $b = 2c$ para o prisma retangular do Problema Resolvido 9.14, determine (a) os momentos principais de inércia na origem O , (b) os eixos principais de inércia em O .

SOLUÇÃO

a. Momentos principais de inércia na origem O . Substituindo $a = 3c$ e $b = 2c$ na solução do Problema Resolvido 9.14, temos:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{5}{3}mc^2 & I_y &= \frac{10}{3}mc^2 & I_z &= \frac{13}{3}mc^2 \\ I_{xy} &= \frac{3}{2}mc^2 & I_{yz} &= \frac{1}{2}mc^2 & I_{zx} &= \frac{3}{4}mc^2 \end{aligned}$$

Substituindo os valores dos momentos e os produtos de inércia na Eq. (9.56) e agrupando os termos, temos:

$$K^3 - \left(\frac{28}{3}mc^2\right)K^2 + \left(\frac{3.479}{144}m^2c^4\right)K - \frac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Em seguida, determinamos as raízes dessa equação; pela discussão da Seção 9.18, segue-se que essas raízes são os momentos principais de inércia do corpo na origem.

$$\begin{aligned} K_1 &= 0,568867mc^2 & K_2 &= 4,20885mc^2 & K_3 &= 4,55562mc^2 \\ K_1 &= 0,569mc^2 & K_2 &= 4,21mc^2 & K_3 &= 4,56mc^2 \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

b. Eixos principais de inércia O . Para determinar a direção de um eixo principal de inércia, primeiro substituímos o valor correspondente de K em duas das Eqs. (9.54); as equações resultantes em conjunto com a Eq. (9.57) constituem um sistema de três equações do qual é possível determinar os cossenos diretores do eixo principal correspondente. Logo, para o primeiro momento principal de inércia K_1 , temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{3} - 0,568867\right)mc^2(\lambda_x)_1 - \frac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \frac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 &= 0 \\ -\frac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + \left(\frac{10}{3} - 0,568867\right)mc^2(\lambda_y)_1 - \frac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 &= 0 \\ (\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$(\lambda_x)_1 = 0,836600 \quad (\lambda_y)_1 = 0,496001 \quad (\lambda_z)_1 = 0,232557$$

Assim, os ângulos que os eixos principais de inércia fazem com os eixos de coordenadas são:

$$(\theta_x)_1 = 33,2^\circ \quad (\theta_y)_1 = 60,3^\circ \quad (\theta_z)_1 = 76,6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Usando sucessivamente o mesmo conjunto de equações com K_2 e K_3 , concluímos que os ângulos associados ao segundo e terceiro momentos principais de inércia na origem são, respectivamente:

$$(\theta_x)_2 = 57,8^\circ \quad (\theta_y)_2 = 146,6^\circ \quad (\theta_z)_2 = 98,0^\circ \quad \blacktriangleleft$$

e

$$(\theta_x)_3 = 82,8^\circ \quad (\theta_y)_3 = 76,1^\circ \quad (\theta_z)_3 = 164,3^\circ \quad \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Teorema dos eixos paralelos

Vimos que o *teorema dos eixos paralelos* também se aplica aos momentos de inércia de massa [Seção 9.12]. Assim, o momento de inércia I de um corpo em relação a um eixo arbitrário AA' (Fig. 9.41) pode ser expresso como

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

sendo \bar{I} o momento de inércia do corpo em relação ao eixo centroidal BB' paralelo ao eixo AA' , m a massa do corpo e d a distância entre os dois eixos.

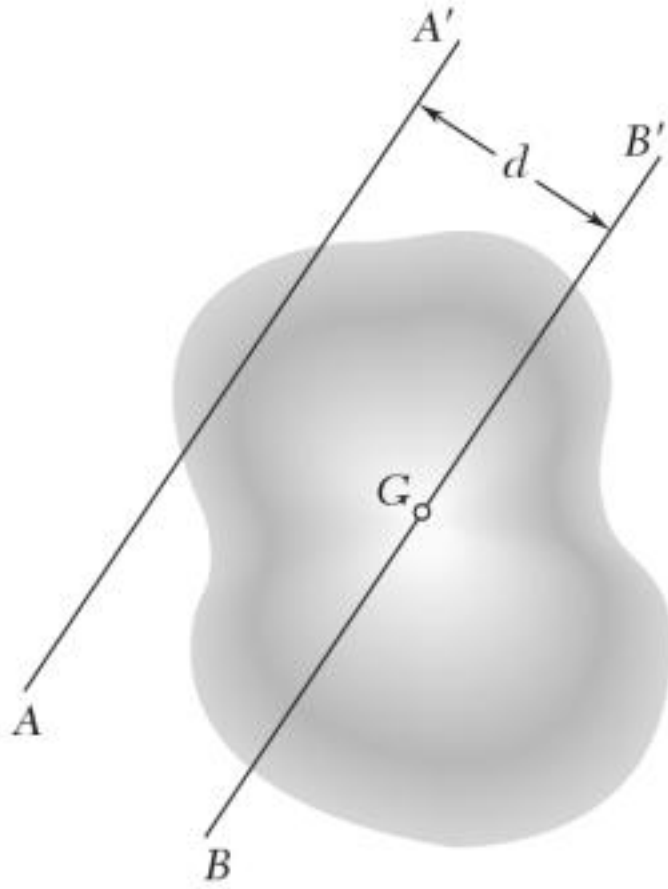


Figura 9.41

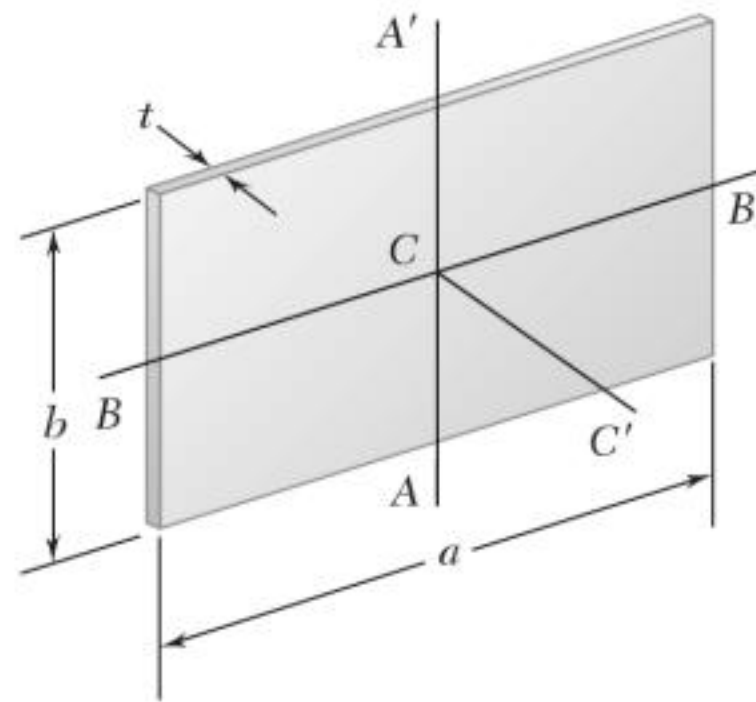


Figura 9.42

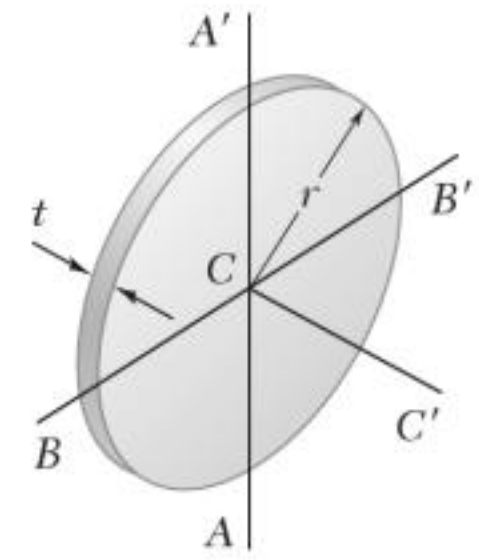


Figura 9.43

Momentos de inércia de placas delgadas

Os momentos de inércia de *placas delgadas* podem ser obtidos diretamente dos momentos de inércia de suas superfícies [Seção 9.13]. Concluímos que, para uma placa *retangular*, os momentos de inércia em relação aos eixos mostrados (Fig. 9.42) são

$$I_{AA'} = \frac{1}{12}ma^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12}mb^2 \quad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

enquanto, para uma *placa circular* (Fig. 9.43), eles são

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4}mr^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (9.42)$$

Corpos compostos

Quando um corpo tem *dois planos de simetria*, geralmente é possível efetuar uma integração simples para se determinar seu momento de inércia em relação a um dado eixo, selecionando-se o elemento de massa dm igual ao de uma placa delgada [Problemas Resolvidos 9.10 e 9.11]. Por outro lado, quando um corpo consiste em *diversos formatos geométricos simples*, seu momento de inércia em relação a um dado eixo pode ser obtido aplicando-se as fórmulas dadas na Fig. 9.28 juntamente com o teorema dos eixos paralelos [Problemas Resolvidos 9.12 e 9.13].

Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário

Na última seção do capítulo, aprendemos a determinar o momento de inércia de um corpo *em relação a um eixo arbitrário* OL que passa pela origem O [Seção 9.16]. Representado por λ_x , λ_y , λ_z os componentes do



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



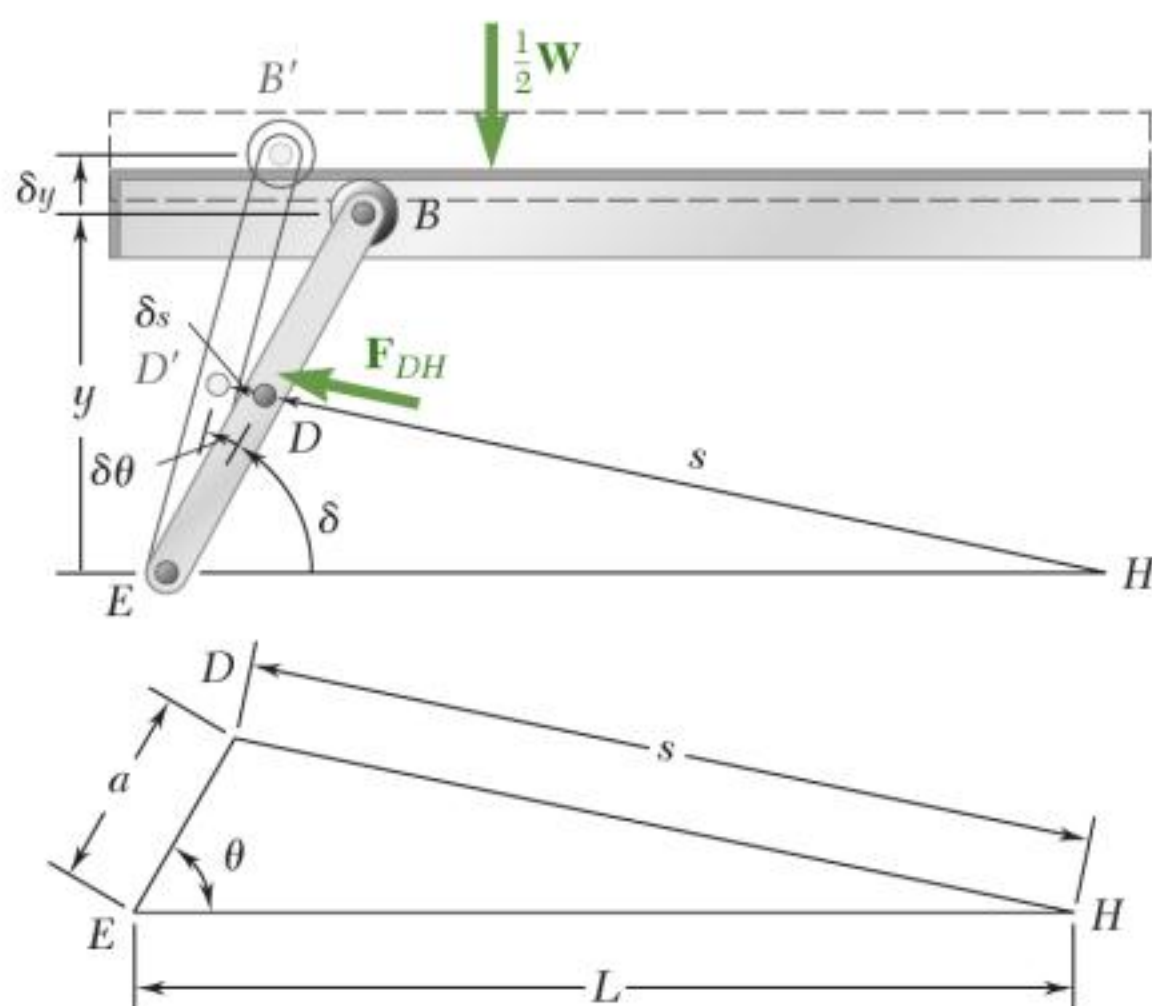
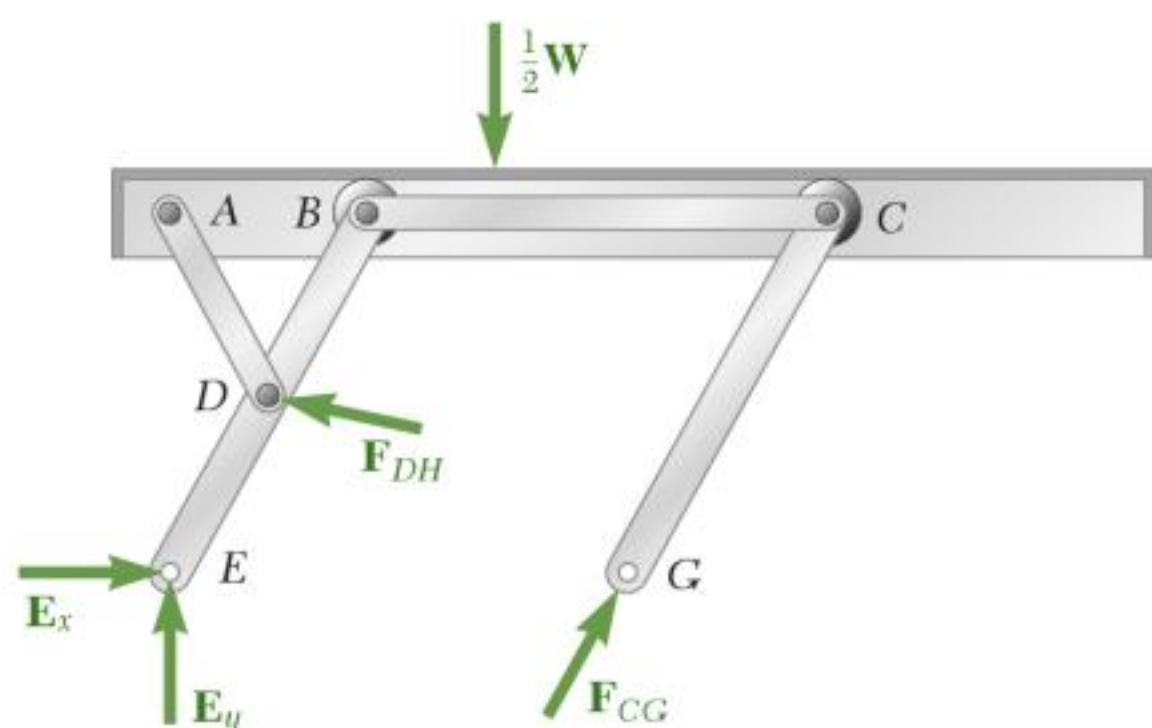
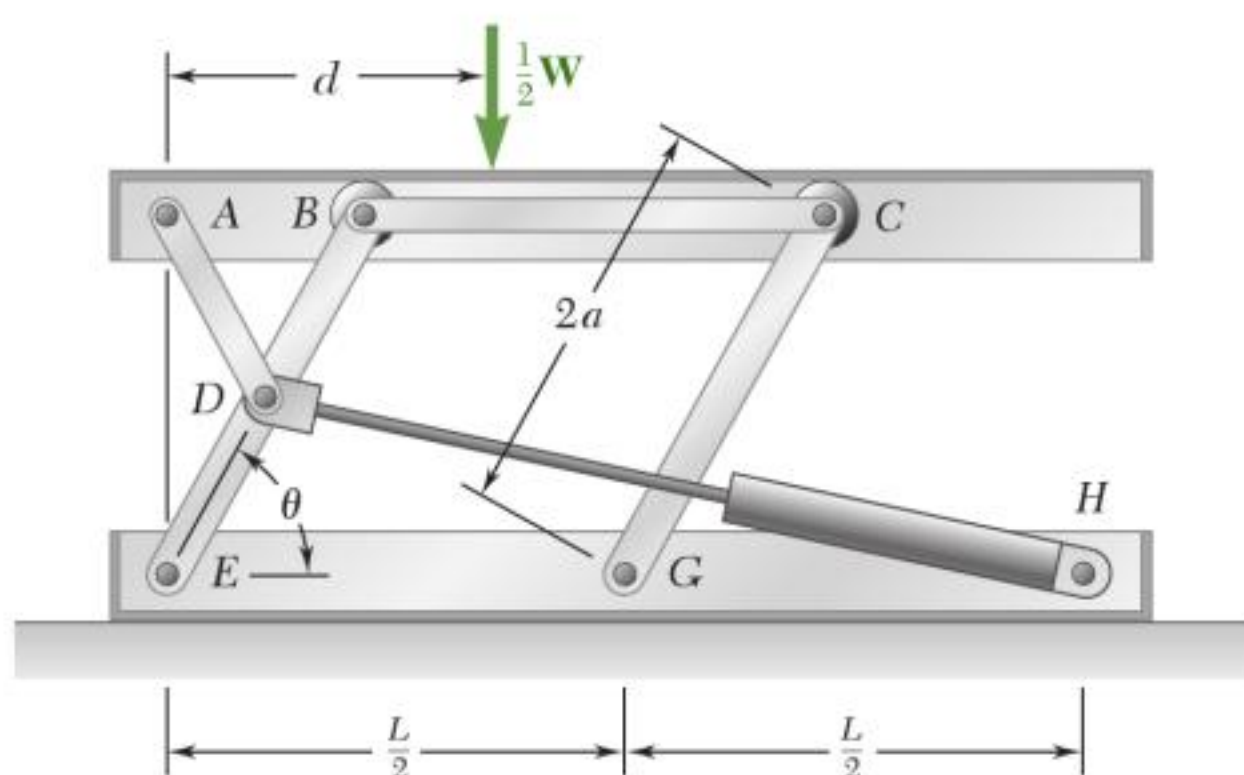
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 10.3

Uma mesa de elevação hidráulica é usada para erguer um engradado de 1.000 kg. Ela consiste em uma plataforma e dois sistemas articulados idênticos, nos quais cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um sistema articulado e um cilindro são mostrados na figura.) Os elementos EDB e CG têm, cada qual, comprimento $2a$, e o elemento AD está preso por um pino ao ponto médio de EDB . Se o engradado é colocado sobre a mesa de modo tal que metade do seu peso é suportada pelo sistema mostrado na figura, determine a força exercida por cada cilindro na elevação do engradado para $\theta = 60^\circ$, $a = 0,70$ m e $L = 3,20$ m. Esse mecanismo já foi considerado anteriormente no Problema Resolvido 6.7.

SOLUÇÃO

A máquina considerada consiste na plataforma e no sistema articulado, com uma força aplicada (*input*) F_{DH} exercida pelo cilindro e uma força de saída (*output*) igual e oposta a $\frac{1}{2}W$.

Princípio dos trabalhos virtuais. Inicialmente observamos que as reações em E e G não realizam trabalho. Representado por y a elevação da plataforma acima da base e por s o comprimento DH do conjunto cilindro-pistão, temos:

$$\delta U = 0: \quad -\frac{1}{2}W \delta y + F_{DH} \delta s = 0 \quad (1)$$

O deslocamento vertical δy da plataforma é expresso em termos do deslocamento angular $\delta \theta$ de EDB como se segue:

$$y = (EB) \sin \theta = 2a \sin \theta \\ \delta y = 2a \cos \theta \delta \theta$$

De forma semelhante, para expressar δs em termos de $\delta \theta$, primeiro verificamos que, pela lei dos cossenos

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

Diferenciando:

$$2s \delta s = -2aL(-\sin \theta) \delta \theta \\ \delta s = \frac{aL \sin \theta}{s} \delta \theta$$

Substituindo para δy e δs em (1), temos:

$$\left(-\frac{1}{2}W\right)2a \cos \theta \delta \theta + F_{DH} \frac{aL \sin \theta}{s} \delta \theta = 0 \\ F_{DH} = W \frac{s}{L} \cotg \theta$$

Com dados numéricos fornecidos, temos:

$$W = mg = (1.000 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 9.810 \text{ N} = 9,81 \text{ kN} \\ s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta \\ = (0,70)^2 + (3,20)^2 - 2(0,70)(3,20) \cos 60^\circ = 8,49 \\ s = 2,91 \text{ m} \\ F_{DH} = W \frac{s}{L} \cotg \theta = (9,81 \text{ kN}) \frac{2,91 \text{ m}}{3,20 \text{ m}} \cotg 60^\circ$$

$$F_{DH} = 5,15 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

*10.9 Estabilidade do equilíbrio

Considere as três barras uniformes de comprimento $2a$ e peso \mathbf{W} mostradas na Fig. 10.14. Embora cada haste esteja em equilíbrio, existe uma importante diferença entre os três casos considerados. Suponha que cada haste seja levemente deslocada da sua posição de equilíbrio e depois é solta: a haste a vai se mover de volta em direção à sua posição original; a haste b continuará o movimento afastando-se da sua posição original; e a haste c vai permanecer em sua nova posição. No caso a , diz-se que o equilíbrio da haste é *estável*; no caso b , diz-se que é *instável*; e, no caso c , diz-se que é *neutro*.

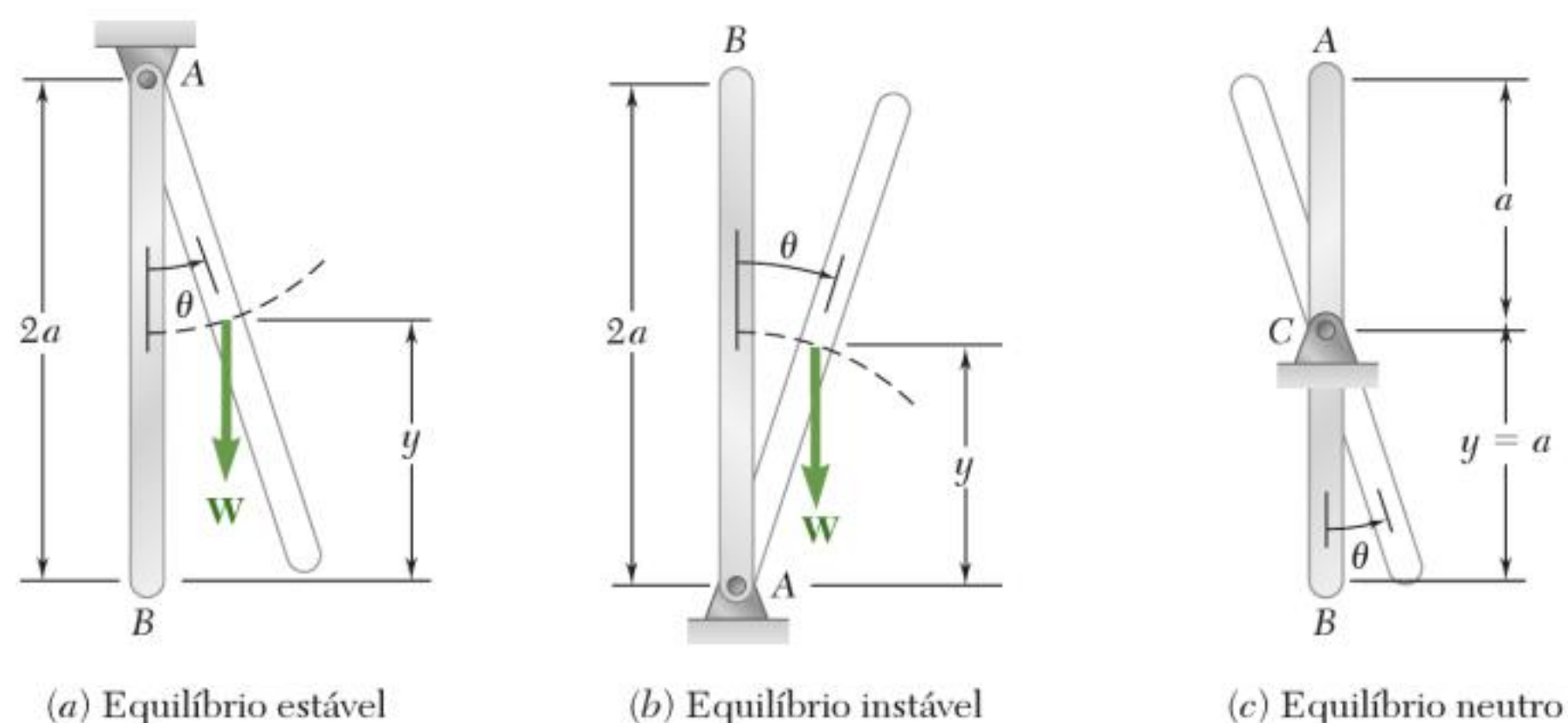


Figura 10.14

Voltando à Seção 10.7, em que vimos que a energia potencial V_g com respeito à gravidade é igual a W_y , sendo y a elevação do ponto da aplicação, de \mathbf{W} medida a partir de um nível arbitrário, observamos que a energia potencial da haste a é mínima na posição de equilíbrio considerada, que a energia potencial da haste b é máxima, e que a energia potencial da haste c é constante. O equilíbrio é, portanto, *estável*, *instável* ou *neutro*, se a energia potencial for *mínima*, *máxima* ou *constante* (Fig. 10.15).

O resultado obtido é bem geral e pode ser visto como se segue: primeiro observamos que a força sempre tende a fazer um trabalho positivo e, portanto, a diminuir a energia potencial do sistema sobre o qual ela é aplicada. Portanto, quando um sistema é perturbado a partir da sua posição de equilíbrio, as forças atuantes no sistema tenderão a trazê-lo de volta à sua posição original se V for mínimo (Fig. 10.15a) e a movê-lo para longe se V for máximo (Fig. 10.15b). Se V for constante (Fig. 10.15c), as forças não tendem a mover o sistema de nenhuma dessas maneiras.

Recordando o cálculo que uma função é mínima ou máxima se sua derivada segunda é positiva ou negativa. Podemos, então, resumir as con-



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

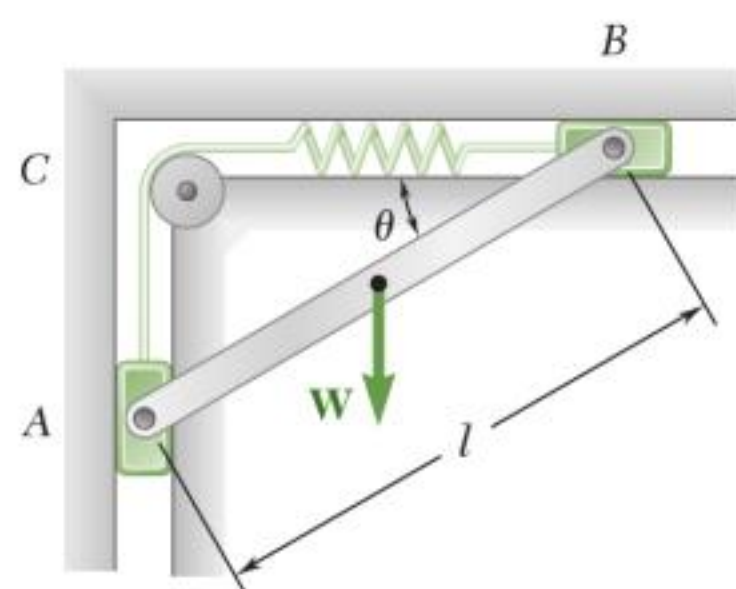


Figura P10.77 e P10.78

10.77 Uma haste delgada AB , de peso W , é unida a dois blocos A e B que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. A constante da mola é k , e a mola está indeformada quando AB é horizontal. Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação em θ , W , l e k que deve ser satisfeita quando a haste está em equilíbrio.

10.78 Uma haste delgada AB , de peso W , é unida a dois blocos A e B que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. Sabendo que a mola está indeformada quando AB é horizontal, determine três valores de θ correspondentes ao equilíbrio quando $W = 1.350 \text{ N}$, $l = 400 \text{ mm}$ e $k = 13,5 \text{ kN/mm}$. Determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.79 Uma haste delgada AB , de peso W , é presa a dois blocos A e B que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. Sabendo que a mola está indeformada quando $y = 0$, determine o valor de y correspondente ao equilíbrio quando $W = 80 \text{ N}$, $l = 500 \text{ mm}$ e $k = 600 \text{ N/m}$.

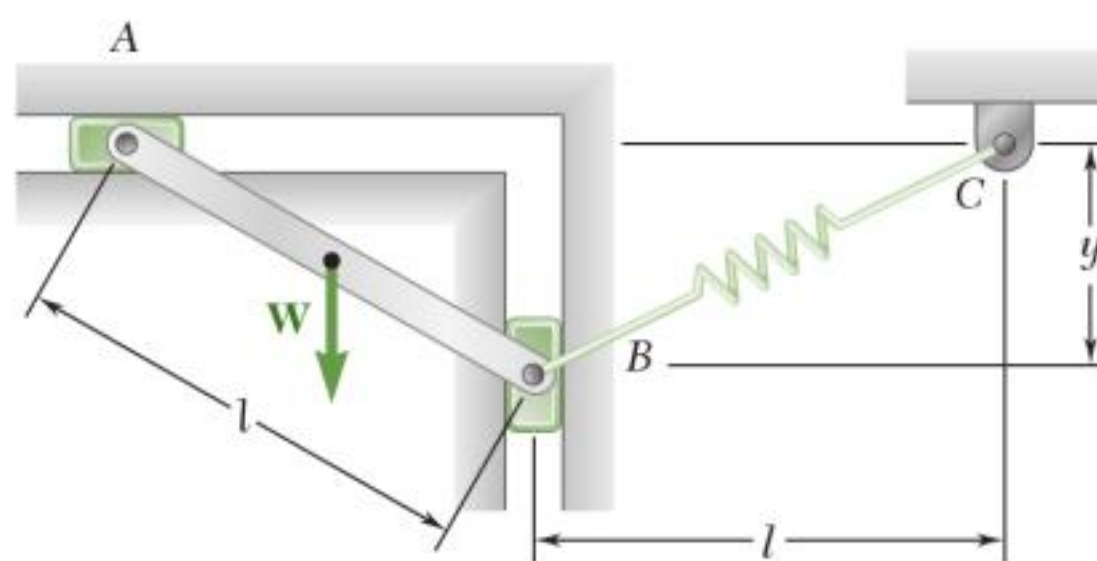


Figura P10.79

10.80 Sabendo que ambas as molas estão indeformadas quando $y = 0$, determine o valor de y correspondente ao equilíbrio quando $W = 80 \text{ N}$, $l = 500 \text{ mm}$ e $k = 600 \text{ N/m}$.

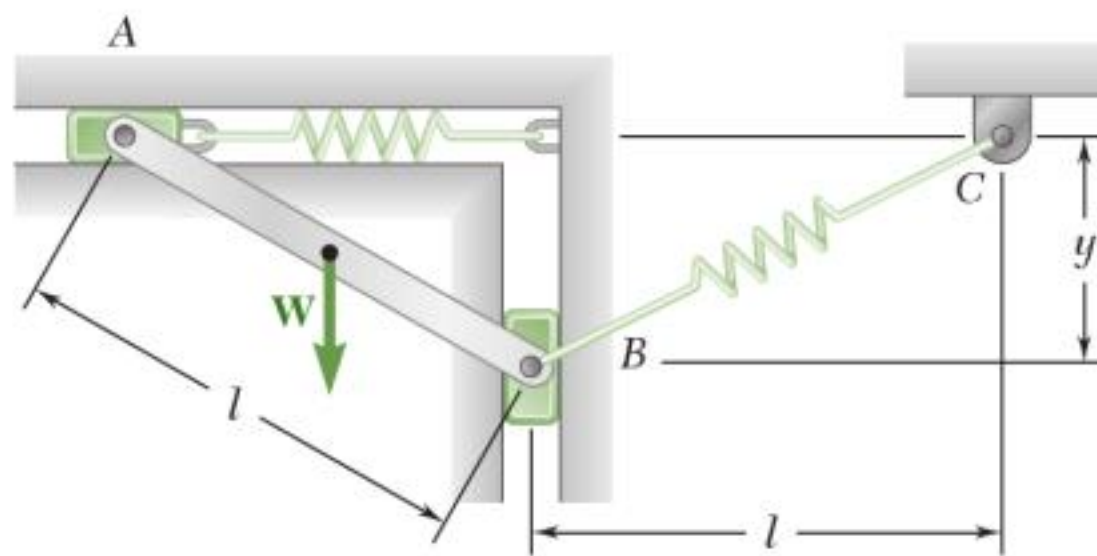


Figura P10.80

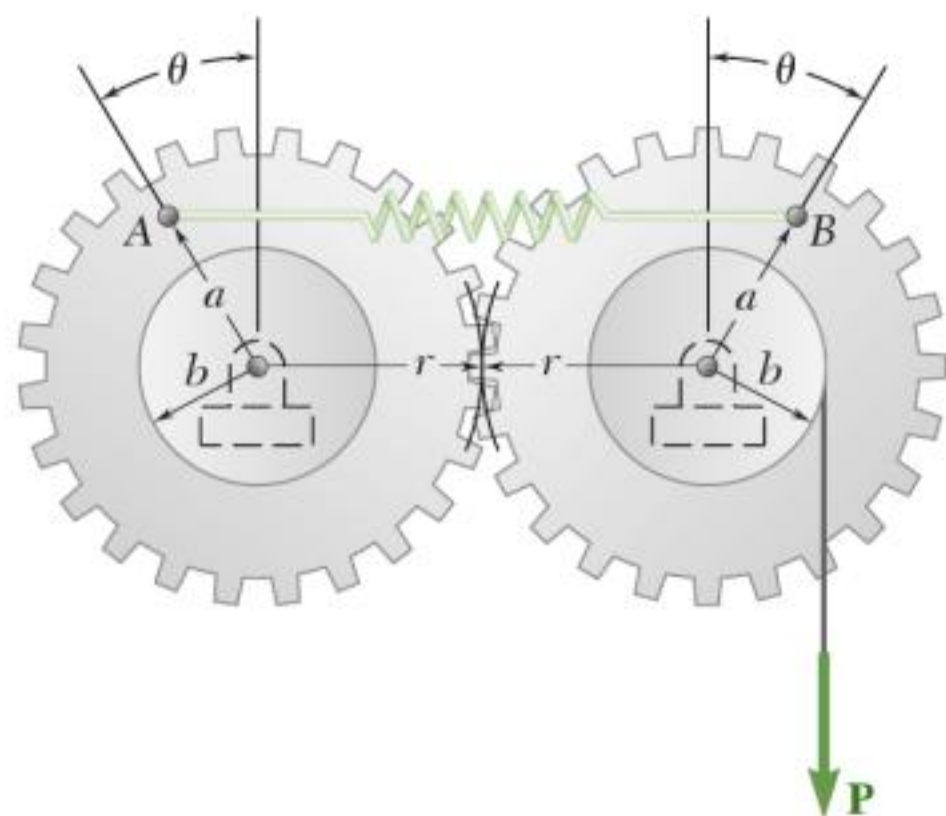


Figura P10.81 e P10.82

10.81 A mola AB , de constante k , está unida a duas engrenagens idênticas tal como mostra a figura. Sabendo que a mola está indeformada quando $\theta = 0$, determine dois valores do ângulo θ correspondente ao equilíbrio quando $P = 135 \text{ N}$, $a = 100 \text{ mm}$, $b = 75 \text{ mm}$, $r = 150 \text{ mm}$, $k = 0,9 \text{ kN/m}$. Determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.82 A mola AB , de constante k , está unida a duas engrenagens idênticas tal como mostra a figura. Sabendo que a mola está indeformada quando $\theta = 0$ e dado que $a = 60 \text{ mm}$, $b = 45 \text{ mm}$, $r = 90 \text{ mm}$, $k = 6 \text{ kN/m}$, determine (a) o intervalo de valores de P para que o equilíbrio seja estável, (b) dois valores de θ correspondentes ao equi-



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 10.111** Uma semiesfera homogênea de raio r é posicionada em uma inclinação como mostra a figura. Considerando que o atrito é suficiente para evitar o escorregamento entre a semiesfera e a inclinação, determine o ângulo θ correspondente ao equilíbrio quando $\beta = 10^\circ$.

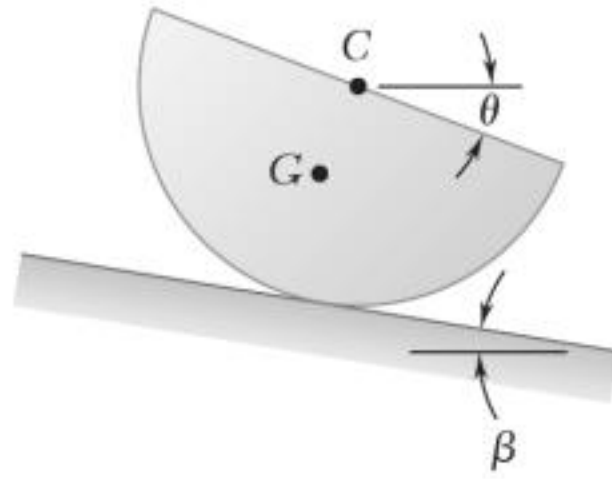


Figura P10.111 e P10.112

- 10.112** Uma semiesfera homogênea de raio r é posicionada em uma inclinação como mostra a figura. Considerando que o atrito é suficiente para evitar o escorregamento entre a semiesfera e a inclinação, determine (a) o maior ângulo β para que haja uma posição de equilíbrio, (b) o ângulo θ correspondente ao equilíbrio quando β é igual à metade do valor encontrado no item a.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

CRÉDITOS DAS FOTOS

CAPÍTULO 1

Abertura: Sr. Isaac Newton, Cortesia de Jeremy Whitaker; **Foto 1.1:** © PhotoLink/Getty Images RF.

CAPÍTULO 2

Abertura: © Tom Paiva/Getty Images; **Foto 2.1:** © H. David Seawell/CORBIS; **Foto 2.2:** © WIN-Initiative/Getty Images.

CAPÍTULO 3

Abertura: © Daniel Sheehan; **Foto 3.1:** © McGraw-Hill/Foto de Lucinda Dowell; **Foto 3.2:** © Steve Hix/Getty Images; **Foto 3.3:** © Jose Luis Pelaez/Getty Images; **Foto 3.4:** © Images-USA/Alamy; **Foto 3.5:** © Dana White/Photo Edit.

CAPÍTULO 4

Abertura: © Alfredo Maiquez/Getty Images; **Foto 4.1, Foto 4.2, Foto 4.3:** © McGraw-Hill/Foto de Lucinda Dowell; **Foto 4.4, Foto 4.5:** Cortesia de National Information Service for Earthquake Engineering da Universidade da Califórnia, Berkeley; **Foto 4.6:** © McGraw-Hill/Foto de Lucinda Dowell; **Foto 4.7:** Cortesia de SKF Limited.

CAPÍTULO 5

Abertura: © Christopher Morris/CORBIS; **Foto 5.1:** © Christies Images/SuperStock; **Foto 5.2:** Value RF/© Kevin Burke/CORBIS; **Foto 5.3:** © Ghislain & Marie David de Lossy/Getty Images; **Foto 5.4:** NASA.

CAPÍTULO 6

Abertura: © Alan Schein Photography/CORBIS; **Foto 6.1:** Cortesia de National Information Service for Earthquake Engineering da Universidade da Califórnia, Berkeley; **Foto 6.2:** Ferdinand Beer; **Foto 6.3:** © McGraw-Hill/Foto de Sabina Dowell; **Foto 6.4:** © EyeWire Collection/Getty Images RF; **Foto 6.5:** Cortesia de Luxo Lamp Corporation.

CAPÍTULO 7

Abertura: © Getty Images RF; **Foto 7.1:** © McGraw-Hill/Foto de Sabina Dowell; **Foto 7.2:** © Alan Thornton/Getty Images; **Foto 7.3:** © Michael S. Yamashita/CORBIS; **Foto 7.4:** © Steve Kahn/Getty Images.

CAPÍTULO 8

Abertura: © Bicot (Marc Caya); **Foto 8.1:** © Chuck Savage/CORBIS; **Foto 8.2:** © Ted Spiegel/CORBIS; **Foto 8.3:** © Adam Woolfitt/CORBIS.

CAPÍTULO 9

Abertura: © Lester Lefkowitz/Getty Images; **Foto 9.1:** © Ed Eckstein/CORBIS; **Foto 9.2:** Cortesia de Caterpillar Engine Division.

CAPÍTULO 10

Abertura: © Tom Brakefield/SuperStock; **Foto 10.1:** Cortesia de Altec Industries; **Foto 10.2:** Cortesia de De-Sta-Co.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 8.29 $3,46 \leq \frac{L}{a} \leq 13,63$.
- 8.36 $168,4 \text{ N} \leq P \leq 308 \text{ N}$.
- 8.37 $9,38 \text{ N} \cdot \text{m} \leq M \leq 15,01 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 8.38 $-46,8 \text{ N} \leq P \leq 34,3 \text{ N}$.
- 8.42 (a) Sistema desliza; $P = 62,8 \text{ N}$.
(b) Sistema de roda sobre B; $P = 73,2 \text{ N}$.
- 8.43 $35,8^\circ$.
- 8.44 $20,5^\circ$.
- 8.45 $1,225 \text{ W}$.
- 8.48 $\mathbf{P} = 2.080 \text{ N} \downarrow$.
- 8.49 $\mathbf{P} = 1.966 \text{ N} \downarrow$.
- 8.53 $9,86 \text{ kN} \leftarrow$.
- 8.54 $913 \text{ N} \leftarrow$.
- 8.55 (a) $28,1^\circ$. (b) $728 \text{ N} \nearrow 14,0^\circ$.
- 8.57 $67,4 \text{ N}$.
- 8.60 (b) $283 \text{ N} \leftarrow$.
- 8.61 $0,442$.
- 8.64 $0,1103$.
- 8.65 $0,1013$.
- 8.69 $1,068 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 8.70 $4,18 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 8.76 450 N .
- 8.77 412 N .
- 8.78 344 N .
- 8.79 376 N .
- 8.80 $0,226$.
- 8.88 (a) $4,80 \text{ kN}$. (b) $1,375^\circ$.
- 8.91 $0,1670$.
- 8.96 $154,4 \text{ N}$.
- 8.99 (a) $1,288 \text{ kN}$. (b) $1,058 \text{ kN}$.
- 8.100 300 mm .
- 8.102 (a) $22,8 \text{ kg}$. (b) 291 N .
- 8.103 (a) $109,7 \text{ kg}$. (b) 828 N .
- 8.107 $35,1 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 8.108 (a) $27,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. (b) 675 N .
- 8.109 (a) $39,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. (b) 844 N .
- 8.112 $44,9 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
- 8.116 (a) $11,66 \text{ kg}$. (b) $38,6 \text{ kg}$. (c) $34,4 \text{ kg}$.
- 8.117 (a) $9,46 \text{ kg}$. (b) $167,2 \text{ kg}$. (c) $121,0 \text{ kg}$.
- 8.122 $5,97 \text{ N}$.
- 8.123 $9,56 \text{ N}$.
- 8.126 $0,350$.
- 8.131 (a) $51,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. (b) 875 N .
- 8.132 (a) $170,5 \text{ N}$. (b) $14,04^\circ$.
- 8.135 $6,35 \leq L/a \leq 10,81$.
- 8.138 $0,225$.
- 8.139 (a) $620 \text{ N} \leftarrow$. (b) $\mathbf{B}_x = 1.390 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 1.050 \text{ N} \downarrow$.
- 8.142 (a) $0,238$. (b) $218 \text{ N} \downarrow$.
- 8.C1 $x = 500 \text{ mm}$; $63,3 \text{ N}$; $P_{\text{máx}} = 67,8 \text{ N}$ em $x = 355 \text{ mm}$.
- 8.C3 $\mu_A = 0,25$; $M = 0,0603 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 8.C4 $\theta = 30^\circ$; $1,336 \text{ N} \cdot \text{m} \leq M_A \leq 2,23 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 8.C6 $\theta = 20^\circ$; $10,39 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 8.C8 (a) $x_0 = 0,600 L$; $x_m = 0,604 L$; $\theta_1 = 5,06^\circ$.
(b) $\theta_2 = 55,4^\circ$.

CAPÍTULO 9

- 9.1 $b^3 h/12$.
- 9.2 $3a^4/2$.
- 9.3 $2a^3 b/15$.
- 9.4 $ha^3/5$.
- 9.6 $a^4/8$.
- 9.7 $2ab^3/7$.
- 9.9 $ab^3/15$.
- 9.10 $0,1056 ab^3$.
- 9.11 $ab^3/15$.
- 9.12 $2a^3 b/21$.
- 9.15 $ab^3/10$; $b/\sqrt{5}$.
- 9.16 $3ab^3/35$; $b\sqrt{9/35}$.
- 9.17 $a^3 b/6$; $a/\sqrt{3}$.
- 9.18 $3a^3 b/35$; $b\sqrt{9/35}$.
- 9.21 $20a^4$; $1,826a$.
- 9.22 $43a^4/48$; $0,773a$.
- 9.23 $(\pi/2)(R_2^4 - R_1^4)$; $(\pi/4)(R_2^4 - R_1^4)$.
- 9.24 (b) Para $t/R_m = 1$, $-10,56\%$; para $t/R_m = \frac{1}{2}$, $-2,99\%$,
para $t/R_m = \frac{1}{10}$, $-0,1250\%$.
- 9.25 $64a^4/15$; $1,265a$.
- 9.28 $bh(12h^2 + b^2)/48$; $\sqrt{(12h^2 + b^2)}/24$.
- 9.31 $390 \times 10^3 \text{ mm}^4$; $21,9 \text{ mm}$.
- 9.33 $64,3 \times 10^3 \text{ mm}^4$; $8,87 \text{ mm}$.
- 9.37 $I = 9,50 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $d_2 = 60,0 \text{ mm}$.
- 9.38 $A = 6.600 \text{ mm}^2$; $\bar{I} = 3,72 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.41 $\bar{I}_x = 1,874 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 5,82 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.42 $\bar{I}_x = 48,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 8,35 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$.
- 9.45 (a) $80,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. (b) $57,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.46 (a) $12,16 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. (b) $9,73 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.49 $\bar{I}_x = 260 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_x = 144,6 \text{ mm}$;
 $\bar{I}_y = 17,53 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_y = 37,6 \text{ mm}$.
- 9.51 $\bar{I}_x = 255 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_x = 134,1 \text{ mm}$;
 $\bar{I}_y = 100,0 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_y = 83,9 \text{ mm}$.
- 9.53 $\bar{I}_x = 3,55 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 49,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.55 $\bar{I}_x = 745 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 91,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.57 $3\pi r/16$.
- 9.58 $3\pi b/16$.
- 9.59 $15h/14$.
- 9.60 $4h/7$.
- 9.63 $5a/8$.
- 9.64 $80,0 \text{ mm}$.
- 9.67 $a^4/2$.
- 9.68 $a^2 b^2/12$.
- 9.69 $-b^2 h^2/8$.
- 9.71 $-1,760 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.72 $-21,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.75 $471 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$.
- 9.78 $1,165 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.79 (a) $\bar{I}_{x'} = 0,482a^4$; $\bar{I}_{y'} = 1,482a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -0,589a^4$.
(b) $\bar{I}_{x'} = 1,120a^4$; $\bar{I}_{y'} = 0,843a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0,760a^4$.
- 9.80 $\bar{I}_{x'} = 103,5 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_{y'} = 97,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$;
 $\bar{I}_{x'y'} = -38,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.85 $20,2^\circ$; $1,754a^4$; $0,209a^4$.
- 9.86 $-17,11^\circ$; $139,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $62,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ÍNDICE

A

Adição

- associativa, [22](#)
- de binários, [113](#)
- de vetores, [20-22](#)

Adição de forças

- no espaço, concorrente, [51-59](#), [68](#)
- pela lei do paralelogramo, [5](#)
- pela soma dos componentes X e Y , [32-37](#)

Análise de estruturas, 286-353

- estruturas e máquinas, 318-346, 349
- introdução, [288-289](#)
- problemas para computador, 352-353
- problemas para revisão, 350-351
- resumo, 347-349

Análise de treliças, [289-317](#), 347-348

- pelo método das seções, 306-307, 348
- pelo método dos nós, [292-294](#), 347-348

Análise de uma estrutura, 318-319, 349

Ângulos

- de atrito 417-418, 462
- de avanço, 433, 436, 463
- de repouso, 417

Aplicação do princípio do trabalho virtual, 564-566

Aproximação por métodos numéricos, 401

Área, unidades de (unidades SI), [7-10](#)

Áreas e linhas, [222-259](#). *Ver também*

- momento de inércia de áreas
 - centro de gravidade de um corpo bidimensional, [222-223](#), [276](#)
 - centroide de, 224-225, [276](#)
 - determinação do centroide por integração, 238-240, 277
- distribuição de cargas em vigas, 250, 278
- forças em superfícies submersas, 251-259
- placas e fios compostos, 228-238
- primeiros momentos de, 225-228, [276](#)
- teorema de Pappus-Guldinus, 240-249, 278

Áreas simétricas e assimétricas, 226

Aristóteles, [4](#)

Arquimedes, [4](#)

Atrito, 412-471

- ângulo de, 417-418, 462
- atrato em roda, resistência ao rolamento, 444-451

atrato seco

- as leis de, 414-416, 423
- problemas que envolvem, 418-431, 462-463

círculo de, 447

coeficiente de, 414-416, 424, 454-456

correia, 451-461

cunhas, 431-432

disco, 443-444, 447

do eixo, 441-443, 447

estático e cinético, 462

fluido, 414

introdução, 414

mancais de deslizamento, 441-443

mancais de escora, 443-444

parafusos de rosca quadrada, 432-441

problema para revisão, 465-468

problemas para computador, 469-471

resumo, 462-464

valores máximos e mínimos de, 420

Atrito de Coulomb. *Ver* Atrito seco

Atrito em roda, resistência ao rolamento, 444-451

B

Barragem Grand Coulee, 220-221

Barragens, 220-221

Binários

- adição de, [113](#)
- aplicados a uma viga, 371
- equivalentes, [111-113](#), [118,151](#)
- momento de, [110](#), 151
- representado por vetores, [113-114](#)
- resultantes, [128](#)

C

Cabos

- catenária, 397-404, 407
- com cargas concentradas, 385-386
- com cargas distribuídas, 386-387, 407
- flexibilidade, 385, 406
- forças, 385-404
- parabólico, [387-397](#), 407

Cálculos, antecipando erros em, [15](#)

Cargas aplicadas, 325

Cargas concentradas, 250, 364

equivalente, [252](#)

Cargas distribuídas, 364

em cabos, 384-385, 405

em vigas, 250, 254, 278

Cargas triangulares, 254

Centro de pressão, 251

Centroides, [222](#)

de áreas e linhas, 224-225, 227-228, [276](#)

de um sólido, [260-262](#), 267, 277-278

determinação, 230, 233

por integração, 238-240, 263-275, 277, 279

Centroides e centros de gravidade, [222-285](#)

áreas e linhas, [222-259](#)

introdução, [222](#)

problemas para computador, 283-285

problemas para revisão, [280-282](#)

resumo, [276-279](#)

sólidos, [260-275](#)

Centros de gravidade, 233-238

de corpos bidimensionais, [222-223](#), [276](#)

de corpos tridimensionais, [77](#), 260-262, 277-278

Ciência, [4](#)

abstrata, [4](#)

aplicada, [4](#)

pura, [4](#)

Círculo de atrito, 447

Círculo de Mohr, para momentos e produtos de inércia, 507-512, 550-551

Coeficientes de atrito, 414-416

Completamente vinculada, 308

Componente retangular, [29](#), [34](#), 55, [148-149](#)

de uma força, vetores unitários, 29-[31](#), 66

de uma força no espaço, [47-50](#)

do momento de uma força, [85-95](#), 149

Componentes. *Ver* Componentes

oblíquos; Componentes retangulares;

Componentes escalares;

Componentes vetoriais

Componentes do vetor, [30](#)

Componentes escalares, [30](#), [32](#), [47](#), 66

Componentes oblíquos, [29](#)

Compressão, 347-348, 356-357

Comprimento, [7](#)

unidades de, [12](#)

Conceitos e princípios fundamentais, [4-7](#), [15](#)

lei de Newton da gravitação, [6](#)

lei do paralelogramo para a adição de forças, [5](#)

princípio da transmissibilidade, [5](#)
três leis fundamentais de Newton, [5-6](#)

Condições de carregamento, 198, 364-365. *Ver também* Cargas aplicadas, Cargas concentradas, nós em condições especiais de carregamento, 294-296, 348

Condições necessárias e suficientes, 321

Constante de mola, 581

Constante gravitacional, [6](#)

Conversão de um sistema de unidades para o outro, [12-13](#)
unidades de comprimento, [12](#)
unidades de força, [12-13](#)
unidades de massa, [13](#)

Coordenadas, [4](#)

Corpo sujeito à ação de duas forças, 186, 347

Corpos
momento de inércia de, 474, 513-547, 551-553
produtos de inércia de, 540-541

Corpos bidimensionais, [160](#), [172](#)
centro de gravidade de, [222-223](#), [276](#)

Corpos compostos, 263, 279
momento de inércia de, 517-533

Corpos rígidos em sistema de forças equivalentes, [74-157](#)
adição de binários, [113](#)
binários equivalentes, [111-113](#), 151
casos particulares de redução de um sistema de forças, [128-130](#), 152
componente retangular do momento de uma força, [85-95](#), 149
forças externas e internas, [76-77](#)
introdução, [76](#)
mecânica de, [4-5](#)
momento de um binário, [110](#), 151
momento de uma força em relação a um dado eixo, [99-109](#), [150](#)
momento de uma força em relação a um dado ponto, [83-84](#), 149
princípio da transmissibilidade, forças equivalentes, [77-79](#), [148](#)
problemas para computador, 156-157
problemas para revisão, 153-155
produto escalar de dois vetores, 96-[98](#), 149-150
produto triplo misto de três vetores, [98-99](#), [150](#)

produto vetorial de dois vetores, 79-[81](#), [148](#)
produto vetorial expresso em termos de componentes retangulares, [81-82](#), [148-149](#)
projeção de um vetor em um eixo, 150
redução de um sistema de forças a um sistema força-binário, 151-152
redução de um sistema de forças a um tursor, [130-147](#)
redução de um sistema de forças a uma força e um binário, [125-126](#), 151-152
representando binários por vetores, [113-114](#)
resumo, [148-152](#)
sistemas equipolentes de vetores, [127](#)
substituição de uma dada força por uma força e um binário, [114-125](#)
teorema de Varignon, [85](#)

Corpos sujeitos à ação de três forças, 185-186

Corpos tridimensionais, centros de gravidade de, [260-262](#), 277-278

Cossenos diretores, 67-68

Cunhas, 431-432, 436

D

d'Alembert, [4](#)

Decomposição
de um sistema de forças a uma força e um binário, [125-126](#), [151-152](#)
de uma dada força por uma força e um binário, [114-125](#)
dos componentes de uma força, 23-[29](#), 66

Deformação, [79](#)

Desconhecidos, [39](#), 161-164, 192, 213, [326](#), 424

Deslocamento, 560
finito, 580-581, 595
virtual, 563-565, 594

Diagrama espacial, [38](#)

Diagramas, esforço cortante e momento fletor, 367-375

Diagramas de corpo livre, [14](#), [39-42](#), 59-61, [68](#), [160-161](#), [168-172](#), 185, 194-198, 212, [232](#), 299, 311, 337, 359, 370, 381, 391, 421-422, 424, 447

Distância perpendicular, [29](#), [90](#), [102](#), [104](#), 523

Dois vetores,
produto escalar de, [96-98](#), 149-150
produto vetorial de, [79-81](#), [148](#)

E

Eficiência
mecânica, de máquinas reais, 566-579, 595
na resolução de problemas, [326](#)

Eixos
centroidal, [485](#), 491, 499, 515
paralelos, 491, 523
de inércia, principal, 499-507, 534-535, 550, 553
do tursor, [136](#), 138
projeção de um vetor, [97](#), 150

Elemento sujeito à ação de múltiplas forças
estruturas que contém, 318, 325-[326](#), 337, 349
forças internas em, 356, 405

Elementos retos sujeitos à ação de duas forças, forças internas em, 405

Elementos sem força aplicada, 295-296

Elevações, 391-392

Elipsoide de inércia, 534-535, 553

Embreagens a disco, 443, 447

Empirismo, [4](#)

Energia potencial, 560, 582, 596
e equilíbrio, 583

Equilíbrio, [18](#)
corpo sujeito à ação de duas forças, 183-184, 213
corpo sujeito à ação de três forças, 184-190, 213
de corpos rígidos, 158-219
diagramas de corpo livre, 161, 212
equações, [39](#), 212, 311, 370, 418-419
estabilidade, [584-593](#), 596
introdução, [160](#)
problemas para computador, [218-219](#)
problemas para revisão, 215-217
resumo, 212-214

Equilíbrio de uma partícula, [37-38](#)
no espaço, 59-65, [68](#)
problemas que envolvem, [38-47](#)

Equilíbrio em duas dimensões, 162-190, 212-213
de corpo sujeito à ação de duas forças, 183-184, 213
de corpo sujeito à ação de três forças, 184-190, 213
de um corpo rígido bidimensional, [164-165](#)

- reações em apoios e conexões para estruturas bidimensionais, 162-163
- reações estaticamente indeterminadas, vinculações parciais, 166-183, 213
- vinculações impróprias, 213
- Equilíbrio em três dimensões, 191-211, 213-214
- de um corpo rígido tridimensional, 191
- reações em apoios e conexões para uma estrutura tridimensional, 191-211
- Erros em cálculos, antecipando, 15
- Escorregamento, 453, 455-456
- Espaço, 4
- Estabilidade do equilíbrio, 584-593, 596
- Estática de partículas, 16-72
- forças em um plano, 18-47, 66-67
- forças no espaço, 47-65, 67-68
- introdução, 18
- problemas para computador, 71-72
- problemas para revisão, 69-70
- resumo, 66-68
- Estruturas,
- análise de, 286-353
- elementos sujeitos à ação de várias forças, 318, 325-326
- Estruturas e máquinas, 289, 318-346, 349
- análise de uma estrutura, 318-319, 349
- estruturas que contêm vários elementos sujeitos a várias forças, 318
- estruturas que deixam de ser rígidas quando separadas de seus apoios, 319-333
- máquinas, 333-346, 349
- F**
- Fios
- compostos, 228-238
- homogêneos, 276
- múltiplos, 267
- Flecha, 399, 401
- Flexão, 356-357
- pura, 475
- Flexibilidade, de cabos, 385, 406
- Fluidos
- compressibilidade de, 4
- mecanismos de, 4
- Força, 4-5, 7
- de gravidade, 8, 582, 596
- definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação, 50-51
- elástica, 596
- sobre uma partícula, resultante de duas forças, 18-19, 66
- unidades de, 12-13
- Força axial, 356-357, 359, 405
- Força de atrito cinético, 414, 447, 462
- ângulo da, 417, 462
- coeficiente da, 415, 423, 456, 462
- Força de atrito estática, 414, 447, 462
- ângulo de, 417, 462
- coeficiente de, 415, 423, 456, 462
- Força de cisalhamento, 356-357
- diagramas, 367-375, 381-382
- em uma viga, 365-367, 405-406
- Forças
- axiais, 356-357, 359
- concorrentes, 22-23, 67, 184, 213
- coplanares, 67
- de cisalhamento, 356-357, 365-375, 406
- de entrada, 333, 349, 566
- de gravidade, 582
- de saída, 333, 349, 566
- elásticas, 596
- em superfícies submersas, 251-259
- em uma mola, 581-582, 596
- externas e internas, 76-77
- hidrostáticas, 492
- paralelas, 129-130, 184, 213
- vinculares, 161
- Forças concorrentes, 128
- no espaço, adição de, 51-59, 68
- resultante de várias, 22-23, 67
- Forças coplanares, 128-129
- resultante de várias, 67
- Forças distribuídas
- centroides e centros de gravidade, 222-285
- áreas e linhas, 222-259
- introdução, 222
- problemas para computador, 283-285
- problemas para revisão, 280-282
- resumo, 276-279
- sólidos, 260-275
- momentos de inércia, 472-557
- introdução, 472-475
- momentos de inércia de áreas, 475-512
- momentos de inércia de corpos, 513-547, 551-553
- problemas para computador, 556-557
- problemas para revisão, 554-555
- resumo, 548-553
- Forças em um plano, 18-47, 66-67
- adição de vetores, 20-22
- componentes retangulares de uma força, vetores unitários, 29-31, 66
- decomposição dos componentes de uma força, 23-29, 66
- equilíbrio de partículas, 37-38
- força em uma partícula, resultante de duas forças, 18-19, 66
- pela soma dos componentes X e Y, 32-37
- primeira lei de Newton do movimento, 38
- problemas envolvendo o equilíbrio de partículas, diagrama de corpo livre, 38-47
- resultante de várias forças concorrentes, 22-23, 67
- resultante de várias forças coplanares, 67
- vetores, 19-20
- Forças em vigas e cabos, 354-411
- cabos, 385-404
- forças internas em membros, 356-363
- introdução, 356
- problemas para computador, 410-411
- problemas para revisão, 408-409
- resumo, 405-407
- vigas, 364-385
- Forças equivalentes, princípio da transmissibilidade em, 77-79, 148
- Forças externas, 76-77, 148, 366
- Forças internas, 76-77, 79, 148, 288, 347, 358-359
- em elementos, 356-363
- em elementos retos sujeitos à ação de duas forças, 405
- em elementos sujeitos à ação de múltiplas forças, 325-326, 349, 356, 405
- Forças no espaço, 47-65, 67-68
- adição de forças concorrentes, 51-59, 68
- componentes retangulares, 47-50
- cossenos diretores, 67-68
- diagramas de corpo livre, 68

equilíbrio de uma particular, 59-65, [68](#)
 força definida por sua intensidade e por dois pontos em sua linha de ação, [50-51](#)

Forças no espaço tridimensional, 67
 partículas em, [61](#)

Formas arbitrárias, determinação dos eixos principais e dos momentos principais de inércia de um corpo, 536-547

G

Giração, raio de, 478-484, 514-551

Grand Viaduc de Millau, 354-355

Grandezas escalares, 560

Grandezas vetoriais, 66

Graus de liberdade, 583, 585

Gravitação

constante de, [6](#)

força de, [8](#), 582, 596

lei de, [6](#)

H

Hamilton, [4](#)

Hidráulica, [4](#)

Hidráulicas, forças, 492

Horizontal, elemento diferencial, 242

I

Inércia. *Ver também* Momento de inércia, Produtos de inércia

elipsoide de, 534-535, 553

produtos de massa, 540-541

Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia, [11](#)

Integração

dupla, 238, 263

tripla, 263

L

Lagrange, [4](#)

Lei do paralelogramo, para adição de forças, [5](#), [19](#), [26-29](#), 66

Linhas. *Ver* Áreas e linhas

Linhas de ação, [18](#), [23](#), [77](#), [84](#), 311

Locomotiva, 412-413

M

Mancal

de cursor, 443

de deslizamento, 441-443, 447

de escora, 443-444, 447

de extremidade, 443

Máquinas, 333-346, 349

eficiência mecânica real de, 566-579, 595

Massa, [4-5](#), [7](#)

unidades de, [13](#)

Mecânica

conceitos e princípios

fundamentais, [4-7](#)

conversão de um sistema de unidades em outro, [12-13](#)

de corpos deformáveis, [4](#)

de corpos rígidos, [4](#)

de fluidos, [4](#)

definição, [4](#)

método de resolução de problemas, [13-15](#)

newtoniana, [4](#)

precisão numérica, [15](#)

relativístico, [5](#)

sistemas de unidades, [7-12](#)

Mecanismos lubrificados, 414

Método das seções, análise de treliças pelo, 306-307, 348

Método do trabalho virtual, 558-601

aplicações do princípio do trabalho virtual, 564-566

deslocamento virtual, 594

durante um deslocamento finito, 580-581, 595

energia potencial, 582-583, 596

equilíbrio e energia potencial, 583

estabilidade do equilíbrio, [584-593](#), 596

introdução, 559

máquinas reais, eficiência

mecânica, 566-579, 595

princípio do trabalho virtual, 563-564, 594

problemas para computador, 600-601

problemas para revisão, 597-599

resumo, 594-596

trabalho de um peso, 595

trabalho de uma força, 559-563, 580-581, 595

Métodos dos nós, análise de treliças pelo, [292-294](#), 347-348

Mohr, Otto, 507

Molas

forças em, 581-582, 596

trabalho feito por, 581

Momento de um binário, [110](#), 151

Momento de uma força

em relação a um dado eixo, [99-109](#), 150

em relação a um ponto, [83-84](#), [149](#)

Momento fletor, 357, 359

diagramas, 367-375, 381

em uma viga, 365-367, 405-406

Momento polar de inércia, 474, 477-479, 481, 492

Momentos de inércia, 472-557

círculo de Mohr para, 507-512, 550-551

de superfícies compostas, 486-498, 549

de um corpo em relação a um eixo arbitrário, produtos de inércia de

corpos, 533-534, [552-553](#)

de um corpo tridimensional, determinação por integração, 517

introdução, 472-475

polar, 474, 477-479, 481, 492

principal, 499-507, 550

problemas para computador, 556-557

problemas para revisão, 554-555

resumo, 548-553

Momentos de inércia de corpos, 513-547, 551-553

de corpos compostos, 517-533

de corpos tridimensionais por integração, 517

de placas delgadas, 516-517, [552](#)

de um corpo de forma arbitrária, 536-547

de um corpo em relação a um eixo arbitrário, produtos de inércia de

corpos, 533-534, [552-553](#)

eixos principais de inércia, 534-535, 553

elipsoide de inércia, 534-535, 553

teorema dos eixos paralelos, 515, [552](#)

Momentos de inércia de superfícies, 475-512

círculo de Mohr para momentos e produtos de inércia, 507-512, 550-551

determinação do momento de inércia de uma superfície por integração, 476-477

eixos principais e momentos

principais de inércia, 499-507, 550

momento de segunda ordem,

ou momento de inércia de uma superfície, 475-476

momento polar de inércia, 477-478

momentos de inércia de superfícies

compostas, 486-498, 549

produtos de inércia, 498-499, 549-550

- raio de giração de uma superfície, 478-484
teorema dos eixos paralelos, 485-486, 549
- Momentos de primeira ordem, [222](#), [276](#), 475, 478
de áreas e linhas, 225-228, 230, 233, [276](#)
- Momentos principais de inércia, 499-507, 550
- Momentos resultantes, 126
- Movimento
iminente, 416, 419, 424, 463
primeira lei do, [38](#)
relativo, 419
- N**
- Newton, Sir Isaac, [4](#)
- Nós. *Ver* Método dos nós em condições especiais de carregamento, 294-296
- O**
- Origem, [4](#)
- P**
- Pappus, [240](#)
- Parafusos
autotravantes, 433
de rosca quadrada, 432-441, 463
- Partículas, [5](#)
equilíbrio de, [16-17](#)
estática de, [16-72](#)
no espaço tridimensional, [61](#)
- Passando-se uma seção, 306
- Passo, [130-131](#), 436
de um tursor, [136](#), 138
- Permutação cíclica, [99](#)
- Peso, [8](#)
trabalho do, 595
- Pinos em atrito, 562
- Placas
compostas, 228-238
delgadas, momento de inércia de, 516-517, [552](#)
homogêneas, [276](#)
múltiplas, 267
- Planos
de simetria, 261, 263, 278-279
forças em, [18-47](#), 66-67
- Ponte Astoria, 286-287
- Princípio da transmissibilidade, [5](#), 76-[79](#), [148](#)
forças equivalentes, [77-79](#), [148](#)
- Princípio do trabalho virtual, 563-564, 594
- Problemas
eficiência na resolução, [326](#)
enunciado, [14](#)
método de solução, [13-15](#)
- Problemas para computador
análise de estruturas, 352-353
atrito, 469-471
corpos rígidos, em sistemas equivalentes de forças, [156-157](#)
equilíbrio de corpos rígidos, [218-219](#)
estática de partículas, [71-72](#)
forças distribuídas
centroides e centros de gravidade, 283-285
momentos de inércia, 556-557
forças em vigas e cabos, 410-411
método do trabalho virtual, 600-601
- Produto
escalar, de dois vetores, [96-98](#), [103](#), 149-150
triplo misto, de três vetores, [98-99](#), 150
- Produto vetorial, [80](#), [90](#)
de dois vetores, [79-81](#), [148](#)
expresso em termos de componentes retangulares, [81-82](#), [148-149](#)
- Produtos de inércia, 498-499, 549-550, 553
Círculo de Mohr para, 507-512, 550-551
massa, 540-541
- Projeção, de um vetor em um eixo, [97,150](#)
- Propriedade
associativa, [96](#)
comutativa, [80](#)
em adição, [20](#)
distributiva, [80](#)
- Q**
- Queen Elizabeth [2](#) (transatlântico), [74-75](#)
- Questões de validade, 376
- R**
- Raio de giração
de um corpo, 514, 551
de uma área, 478-484
- Reações em apoios e conexões equivalentes a uma força e um binário, 162
- equivalentes a uma força com linha de ação conhecida, 162
equivalentes a uma força de direção, sentido e intensidade desconhecidos, 162
para uma estrutura bidimensional, 162-163
para uma estrutura tridimensional, 191-211
- Reações estaticamente indeterminadas, 166-183, 198, 213-[214](#)
- Redução de um sistema de forças, [128-130](#), 137-138, 152
para um sistema força binário, 151-152
para um tursor, [130-147](#)
- Regra
da mão direita, [79](#)
do polígono, para a adição de vetores, [22](#)
do triângulo, [21](#), [26](#)
- Repouso, ângulo de, 417
- Resistência ao rolamento, 443-451
coeficiente de, 443, 447
- Respostas, verificando cuidadosamente, [15](#)
- Resultantes, [18-19](#), [34](#), [37](#), [53](#), [76](#), 132, [136-137](#)
de várias forças coplanares, 67
momentos, 126, 137
- Resumo
análise de estruturas, 347-349
atrito, 462-464
corpos rígidos, em sistemas de forças equivalentes, [148-152](#)
equilíbrio de corpos rígidos, 212-[214](#)
estática de partículas, 66-68
forças distribuídas,
centroides e centros de gravidade, [276-279](#)
momentos de inércia, 548-553
forças em vigas e cabos, 405-407
método do trabalho virtual, 594-596
- Revolução
de um corpo, [240-241](#)
superfície de, [240-241](#)
- Rio
Columbia, 220-221, 286-287
Tarn Gorge, 354-355
- Rotação, [77](#)

S

Segundo momento de inércia, de uma área, 474-476, 478

Simetria, 540
de uma elipse, 492
planos de, 261, 263, 278-279

Sistema
de forças, equivalente, [127](#), [148](#), 152
força-binário, [76](#), [115](#), 132-133, 359

Sistema de unidades, [7-12](#)

Sistema Internacional de Unidades (unidades SI), [7-10](#)
unidades de área e volume, [7-10](#)
usado em mecânica, [10](#)

Sistemas equipolentes de vetores, [127](#)

Sólidos, [260-275](#)
centro de gravidade de corpos tridimensionais, [260-262](#), 277-278
centroide de, [260-262](#), 277-278
corpos compostos, 263, 279
de revolução, [240-241](#)
determinação do centroide de, por integração, 263-275, 279

Soluções
analíticas, [32](#), [42](#)
definidas previamente, 299
gráficas, [25](#), [32](#), [38](#)
trigonométricas, [24-25](#), [32](#)

Superfícies
de revolução, [240-241](#)
não lubrificadas, 414, 462
quadráticas, 534
submersas, forças em, 251-259

Suposições, 365-366

T

Tempo, [4-5](#), [7](#)

Teoremas
de Pappus-Guldinus, [222](#), [240-249](#), 278
de Varignon, [85](#), [112-113](#)
eixos paralelos, [485-486](#), 491, 515, 523, 549, [552](#)

Tirantes, 316

Torsor, 152
passo do, [136](#)

Trabalho, 560-561. *Ver também*
Método do trabalho virtual
de um peso, 595
de uma força, 559-563
durante um deslocamento finito, 580-581, 595

Trabalho virtual. *Ver* Método do trabalho virtual

Tração, 348, 356-357, 385-387, 392
valores máximos e mínimos de, 400

Transatlântico, [74-75](#)

Translação, [77](#)

Transmissibilidade, princípio da, [5](#), [76-79](#), [148](#)

Treliças, [289-317](#), 347-348
análise de, [289-317](#), 347-348
definição de uma treliça, [289-290](#)
espacial, [296-306](#), 348
nós em condições especiais de carregamento, 294-296
rígidas, 291, 308, 321
treliças compostas, 307-308
treliças espaciais, [296-306](#), 348
treliças feitas de várias treliças simples, 307-317, 348
treliças Fink, 307
treliças simples, 291, 347

Treliças estaticamente determinada 308, [312](#), 321, 348

Treliças estaticamente indeterminadas, 308, [312](#)

Três leis fundamentais de Newton, [5-6](#), [14](#), [77-78](#)
lei da gravidade, [6](#)
primeira lei do movimento, [38](#)
terceira lei, [292](#), 318

Três vetores, produto triplo misto de, [98-99](#), 150

Triade orientada diretamente, [79](#)

Triângulo de forças, [39](#), 185

U

Unidades
cinéticas, [7](#)
de área e volume (unidades SI), [7-10](#)
de comprimento, [12](#)
de força, [12-13](#)

de massa, [13](#)
derivadas, [7](#)
gravitacionais, [11](#)
sistema consistente de, [7](#)
usuais (U.S.), [11-12](#), [14](#)

Unidades SI. *Ver* Sistema Internacional de Unidades

V

Vão, 364, 399

Veleiro, 158-159

Vetor fixo, [19](#)


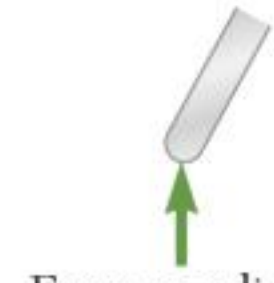


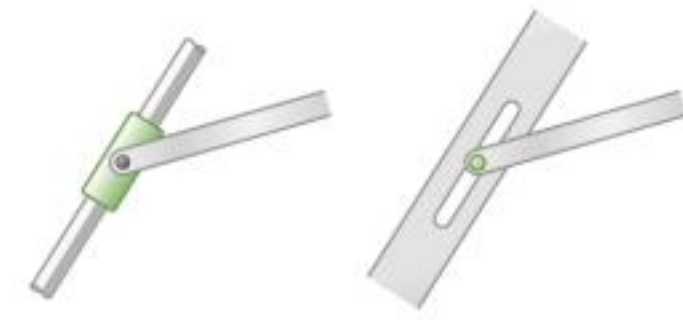
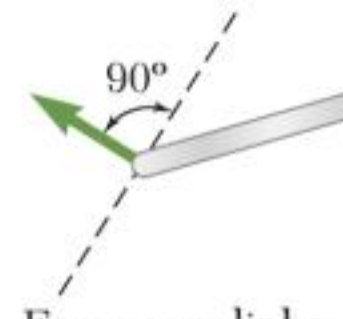

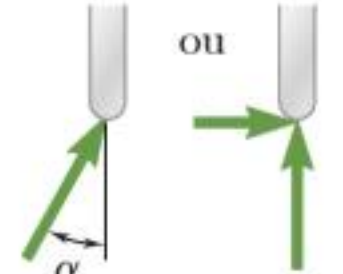

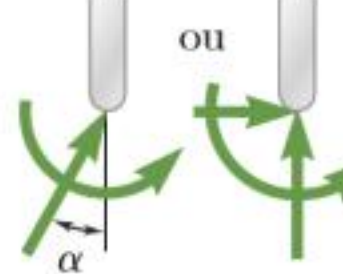
Vetores, [5](#), [19-20](#), 54
adição de, [20-22](#)
binários, 151
coplanares, [22](#)
deslizantes, [20](#), [78](#)
fixos e livres, [19-20](#), [110](#), [118](#)
negativos, [20](#)
posição, [83](#), [86](#), [149](#)
produto triplo misto de três, [98-99](#), 150
representando binários por, 113-[114](#)
sistema equipolentes de, [127](#)
subtração de, [21](#)
unitário, [30](#)

Vigas
balanço, 406
com extremidade em balanço, 406
diagramas de esforço cortante e momento fletor, 367-375
esforço cortante momento fletor em, 365-367, 406
forças, 364-385
relações entre carregamento, esforço cortante e momento fletor, 375-385, 406
simplesmente suportada, 406
vários tipos de carregamento e apoio, 364-365

Vínculos, 161
completos, 308, [312](#), 348
impróprios, 167, 192, 198, 213-214, [312](#)
parciais, 166-183, 192, 198, 213-[214](#), [312](#)

Volume, unidades de (SI), [7-10](#)

Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional

Apoio ou Conexão	Reação	Número de incógnitas
 <p>Roletes Suporte basculante Superfície sem atrito</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Cabo curto Haste curta</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Cursor sobre haste sem atrito Pino deslizante sem atrito</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Pino sem atrito ou articulação Superfície rugosa</p>	 <p>Força com direção desconhecida</p>	2
 <p>Engaste</p>	 <p>Força e binário</p>	3

O primeiro passo na solução de qualquer problema que envolva o equilíbrio de um corpo rígido é construir um diagrama de corpo livre apropriado deste corpo. Como parte desse processo, é necessário mostrar nesse diagrama as reações através das quais o solo e outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo. As figuras das capas internas resumem as possíveis reações exercidas sobre corpos bi e tridimensionais.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

9ª Edição

Mecânica Vetorial para Engenheiros ESTÁTICA

FERDINAND P. BEER
E. RUSSELL JOHNSTON JR.
DAVID F. MAZUREK
ELLIOT R. EISENBERG

Com conceitos precisos e completos e seções especiais de resoluções de problemas, este livro, no Sistema Internacional de Medidas, fornece aos alunos de Engenharia a oportunidade de aprender Estática de forma prática.

- Entre os suplementos oferecidos ao professor, lâminas de PowerPoint em português.
- Os capítulos são abertos com exemplos reais e com um sumário resumido dos conteúdos que serão trabalhados.
- Os conceitos são apresentados passo a passo, de forma clara e objetiva.
- Seções opcionais oferecem tópicos avançados.
- A seção **Problemas resolvidos** é apresentada em uma única página, o que proporciona melhor visualização dos problemas-chave.
- A seção **Metodologia para a resolução de problemas** prepara os alunos para solucionar os exercícios propostos.
- Cada capítulo oferece um conjunto de problemas que devem ser resolvidos com o auxílio de programas computacionais.



Visite a Área do Professor no site www.grupoa.com.br para acessar material exclusivo (em inglês e português) deste livro.

ENGENHARIA MECÂNICA

ISBN 978-85-8055-048-1



www.grupoa.com.br

**Mc
Graw
Hill**



grupo a
Conhecimento que transforma.